

Métodos Numéricos Aplicados a Problemas de Eletromagnetismo

Prof. Dr. Diego Andrés Parada Rozo

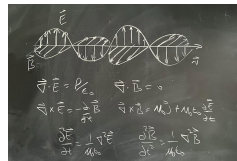
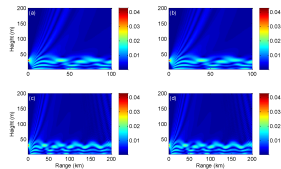
Instituto de Ciência, Tecnologia e Inovação - ICTIN/UFLA

Maio de 2025

- 1 Introdução
- 2 Técnicas de Resolução das Equações de Maxwell
- 3 Técnicas no Domínio da Frequência/ Técnicas no Domínio do Tempo
- 4 Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo - FDTD

Introdução

- As equações de Maxwell descrevem fenômenos elétricos e magnéticos em nível macroscópico;
- As leis do eletromagnetismo foram inicialmente formuladas por Gauss, Coulomb, Ampère e Faraday;
- James Clerk Maxwell reuniu essas leis e desenvolveu uma teoria eletromagnética completa. As equações ficaram conhecidas como as equações de Maxwell;
- Desde 1870, surgiram várias técnicas para resolver as equações de Maxwell com condições de contorno;
- Inicialmente, as soluções eram analíticas, limitadas a geometrias simples (retangulares, cilíndricas, esféricas).
- Para geometrias mais complexas, foi necessário o uso de métodos numéricos. O avanço dessas soluções foi possível com o advento dos computadores.



Equações de Maxwell

Os fenômenos eletromagnéticos são governados pelas equações de Maxwell, que formam o conjunto de equações diferenciais parciais apresentado abaixo:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{Lei de Faraday}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{Lei de Ampère-Maxwell}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad \text{Lei de Gauss}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{Lei de Gauss do magnetismo}$$

- \mathbf{E} : Campo elétrico (V/m);
- \mathbf{H} : Campo magnético (A/m);
- \mathbf{D} : Densidade de fluxo elétrico, ou indução elétrica (C/m^2);
- \mathbf{B} : Densidade de fluxo magnético, ou indução magnética (Wb/m^2);
- \mathbf{J} : Densidade de corrente elétrica (A/m^2);
- ρ_v : Densidade de carga elétrica volumétrica (C/m^3);

Relações Constitutivas

Características de materiais (relações constitutivas):

- Permeabilidade magnética, $\mu(H/m)$ $\mathbf{B} = [\mu]\mathbf{H}$
- Permissividade elétrica, $\epsilon(F/m)$ $\mathbf{D} = [\epsilon]\mathbf{E}$
- Condutividade elétrica, $\sigma(1/(\Omega.m))$ $\mathbf{J} = [\sigma]\mathbf{E}$

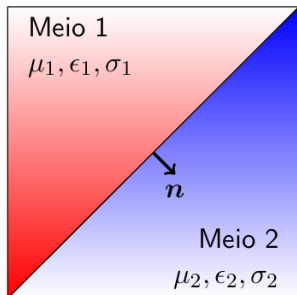
$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad \text{Material anisotrópico}$$

- Para materiais *isotrópicos*, os tensores $[k]$ se reduzem a escalares k .
- No vácuo, $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, $\epsilon = \epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c_0^2} = 8,854 \times 10^{-12}$, $\sigma = 0$
- As propriedades constitutivas podem ser dependentes do campo (*materiais não lineares*).
- Podem variar no espaço (*materiais não homogêneos*).
- A relação corrente / campo elétrico muitas vezes é escrita como:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_i \quad \mathbf{J}_i = \text{fonte impressa (controlada externamente)}$$

Condições de Interface

As equações de Maxwell são válidas nos *pontos ordinários* do domínio. Nos pontos ordinários as características do material são contínuas.



E o que acontece nos pontos não ordinários? Analisando os limites da forma integral das equações de Maxwell sobre as interfaces de descontinuidade (desconsiderando cargas ou correntes superficiais), conclui-se que:

- \mathbf{B} , \mathbf{D} e \mathbf{J} têm seus componentes normais contínuos na interface: $\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}$; $\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}$; $\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{n}$;
- \mathbf{E} e \mathbf{H} têm seus componentes tangenciais contínuos na interface: $\mathbf{H}_1 \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_2 \times \mathbf{n}$; $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_2 \times \mathbf{n}$;

Caso existam cargas superficiais, ρ_s , a equação para \mathbf{D} é alterada: $(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \rho_s$. Caso existam correntes superficiais, \mathbf{J}_s , a equação para \mathbf{H} é alterada: $(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \mathbf{n} = \mathbf{J}_s$.

