IT 308 D – TOPICOS EM TECNICAS DE ALTA TENSÀO II.

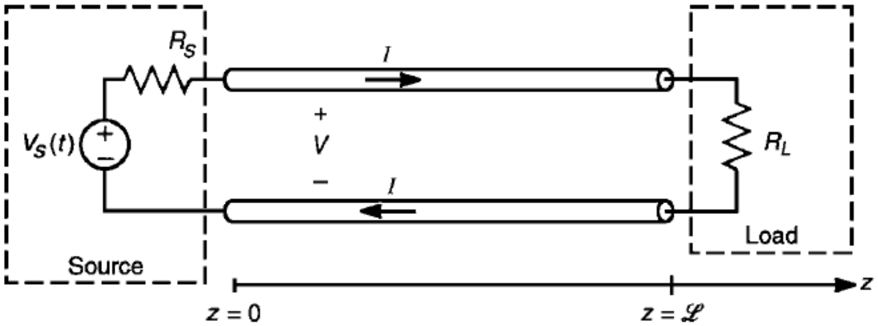
Prof. José Pissolato Filho

Campinas, março 2020

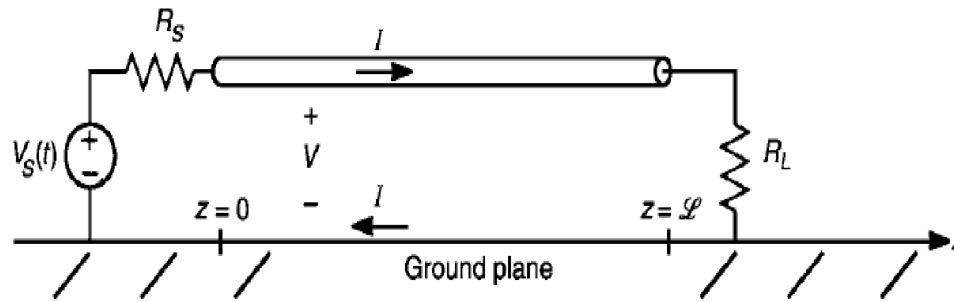
CHAPTER FOUR

Transmission Lines

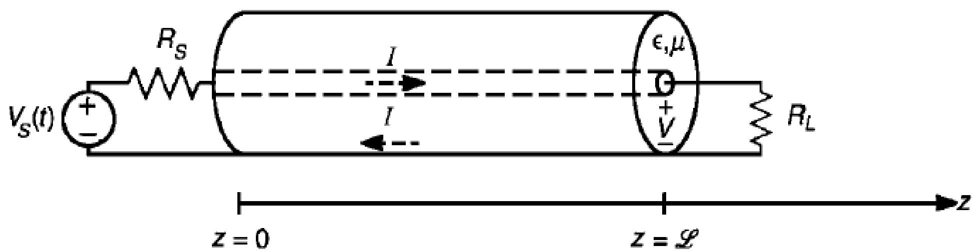
⇒ **Típico condutor utilizado em linhas de transmissão.**



(a)