Condições de Contorno

Que *condições de contorno* podem ser especificadas na fronteira do domínio? Tipicamente, podem ser especificadas condições sobre:

- As componentes normais de \mathbf{B} , \mathbf{D} e \mathbf{J} ;
- As componentes tangenciais de \mathbf{E} e \mathbf{H} ;

Exemplos:

1- Condições do tipo PEC: representam o efeito de um meio externo condutor perfeito ($\sigma \rightarrow \infty$). Pela lei de Ohm local, o campo elétrico deve ser nulo para que a densidade de corrente seja finita. Então: $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$.

2- Condições do tipo PMC: como não existem cargas magnéticas livres, uma superfície PMC (Perfect Magnetic Conductor) não aparece naturalmente. Porém, por dualidade, definimos uma superfície PMC impondo $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$. Um uso muito comum aparece na representação de planos de simetria e na magnetostática, na interface ferro-ar, onde a indução magnética é praticamente normal à superfície.

3- Condições de Silver-Muller: As fontes dos campos eletromagnéticos do mundo real são localizadas (não nulas apenas numa região limitada)

se as fontes não irradiam
(cargas em repouso, correntes estacionárias) \implies os campos devem ser nulos $r \rightarrow \infty$

se as fontes emitem
radiação eletromagnética
(cargas aceleradas, correntes variáveis no tempo) \implies os campos devem satisfazer as condições de radiação $r \rightarrow \infty$

A grandes distâncias, os campos das ondas eletromagnéticas se comportam de acordo com a condição de Silver-Muller

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\sqrt{\mu} \mathbf{H} \times \mathbf{r} - r \sqrt{\epsilon} \mathbf{E}) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} (\sqrt{\epsilon} \mathbf{E} \times \mathbf{r} + r \sqrt{\mu} \mathbf{H}) = 0$$

Estas condições são para os campos de ondas progressivas, aquelas se afastam de suas fontes geradoras.

Condições de Contorno

Em modelos numéricos, queremos simular o efeitos destas condições sobre superfícies próximas às fontes. Como primeira aproximação, pode-se tentar usar as próprias condições de Silver-Muller. Neste caso, elas são reescritas como

$$r (\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{r}} - \eta^{-1} \mathbf{E}) = 0$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} - \eta \mathbf{n} \times (\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}}) = 0$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} - \eta \mathbf{H}_T = 0$$

onde $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ é a impedância intrínseca do meio

$$\text{e } \mathbf{H}_T = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}})$$

ou alternativamente,

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} + \eta^{-1} \mathbf{E}_T = 0 \quad \text{onde } \mathbf{E}_T = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}})$$

Outros tipos de condições absorventes serão estudados posteriormente

Técnicas de Resolução das Equações de Maxwell

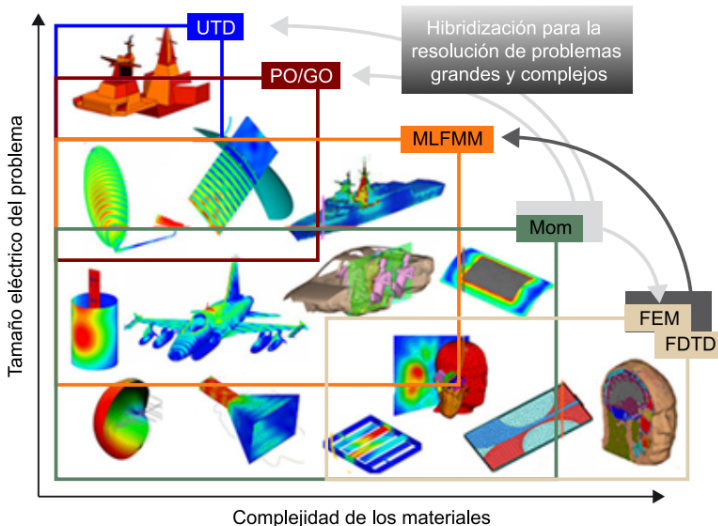
Analisar problemas eletromagnéticos é difícil em ambientes complexos com objetos de formas arbitrárias. A forma mais geral de análise é por meio de modelos de espalhamento (*scattering*):

- Considera-se que o objeto está num meio dielétrico e é atingido por uma onda eletromagnética. As correntes e cargas geradas no objeto causam uma onda espalhada.

Diversos métodos numéricos são utilizados atualmente para simular esse fenômeno:

- MoM (Método dos Momentos) – *Method of Moments*;
- FDTD (Diferenças Finitas no Domínio do Tempo) – *Finite Difference Time Domain*;
- FEM (Método dos Elementos Finitos) – *Finite Element Method*.

Classificação de diferentes métodos numéricos de acordo com seu âmbito de trabalho



UTD: Teoría uniforme de la difracción (*uniform theory of diffraction*); PO/GP: Óptica física/óptica geométrica (*physical optics/geometrical optics*); MLFMM: Método multipolo multinivel (*multi-level fast multi-pole method*); MoM: Método de los momentos (*method of moments*); FEM: Método de los elementos finitos (*finite element method*); FDTD: Método del dominio temporal de las diferencias finitas (*finite difference time domain*).

Técnicas de Resolução das Equações de Maxwell

Método FDTD:

- Vantagem: A discretização é flexível para modelar estruturas com formas arbitrárias.
- Desvantagem: A interação entre objetos muito separados no espaço exige muitas células. Isso aumenta o uso de memória e o tempo de computação.

Método de Equação Integral (IE) com o Método dos Momentos (MoM):

- Vantagem: ideal para analisar grandes regiões com alta eficiência (Reduz a complexidade do problema).
- Desvantagem: requer análise específica para cada estrutura, dificultando aplicações em geometrias complexas.

Em resumo:

- FDTD: melhor para meios complexos (ex: corpo humano).
- MoM: mais eficaz em meios condutores e problemas grandes (ex: antenas em aviões, carros, barcos).
- Métodos híbridos (como UTD): usados quando o problema é eletricamente muito grande.

Baseiam-se na resolução do problema para cada frequência que se deseja analisar. Geralmente, esses métodos resultam em uma série de equações lineares resolvidas por meio da inversão de matrizes, como no Método dos Momentos (MoM). Ao aplicar esses métodos em meios não homogêneos e complexos, como órgãos do corpo humano, surgem dois desafios:

- Caracterização de meios complexos: Exige a derivação de equações específicas para cada meio, o que pode ser trabalhoso.
- Exigências computacionais: Para alta precisão, é necessária uma matriz de grandes dimensões, cuja inversão demanda alto processamento e memória, tornando o método computacionalmente intensivo.

Definição do método FDTD:

- Técnica do domínio temporal que utiliza diferenças finitas dependentes do tempo para resolver as equações de Maxwell.
- Caso particular do método de diferenças finitas, padrão para resolver equações diferenciais parciais (EDP).

Vantagens em relação aos métodos de domínio frequencial:

- **Facilidade de implementação em meios complexos:** As propriedades dielétricas podem ser atribuídas ponto a ponto na malha.
- **Ampla faixa de frequência em uma única simulação:** Usa um sinal temporal com alto conteúdo espectral para obter informações em larga banda.

Desvantagens:

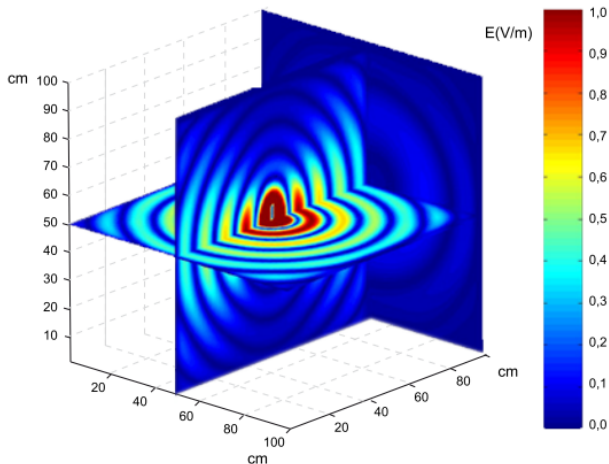
- **Necessidade de malhamento:** Requer discretização da estrutura e do volume ao seu redor.
- **Tempo computacional elevado:** Simulações demandam grande tempo de execução.

- Baseia-se em diferenças finitas e incrementos de tempo para calcular a intensidade do campo em cada ponto do espaço e em cada instante de tempo. Permitindo uma análise temporal detalhada do fenômeno eletromagnético com uma interpretação física mais intuitiva. Opera sobre um domínio de simulação específico, discretizado no espaço e no tempo.
- Capaz de modelar geometrias e materiais diversos (condutores, dielétricos, materiais magnéticos, tecidos biológicos, etc.) e cenários de incidência complexos, incluindo estruturas arbitrárias e materiais com perdas ou dispersão, que seriam difíceis de tratar analiticamente ou com outros métodos numéricos.
- **Eficiência Espectral:** Obtém resultados em amplo espectro de frequências com um único cálculo, usando pulsos de banda larga e pós-processamento por FFT (Transformada Rápida de Fourier).
- **Método de Onda Completa:** Não faz aproximações além da discretização das derivadas espaciais/temporais por diferenças finitas, preservando a precisão física.