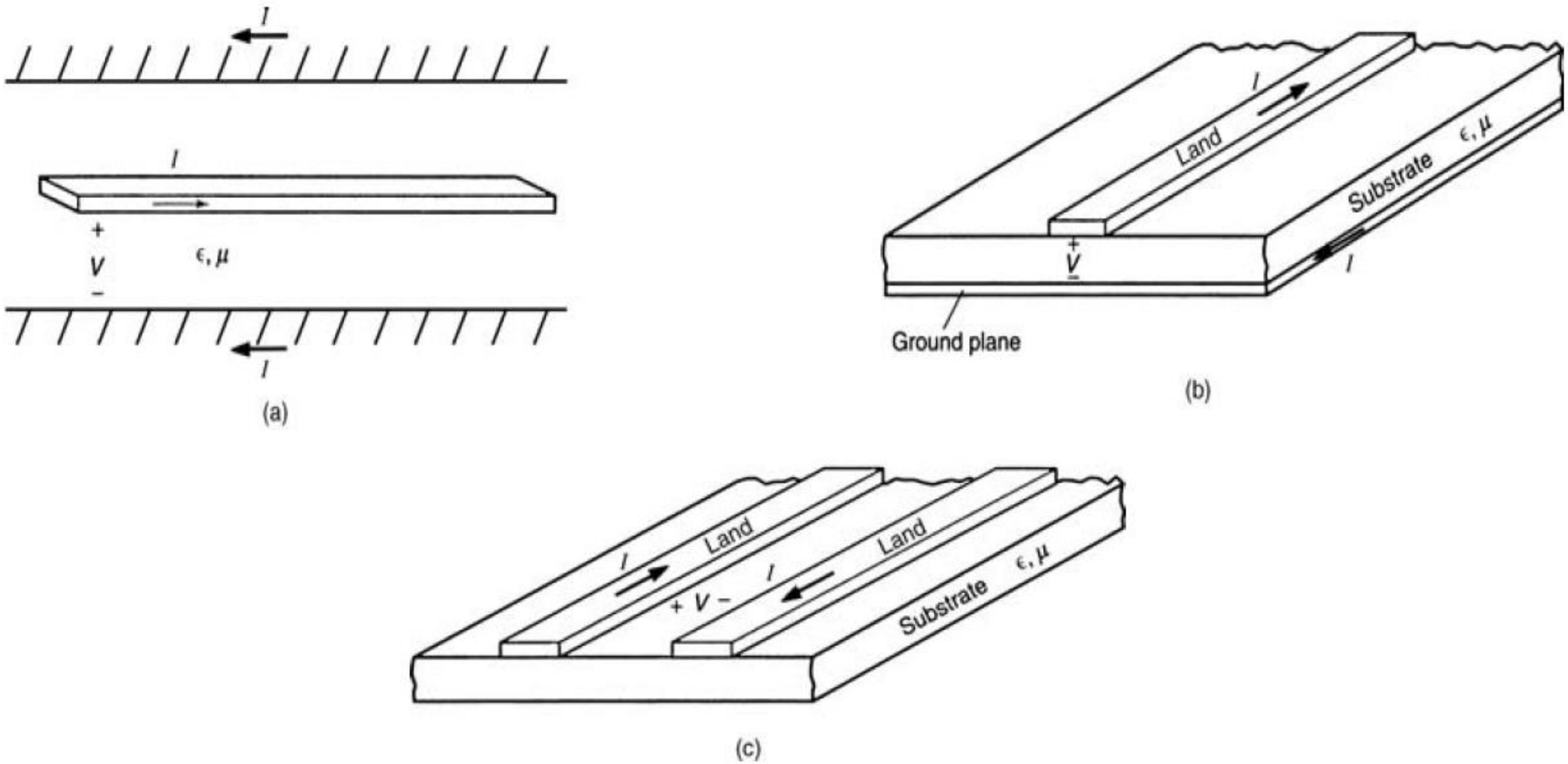
(b)



(c)