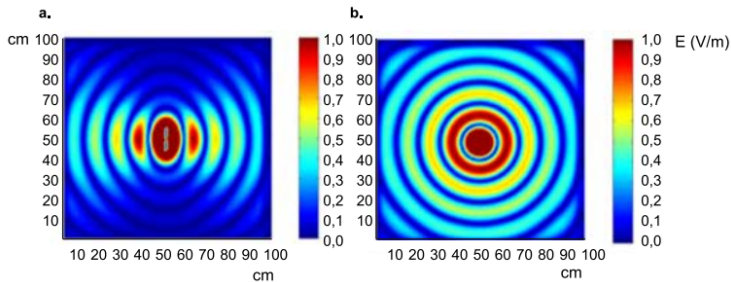
- Necessidade de malhar não só a estrutura, mas também seu entorno, aumentando memória e tempo de processamento.
- Exige condições de contorno absorventes (ABC) para simular radiação no infinito.
- Dificuldade em modelar contornos curvos com precisão (solução possível com aproximação escalonada).
- Implementação de fontes radiantes e transformações de campo próximo para campo distante.
- Custo computacional alto, mas mitigado pelo avanço tecnológico.

- Compatibilidade Eletromagnética (EMC).
- Problemas de Espalhamento Eletromagnético.
- Interação com o Corpo Humano: Simulação do efeito de antenas de celulares e linhas de alta tensão no organismo humano (BioEM).
- Antenas microstrip, Influência de radomes (cúpulas protetoras) em antenas, Antenas sobre planos ou substratos finitos.
- Propagação em Fibras Ópticas.
- Circuitos de Microondas.

FDTD-3D aplicado a um dipolo de meia onda



FDTD-3D aplicado a um dipolo de meia onda



Equações de Maxwell para FDTD

As equações básicas do FDTD para as equações de Maxwell baseiam-se exclusivamente nas equações (1) e (2), as quais podem ser reescritas por:

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma^e \vec{E} + \vec{J}_i$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \sigma^m \vec{H} - \vec{M}_i$$

em que: $\vec{J} = \sigma^e \vec{E} + \vec{J}_i$ e $\vec{M} = \sigma^m \vec{H} + \vec{M}_i$.

As quais podem ser expressas por:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{H} - \frac{1}{\epsilon} (\sigma^e \vec{E} + \vec{J}_i)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} - \frac{1}{\mu} (\sigma^m \vec{H} + \vec{M}_i)$$

Equações de Maxwell para FDTD

As equações anteriores são compostas por duas equações vetoriais, as quais podem ser decompostas em três equações escalares em 3D. Assim, as equações de Maxwell podem ser representadas pelas seis expressões a seguir no sistema Cartesiano (x,y,z):

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_x} \left[\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma_x^e E_x - J_{i_x} \right]$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_y} \left[\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma_y^e E_y - J_{i_y} \right]$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_z} \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma_z^e E_z - J_{i_z} \right]$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu_x} \left[\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \sigma_x^m H_x - M_{i_x} \right]$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu_y} \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \sigma_y^m H_y - M_{i_y} \right]$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \sigma_z^m H_z - M_{i_z} \right]$$

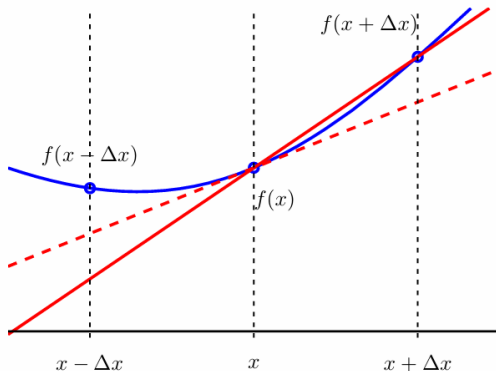
Equações de Maxwell para FDTD

- Os parâmetros ε_x , ε_y e ε_z são associados aos componentes do campo elétrico E_x , E_y e E_z por meio das relações constitutivas $D_x = \varepsilon_x E_x$, $D_y = \varepsilon_y E_y$ e $D_z = \varepsilon_z E_z$, respectivamente. De maneira similar, os parâmetros μ_x , μ_y e μ_z são associados aos componentes do campo magnético H_x , H_y e H_z .
- Decomposições similares podem ser obtidas para outros sistemas ortogonais de coordenadas.
- O algoritmo do FDTD (algoritmo de Yee) divide a geometria do problema em uma malha discretizada, sobre a qual os componentes do campo elétrico e magnético são posicionados, e resolve as equações de Maxwell no tempo (em intervalos discretos de tempo).
- Isso pode ser obtido a partir da aproximação das derivadas espaciais e temporais nas equações de Maxwell por diferenças finitas.
Posteriormente, obtém-se um conjunto de equações que calcula os valores de campo em um instante futuro a partir de valores de campo em instantes passados.

Cálculo de derivadas de funções por diferenças finitas

Considere uma função contínua $f(\cdot)$. A expressão da derivada de $f(x)$ no ponto x (diferença positiva) pode ser escrita como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Como $\Delta x \neq 0$, a derivada de $f(x)$ pode ser aproximada por:

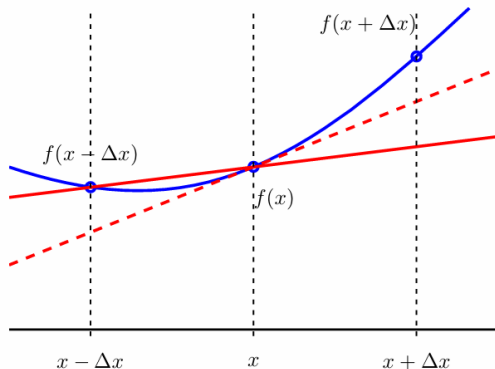
$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

A derivada de $f(x)$ é a inclinação da curva vermelha tracejada da Fig. anterior.

Cálculo de derivadas de funções por diferenças finitas

Outra maneira de calcular $f'(x)$ consiste em usar diferença negativa, que resulta em:

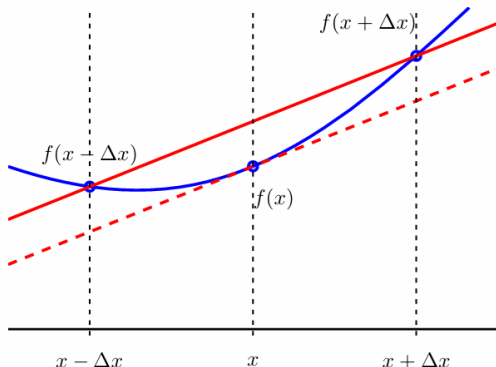
$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$$



Cálculo de derivadas de funções por diferenças finitas

Finalmente, pode-se também obter $f'(x)$ calculando-se a média dos resultados anteriores:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$



- Uma análise cuidadosa das Figs. anteriores indica que as três maneiras de se calcular $f'(x)$ resultam em erros.
- A magnitude (ordem) do erro do cálculo de $f'(x)$ pode ser obtida analiticamente usando a expansão em série de Taylor para $f(\cdot)$.

Cálculo de derivadas de funções por diferenças finitas

A expansão em série de Taylor para $f(x + \Delta x)$ pode ser expressa por:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f''(x) + \frac{(\Delta x)^3}{6} f'''(x) + \dots$$

a qual pode ser rearranjada para obter $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)}{2} f''(x) - \frac{(\Delta x)^2}{6} f'''(x) - \dots$$

que pode ser expressa por:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

em que $O(\Delta x)$ representa o termo do erro.

Analisando a expressão, pode-se concluir:

- O termo mais significativo em $O(\Delta x)$ é $\Delta x/2$ e a ordem de Δx neste termo mais significativo é 1.
- Portanto, a aproximação da função por diferença positiva possui precisão de primeira ordem.
- A interpretação da precisão de primeira ordem é que o termo mais significativo no erro introduzido pela aproximação é proporcional a discretização (Δx). Se a discretização (Δx) for reduzida a metade, o erro também se reduz a metade.

Cálculo de derivadas de funções por diferenças finitas

De maneira similar, a expansão em série de Taylor para $f(x - \Delta x)$ pode ser expressa por:

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f''(x) - \frac{(\Delta x)^3}{6} f'''(x) + \dots$$

a qual pode ser rearranjada para obter $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)}{2} f''(x) - \frac{(\Delta x)^2}{6} f'''(x) + \dots$$

que pode ser expressa por:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

A diferença entre a expansão em série de Taylor para $f(x + \Delta x)$ e $f(x - \Delta x)$ pode ser expressa por:

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2\Delta x f'(x) + \frac{2(\Delta x)^3}{6} f'''(x) + \dots$$

a qual pode ser rearranjada para obter $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} - \frac{2(\Delta x)^2}{6} f'''(x) + \dots$$

que pode ser expressa por:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2)$$

Analisando a expressão, pode-se concluir:

- O termo mais significativo em $O((\Delta x)^2)$ é $(\Delta x)^2/3$ e a ordem de Δx neste termo mais significativo é 2.
- Portanto, a aproximação da função por diferença central possui precisão de segunda ordem.
- A interpretação da precisão de segunda ordem é que o termo mais significativo no erro introduzido pela aproximação é proporcional a discretização $((\Delta x)^2)$. Se a discretização (Δx) for reduzida a metade, o erro se reduz por um fator 4.