⇒ (a) 2 condutores / (b) 1 condutor sobre o solo infinito / (c) cabo coaxial

⇒ **Típico circuito impresso.**



⇒ (a) linha de microfita / (b) microfita / (c) PCB

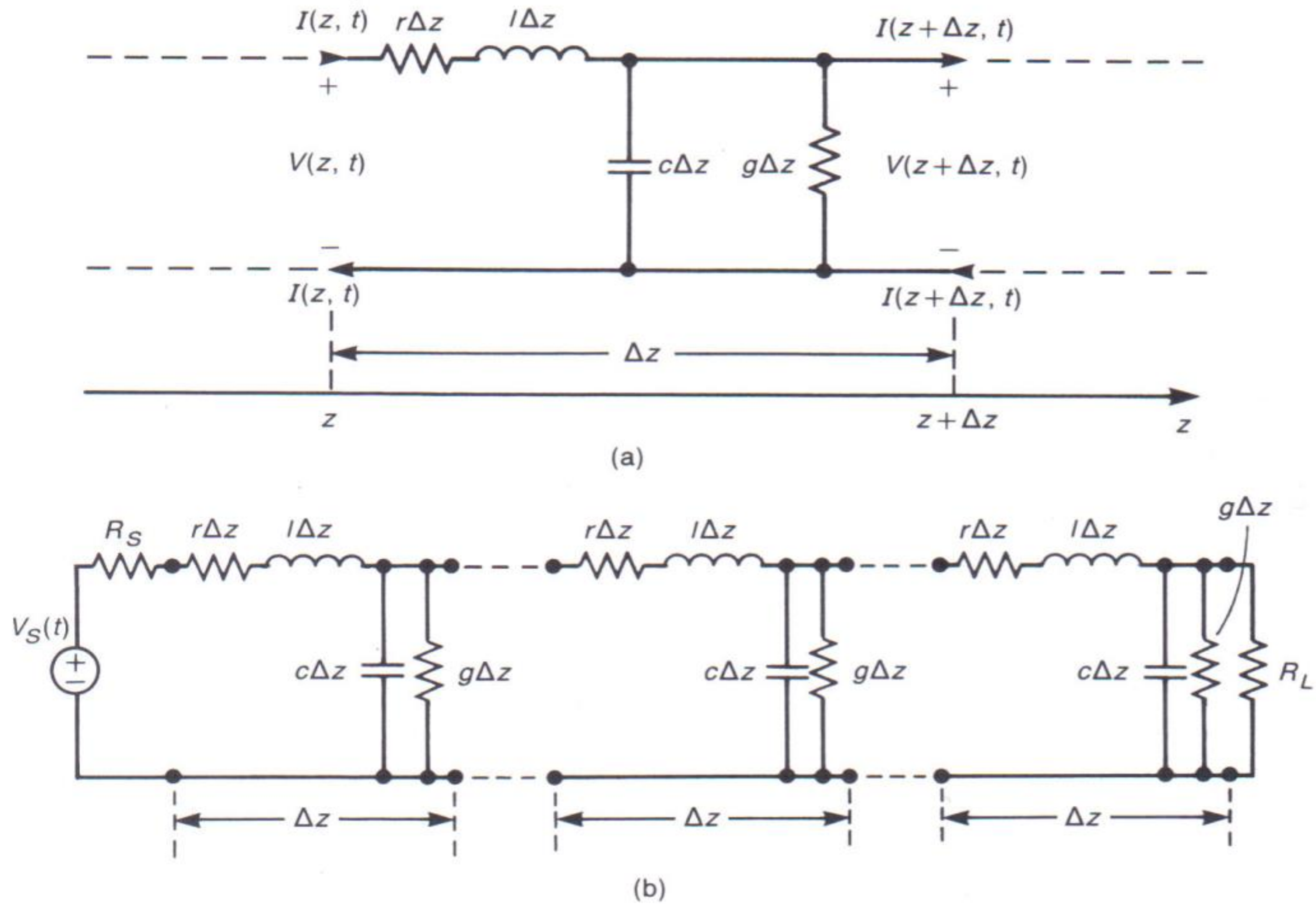


FIGURE 4.3 The per-unit-length equivalent circuit of a two-conductor line for the TEM mode of propagation: (a) the equivalent circuit for a Δz section; (b) modeling the entire line as a cascade of Δz sections from which the transmission line equations are derived in the limit as $\Delta z \to 0$.

⇒ **Introdução**

⇒ Uma linha de transmissão é um meio de propagação de sinais elétricos.

⇒ Pode ser constituída por:

⇒ Dois condutores paralelos
⇒ Duas placas paralelas
⇒ Dois condutores coaxiais

⇒ De maneira geral pode ser constituída por dois condutores separados por um dielétrico.

⇒ **Introdução**

⇒ A análise do comportamento de uma linha de transmissão pode ser feita de maneira rigorosa através da teoria eletromagnética.

⇒ Aqui, no entanto, seguiremos um caminho alternativo, empregando o método tradicional baseado na teoria de circuitos de elementos distribuídos.

⇒ **Introdução**

⇒ Seção infinitesimal de uma linha de transmissão.

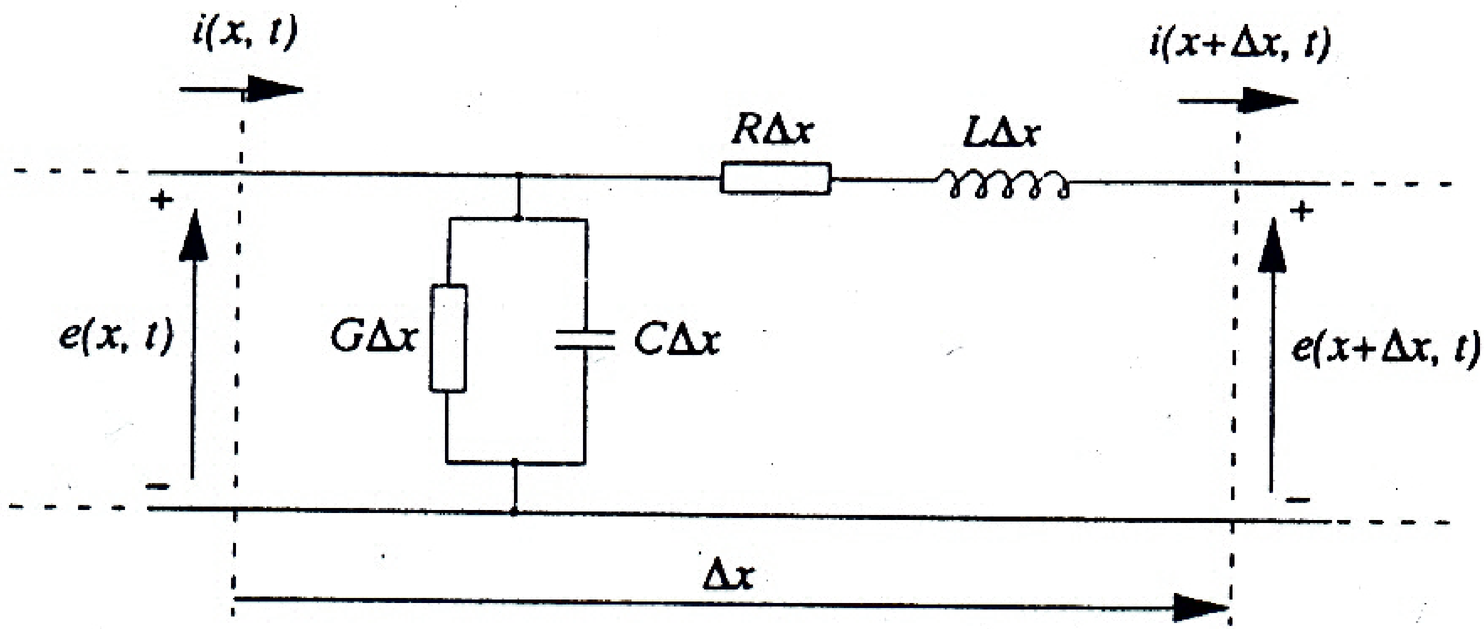


Fig.1 - Linha de transmissão uniforme.

⇒ **Introdução**

⇒ Onde:

⇒ R= Resistência série da linha por unidade de comprimento [Ω/m]

⇒ L= Indutância série da linha por unidade de comprimento [H/m]

⇒ C= Capacitância paralela da linha por unidade de comprimento [F/m]

⇒ G= Condutância paralela da linha por unidade de comprimento [S/m]

$\Rightarrow$ **Introdução**

$\Rightarrow$ Aplicando a lei das malhas de Kirchhoff ao circuito:

$$e(x,t) = R\Delta x \ . \ i(x+\Delta x,t) + L\Delta x \ . \frac{\partial i}{\partial t}(x+\Delta x,t) + e(x+\Delta x,t) \qquad (1)$$

$\Rightarrow$ onde e(x,t) e i(x,t) são as variáveis dependentes mais usuais e “x” e “t” são as variáveis independentes (espaço e tempo).

$\Rightarrow$ Dividindo (1) por Δx e rearrajando os termos, temos:

$$\left[R + L\frac{\partial}{\partial t}\right] i(x+\Delta x,t) = -\ \frac{e(x+\Delta x,t) - e(x,t)}{\Delta x} \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ **Introdução**

$\Rightarrow$ Vejamos agora, a lei dos nós de Kirchhoff:

$$i(x+\Delta x,t) = i(x,t) - G\Delta x \;.\; e(x,t) - C\Delta x \;.\; \frac{\partial}{\partial t}\, e(x,t) \qquad (3)$$

$\Rightarrow$ Substituindo (3) em (2), tem-se:

$$\left[R + L\,\frac{\partial}{\partial t}\right]\left[i(x,t) - G.\Delta x\, e(x,t) - C\Delta x \frac{\partial}{\partial t} e(x,t)\right] = -\,\frac{e(x+\Delta x,t) - e(x,t)}{\Delta x} \qquad (4)$$

⇒ **Introdução**

⇒ O modelo assumido fica mais próximo da situação real à medida que Δx tende a zero. Aplicando o limite na eq.(4), para $\Delta x \rightarrow 0$, tem-se:

$$\boxed{\left[R + L\,\frac{\partial}{\partial t}\right] i(x,t) = -\,\frac{\partial}{\partial x}\,e(x,t)} \qquad (5)$$

⇒ É importante observar que o 2° membro de (4) dá origem ao negativo da derivada parcial da tensão e(x,t) na linha em relação a x.

⇒ **Introdução**

⇒ Reescrevendo a eq.(3) numa forma mais apropriada e dividindo por Δx, obtém-se:

$$\left[G + C\ \frac{\partial}{\partial t}\right] e(x,t) = -\ \frac{i(x+\Delta x, t) - i(x,t)}{\Delta x} \qquad (6)$$

⇒ Fazendo o limite de (6) quando Δx → 0, tem-se:

$$\boxed{\left[G + C\ \frac{\partial}{\partial t}\right] e(x,t) = -\ \frac{\partial}{\partial x}\ i(x,t)} \qquad (7)$$

⇒A eq.(5) indica que há **queda de tensão** com a distância x na linha pela passagem da corrente nos elementos R e L em série na linha.

$$\boxed{\left[R + L\,\frac{\partial}{\partial t}\right] i(x,t) = -\,\frac{\partial}{\partial x}\, e(x,t)}$$

⇒A eq.(7) mostra que há **queda de corrente** com a distância x na linha devido à existência de tensão nos elementos paralelos (de fuga) da linha, ou seja G e C. São correntes que retornam antes do sinal no fim da linha.

$$\boxed{\left[G + C\,\frac{\partial}{\partial t}\right] e(x,t) = -\,\frac{\partial}{\partial x}\, i(x,t)}$$

Equações diferenciais da linha expressas somente em função da tensão ou somente em função da corrente

$\Rightarrow$Diferenciando-se a eq.(5) em relação a x, e a eq.(7) em relação a t, para eliminar a corrente.

$$\boxed{\left[R + L\,\frac{\partial}{\partial t}\right] i(x,t) = -\,\frac{\partial}{\partial x}\,e(x,t)}$$

$$R\,\frac{\partial}{\partial x} i(x,t) + L\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} i(x,t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} e(x,t) \qquad (8)$$

$$\boxed{\left[G + C\,\frac{\partial}{\partial t}\right] e(x,t) = -\,\frac{\partial}{\partial x}\,i(x,t)}$$

$$G\,\frac{\partial}{\partial t} e(x,t) + C\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} e(x,t) = -\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\,i(x,t) \qquad (9)$$