Em resumo:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

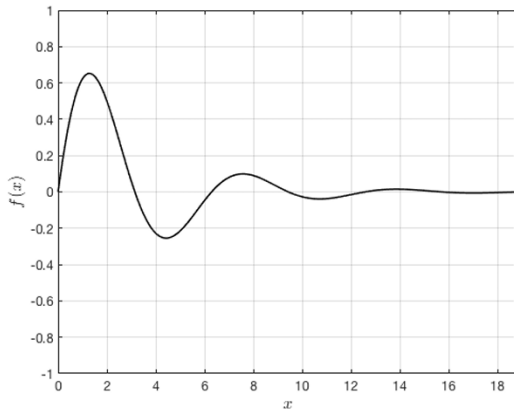
$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2)$$

Cálculo de derivadas de funções por diferenças finitas

Exemplo

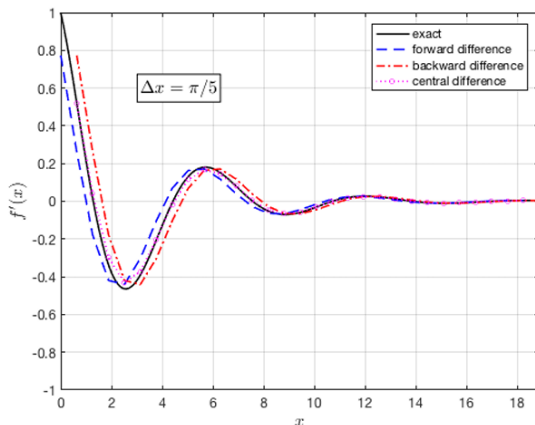
Exemplo: considere a função $f(x) = \sin(x)e^{-0.3x}$, ilustrada a seguir:



Cálculo de derivadas de funções por diferenças finitas

Exemplo

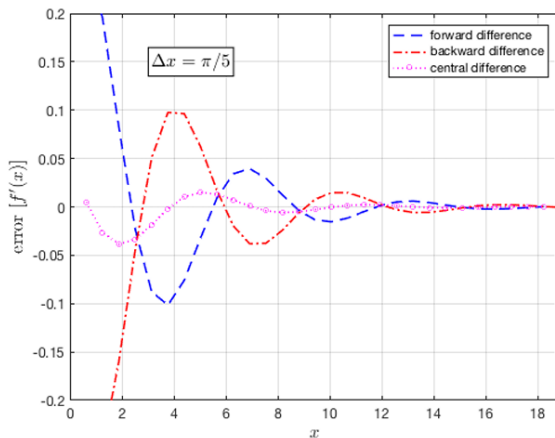
O gráfico de $f'(x)$, usando as aproximações obtidas anteriormente, é ilustrado a seguir:



Cálculo de derivadas de funções por diferenças finitas

Exemplo

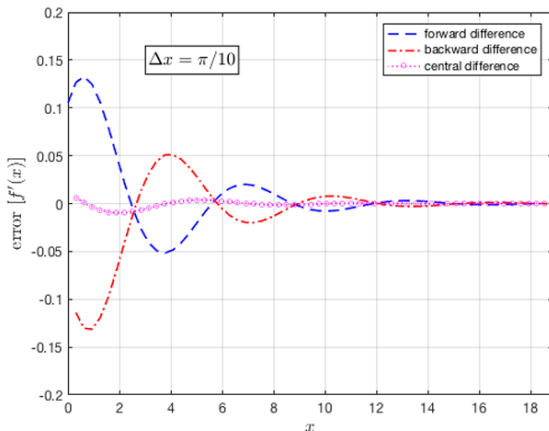
O erro de $f'(x)$ para $\Delta x = \pi/5$, usando as aproximações obtidas anteriormente, é ilustrado a seguir:



Cálculo de derivadas de funções por diferenças finitas

Exemplo

O erro de $f'(x)$ para $\Delta x = \pi/10$, usando as aproximações obtidas anteriormente, é ilustrado a seguir:



As equações de diferenças finitas para as equações de Maxwell no domínio do tempo foram propostas por Yee em 1966. Em resumo:

- As equações de Maxwell são representadas na forma discreta, tanto no espaço quanto no tempo, empregando derivada por diferença central;
- Os componentes do campo elétrico e magnético são calculados em posições discretas tanto no espaço quanto no tempo;

Equações FDTD

O método FDTD supõe um domínio 3D fechado o qual é subdividido em N células:

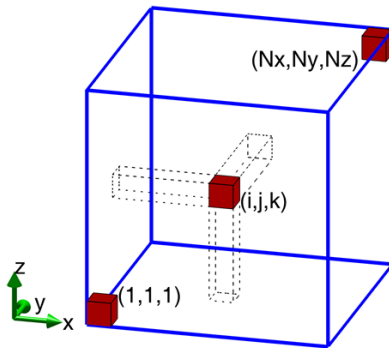
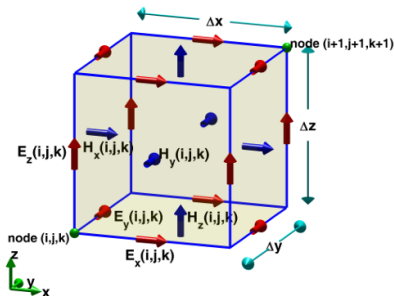


Figura: Domínio computacional FDTD composto por $(N_x \times N_y \times N_z)$ células de Yee)

Equações FDTD

Yee propôs uma relação geométrica para os componentes dos campos \vec{E} e \vec{H} em um cubo, representando, dessa maneira, a forma integral e diferencial das equações de Maxwell.



- cada componente do campo magnético (azul) é circundado por quatro componentes do campo elétrico (vermelho), simulando a lei de Faraday;
- cada componente do campo elétrico (vermelho) é circundado por quatro componentes do campo magnético (azul), simulando a lei de Ampère.

Figura: Cubo de Yee

O algoritmo FDTD amostra e calcula os campos \vec{E} e \vec{H} em instantes discretos de tempo; entretanto, os componentes dos campo elétrico e magnético não são amostrados nos mesmos instantes de tempo. Para um período Δt :

- os componentes do campo elétrico são amostrados em instantes $0t, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t$;
- os componentes do campo magnético são amostrados em instantes $1/2t, (1+1/2)\Delta t, \dots, (n+1/2)\Delta t, \dots$;

Os componentes de campo precisam ser referenciados tanto pelos índices espaciais, que indicam suas posições no espaço, quanto por seus índices temporais, os quais indicam seus instantes de tempo:

- o componente z do vetor campo elétrico posicionado em $((i-1)\Delta x, (j-1)\Delta y, (k-0.5)\Delta z)$ e amostrado no instante de tempo $n\Delta t$ é referenciado como: $E_z^n(i, j, k)$

Equações FDTD

As propriedades dos meios materiais (permissividade, permeabilidade e condutividade elétrica e magnética) são distribuídas na malha FDTD e associadas aos componentes de campo:

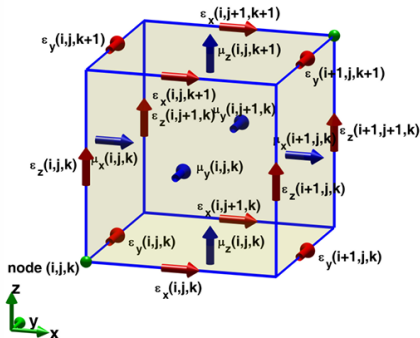


Figura: Parâmetros materiais indexados a célula de Yee

Consideremos agora as equações de Maxwell na forma escalar, as quais podem ser expressas em termos de diferenças finitas. Vamos iniciar com:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_x} \left[\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma_x^e E_x - J_{i_x} \right]$$

Usando diferenças finitas em $\partial E_x / \partial t$, e a partir da Fig. anterior, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{E_x^{n+1}(i,j,k) - E_x^n(i,j,k)}{\Delta t} = & \frac{1}{\varepsilon_x(i,j,k)} \frac{H_z^{n+1/2}(i,j,k) - H_z^{n+1/2}(i,j-1,k)}{\Delta y} \\ & - \frac{1}{\varepsilon_x(i,j,k)} \frac{H_y^{n+1/2}(i,j,k) - H_y^{n+1/2}(i,j,k-1)}{\Delta z} \\ & - \frac{\sigma_x^e(i,j,k)}{\varepsilon_x(i,j,k)} E_x^{n+1/2}(i,j,k) - \frac{1}{\varepsilon_x(i,j,k)} J_{ix}^{n+1/2}(i,j,k) \end{aligned}$$

A estabilidade numérica do método FDTD é determinada pela condição de Courant-Friedrich-Levy (CFL), a qual estabelece que:

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}}$$

onde c é a velocidade da luz no espaço livre. A equação anterior pode ser reescrita como:

$$c \Delta t \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}} \leq 1$$

Para malhas regulares onde $\Delta x = \Delta y = \Delta z$, tem-se:

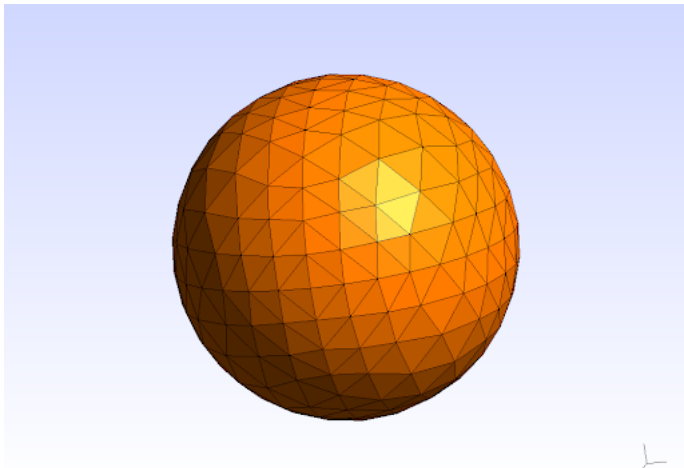
$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c\sqrt{3}}$$

Para o caso 1D, tem-se:

$$\Delta t \leq \Delta x/c$$

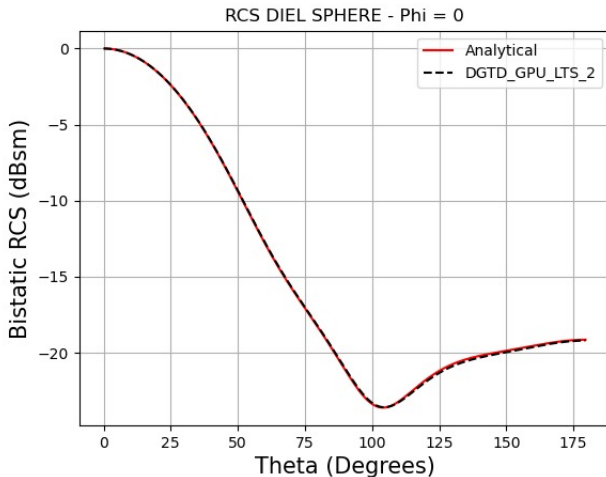
Problema Espalhamento - Esfera

Discretização com outro método numérico



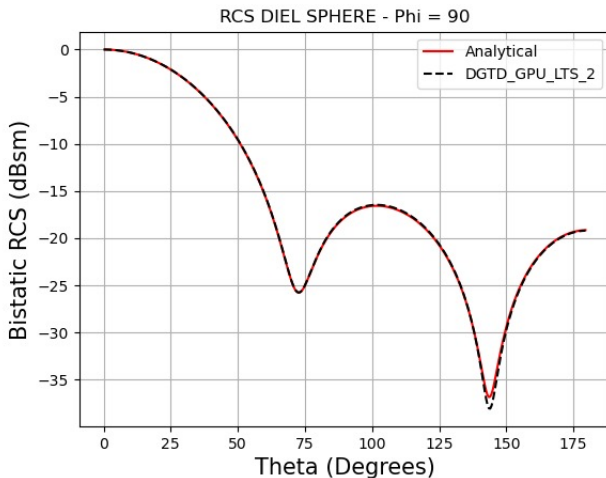
Problema Espalhamento - Esfera

Resultados RCS com outro método numérico



Problema Espalhamento - Esfera

Resultados RCS com outro método numérico



Este material foi elaborado com base nas seguintes referências:

- Anguera, J. , Andújar, A. *Métodos Numéricos para la resolución de las ecuaciones de Maxwell*. Universitat Oberta de Catalunya (UOC), 2014.
- Mesquita, R. , Da Silva, E. *Métodos de Elementos Finitos* (Notas de Aula). Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG).
- Ramírez, J. *Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo - FDTD* (Notas de Aula). Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG).
- Elsherbeni, A. , Demir, V. , *The Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetics with MATLAB Simulations*. ACES, 2nd Ed., 2015.
- Lizarazo, M. *Parallel-gpu Dgtd Method With A Third-order Local Time Stepping Scheme*, Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), 2025.

Diego Andrés Parada Rozo



🌐 Nacionalidade: Colombiano

🎂 Setembro 14, 1992

✉ diego.rozo@ufla.br

● [Currículo Lattes](#)

[in](#) [Perfil do LinkedIn](#)