Equações diferenciais da linha expressas somente em função da tensão ou somente em função da corrente

⇒Substituindo-se (9) em (8) e utilizando para o 1º termo de corrente de (8) o seu valor em tensão fornecido pela eq. (7), temos:

$$-RGe(x,t) - RC\frac{\partial}{\partial t}e(x,t) - LG\frac{\partial}{\partial t}e(x,t) - LC\frac{\partial^2}{\partial t^2}e(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}e(x,t) = 0 \quad (10)$$

⇒Rearranjando (10) e omitindo a dependência (x,t) para uma melhor visualização, temos:

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - (RC + LG)\frac{\partial e}{\partial t} - RG \cdot e = 0 \quad (11)$$

$\Rightarrow$ **Equações diferenciais da linha expressas somente em função da tensão ou somente em função da corrente**

$\Rightarrow$ De forma análoga, pode-se obter uma eq. diferencial parcial só em função da corrente, diferenciando-se (5) em relação a t e e (7) em relação a x. O resultado é :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - LC\,\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - (RC + LG)\,\frac{\partial i}{\partial t} - RG\,.\,i = 0 \qquad (12)$$

$\Rightarrow$ As eqs. (11) e (12) são conhecidas como equações diferenciais parciais de onda.

Linha não dissipativa ideal ou sem perdas

⇒Nessa condição temos: R = G = 0

⇒Neste caso, as eqs. (11) e (12) se simplificam para:

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, e(x,t) = LC\, \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, e(x,t)} \tag{13}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, i(x,t) = LC\, \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, i(x,t)} \tag{14}$$

$\Rightarrow$ Verifiquemos que uma solução para a eq. (13) é:

$$e(x,t) = f_1(t - \sqrt{LC}\ x) \qquad (15)$$

$\Rightarrow$ Onde f_1 é qualquer função unívoca do argumento $(t - \sqrt{LC}\ x)$. Além disso f_1 tem dimensão de tensão (dada em volts, no sistema internacional).

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, e(x,t) = LC\, \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, e(x,t)}$$

Linha não dissipativa ideal/sem perdas

$\Rightarrow$Vejamos se a eq. (15) é uma solução da eq. (13).

$$\frac{\partial}{\partial x}\, e(x,t) = -\sqrt{LC}\;\; f_1^{'}(t - \sqrt{LC}\; x) \qquad (16)$$

$\Rightarrow$onde f'$_1$ significa a derivada de f$_1$ em relação ao argumento composto $t - \sqrt{LC}.x$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, e(x,t) = LC\;\; f_1^{''}\;(t - \sqrt{LC}\; x) \qquad (17)$$

$\Rightarrow$que é o 1º membro da eq. (13).

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e(x,t) = LC \;\; f_1^{''} \;(t - \sqrt{LC}\, x)$$

$\Rightarrow$O 2º membro da eq. (13) fica:

$$LC \; \frac{\partial^2}{\partial t^2} \; e(x,t) \; = \; LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} \; f_1(t - \sqrt{LC}\; x) = LC f_1^{''}(t - \sqrt{LC}\; x) \qquad (18)$$

$\Rightarrow$Comparando (17) com (18), observa-se que a expressão (15) é realmente uma solução para a eq. (13).

$\Rightarrow$ $e(x,t) = f\,(t - \sqrt{LC}\; x)$ corresponde a uma onda de tensão propagando-se para a direita (na direita de x crescente).

$\Rightarrow$ **Linha não dissipativa ideal ou sem perdas**

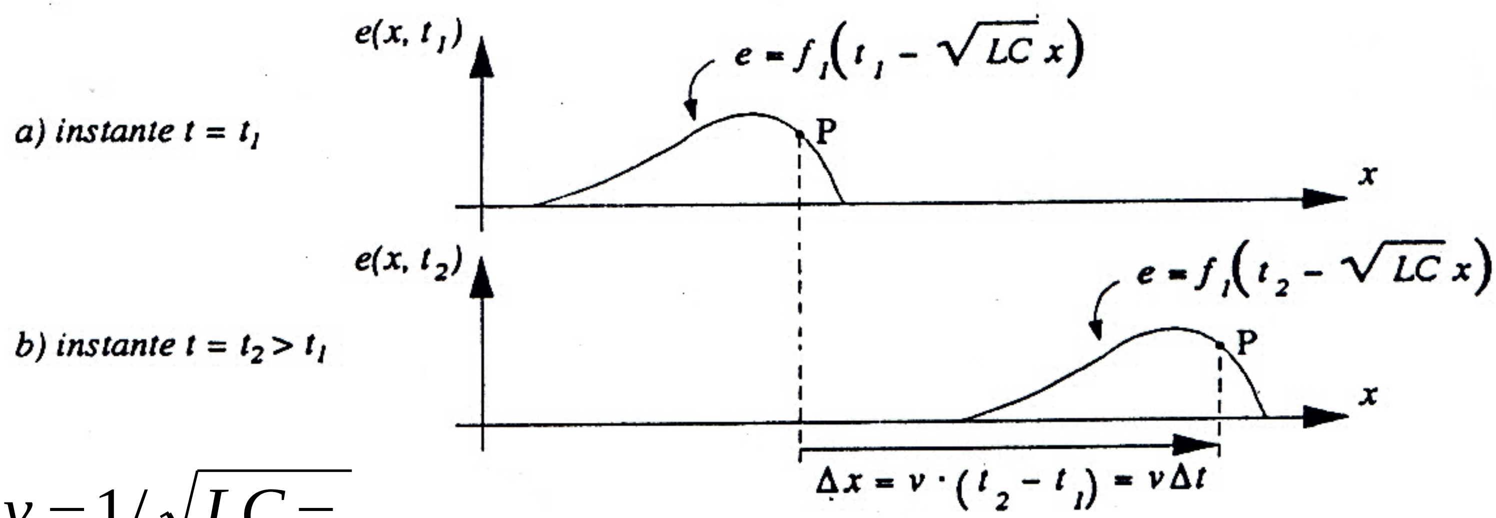
$\Rightarrow$ A função f_1 é a forma de onda que se propaga e tem a ver, na verdade, com o sinal que foi injetado na linha. Note que para x = 0 a eq.(15) fornece

$$e(0,t) = f_1(t) \tag{19}$$

$\Rightarrow$ ou seja, a tensão no início da linha (em x = 0) é a função f_1, que representa a forma do sinal injetado na linha. A eq. (19) é pois, uma condição de contorno para a solução da tensão e(x,t) na linha.

⇒ **Linha não dissipativa ideal ou sem perdas**

⇒ Para efeito de visualização do fenômeno de onda, suponha um caso genérico para f_1, como diagramado abaixo:



⇒ onde $v = 1/\sqrt{LC} =$

Perturbação de tensão viajando na linha ideal.

$\Rightarrow$ **Linha não dissipativa ideal ou sem perdas**

$\Rightarrow$ Suponha que haja um observador montado na onda, no ponto marcado P. Ele deve ver a perturbação (onda) parada. O argumento $t-\sqrt{LC}x$ permanece constante para ele, ou seja:

$$t-\sqrt{LC}\,x=K \qquad (20)$$

$\Rightarrow$ Fazendo-se a derivada em relação ao tempo da eq.(20) tem-se:

$$1-\sqrt{LC}\,\frac{dx}{dt}=0 \qquad \therefore \frac{dx}{dt}=v=1/\sqrt{LC}\,[m/s] \qquad (21)$$

$\Rightarrow$ **Linha não dissipativa ideal ou sem perdas**

$\Rightarrow$ A eq. (21) indica que a perturbação ou onda se move para a direita (x crescente) com a velocidade de propagação indicada em (21).

$\Rightarrow$ Observe de (20) que, se o tempo t aumenta (o tempo passa), x deve crescer para que se mantenha a constante K.

$\Rightarrow$ **Linha não dissipativa ideal ou sem perdas**

$\Rightarrow$ Como num problema de causa e efeito observa-se que associada à onda de tensão expressa na eq. (15), deve existir uma correspondente onda de corrente. Tentemos uma correspondente onda de corrente para a direita como sendo:

$$i(x,t) = \frac{f_1(t - \sqrt{LC}\, x)}{Z_0} \tag{22}$$

$\Rightarrow$ onde Z_0 deve ser determinada.

$\Rightarrow$ **Linha não dissipativa ideal ou sem perdas**

$\Rightarrow$ Substituindo (22) na eq. (5) (com R = 0) tem-se:

$$\boxed{\left[R + L\ \frac{\partial}{\partial t}\right] i(x,t) = -\ \frac{\partial}{\partial x}\ e(x,t)}$$

$$L\ \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{f_1(t-\sqrt{LC}\ \mathrm{x})}{\mathrm{Z}_0}\right] = -\ \frac{\partial}{\partial x}\ f_1(t-\sqrt{LC}\ x)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{L}{Z_0}\ f_1^{'}(t-\sqrt{LC}\ x) = \sqrt{LC}\ f_1^{'}(t-\sqrt{LC}\ x) \qquad (23)$$

⇒ **Linha não dissipativa ideal ou sem perdas**

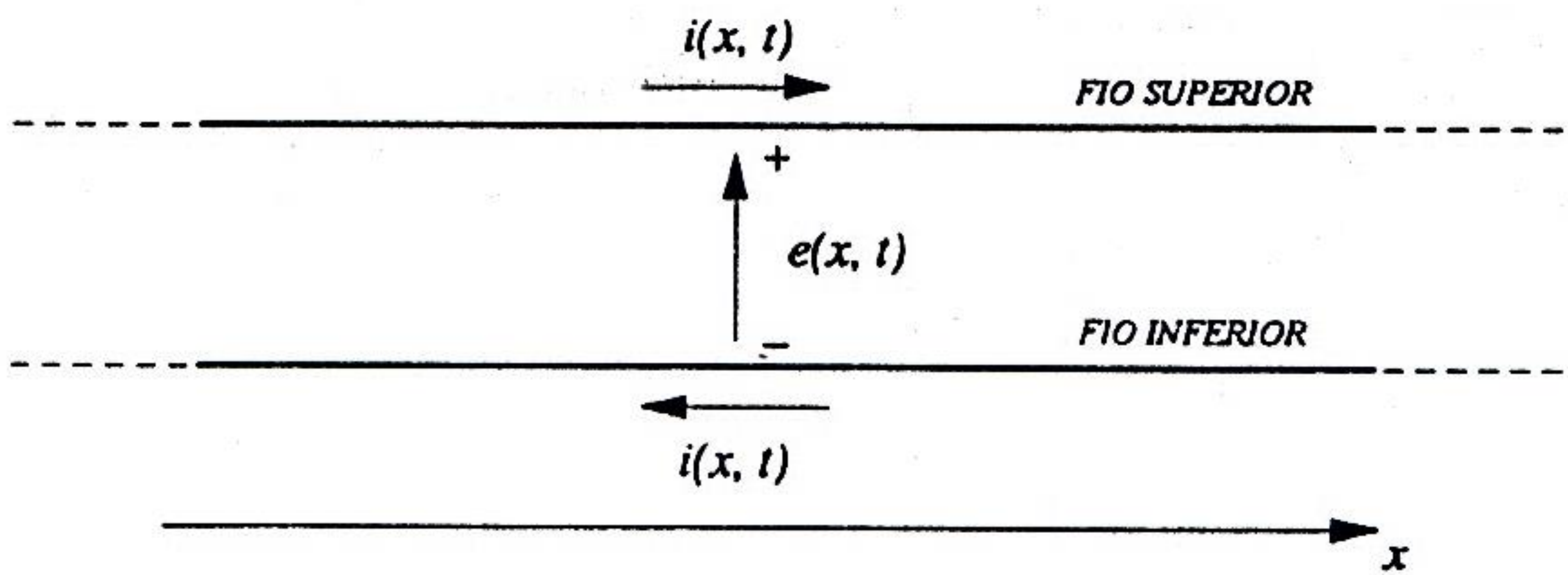
⇒ Para que (23) seja verdadeira, é necessário que a constante arbitrada Z_0 verifique a relação: $L/Z_0 = \sqrt{LC}$ ou $Z_0 = \mathrm{L}/\sqrt{\mathrm{LC}}$

⇒ Ou seja, $Z_0 = R_0 = \sqrt{L/C} \qquad [\Omega]$ (24)

⇒ A grandeza Z_0 é conhecida como a **impedância característica** da linha sem perdas, e é dada em Ω quando L é dado em H/m, e C em F/m. Para a linha sem perdas, como se nota de (24), Z_0 é um número puramente real, ou seja, $Z_0 = R_0$, pois L e C são sempre números reais positivos. Desta forma a expressão (22) é de fato a solução de corrente associada à solução de tensão expressa na eq.(15).

⇒ **Linha não dissipativa ideal ou sem perdas**

⇒ Nota sobre a convenção de sinais:



⇒ Fig. 3 – Convenção de sinais para tensão e corrente na linha

⇒ **Linha não dissipativa ideal ou sem perdas**

⇒ As soluções já encontradas de tensão (eq.(15)) e a sua correspondente solução de corrente (eq.(22) são ambas perturbações que viajam para a direita (x crescente, na notação da Fig.3). Para que as soluções de e(x,t) e de i(x,t) se completem é necessário incluir também a possibilidade de se ter onda viajando para a esquerda, ou seja, no sentido de x decrescente. Sendo assim, vamos incluir também a solução abaixo para a eq. diferencial (13).

$$e(x,t) = f_2(t + \sqrt{LC}\ x) \qquad (25)$$

⇒ **Linha não dissipativa ideal ou sem perdas**

⇒ A correspondente solução para a corrente pode ser encontrada se imaginarmos que esta solução difere de (25) apenas por uma constante, ou seja,

$$i(x,t) = \frac{f_2(t + \sqrt{LC}\ \ x)}{K} \tag{26}$$

⇒ Uma substituição de (26) na eq.(5) (com R = 0) indica que (26) é a correspondente solução de corrente desde que a constante K seja igual a $-Z_0$. A solução procurada para a corrente que viaja para a esquerda é então :

$$i(x,t) = -\frac{\mathrm{f}_2(t + \sqrt{LC}\ \ x)}{Z_0} \tag{27}$$

⇒ Depois de toda esta discussão só nos resta colecionarmos as várias soluções de tensão e de corrente para as eqs. Diferenciais parciais (13) e (14) da linha ideal, ou seja:

$$\underbrace{e(x,t) = f_1(t - \sqrt{LC}\;x)}_{\text{Propagação p/ direita}\;\longrightarrow} \quad + \quad \underbrace{f_2(t + \sqrt{LC}\;x)}_{\longleftarrow\;\text{Propagação p/ esquerda}} \tag{28}$$

$$i(x,t) = \frac{1}{Z_0}\Big[\; \underbrace{f_1(t - \sqrt{LC}\;x)}_{\text{Propagação p/ direita}\;\longrightarrow} \quad - \quad \underbrace{f_2(t + \sqrt{LC}\;x)}_{\longleftarrow\;\text{Propagação p/ esquerda}} \;\Big] \tag{29}$$

⇒ O sinal negativo para a 2 ª parcela de (29) advém da convenção de sinais de tensão e de corrente já adotada.

⇒ **Reflexões na linha sem perdas. Coeficientes de reflexão de tensão e de corrente**

⇒ Às soluções (28) e (29) encontradas na secção anterior deve-se fazer uma consideração. Há obviamente a possibilidade de que f_2 seja uma função completamente independente de f_1. Este seria o caso de se ter duas fontes de tensão independentes; f_1 no lado esquerdo ($x = 0$) de uma linha finita, e f_2 no lado direito ($x = \ell$) desta mesma linha. Como o sistema é linear, a solução completa da tensão $e(x,t)$ na linha é a soma das soluções obtidas individualmente.

⇒ **Reflexões na linha sem perda. Coeficientes de reflexão de tensão e de corrente**

⇒ Entretanto, nesta seção, estamos interessados no caso em que f_2 não é uma função qualquer independente de f_1. Pelo contrário, as perturbações f_1 e f_2 podem ser fortemente dependentes, uma vez que uma pode ser simplesmente a reflexão da outra num ponto qualquer de descontinuidade da linha.

⇒ **Reflexões na linha sem perda. Coeficientes de reflexão de tensão e de corrente**

⇒ Antes de se atacar o problema das reflexões na linha ideal, façamos uma notação mais adequada, ou seja:

$$f_1(t-\sqrt{LC}\,x) = e^{+}(x,t) \qquad \textit{tensão p/ a direita} \qquad (30)$$

$$f_2(t+\sqrt{LC}\,x) = e^{-}(x,t) \qquad \textit{tensão p/ a esquerda} \qquad (31)$$

$$\frac{f_1(t-\sqrt{LC}\,x)}{Z_0} = \frac{e^{+}(x,t)}{Z_0} = i^{+}(x,t) \qquad \textit{corrente p/ a direita} \qquad (32)$$

$$\frac{-f_2(t+\sqrt{LC}\,x)}{Z_0} = \frac{-e^{-}(x,t)}{Z_0} = i^{-}(x,t) \qquad \textit{corrente p/ a direita} \qquad (33)$$

⇒ **Reflexões na linha sem perda. Coeficientes de reflexão de tensão e de corrente**

⇒ Suponhamos uma linha de transmissão ideal terminada em $x = \ell$ [m] por um resistor de carga R_c [Ω], como ilustrado na Fig. 4.

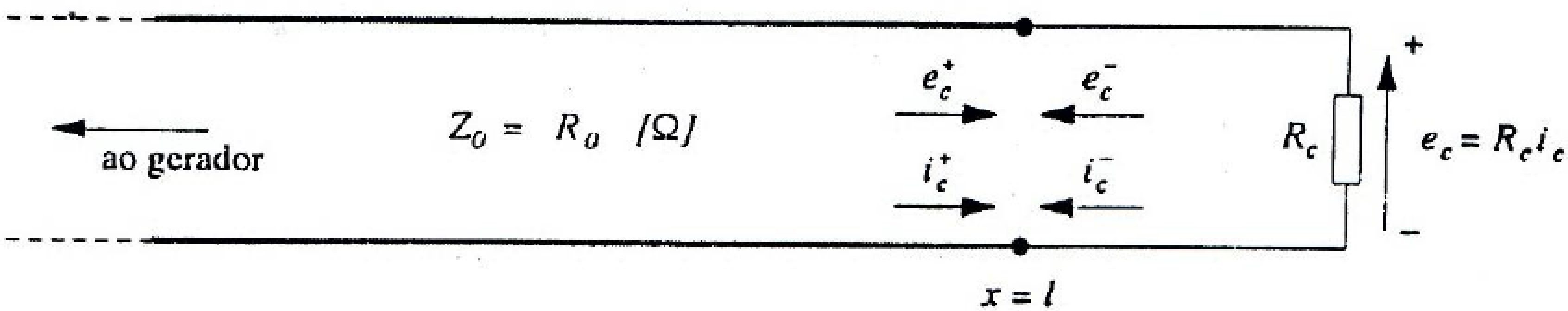


Fig.4 - Reflexão na carga.

⇒ **Reflexões na linha sem perda. Coeficientes de reflexão de tensão e de corrente**

⇒ As tensões e as correntes totais na carga devem estar relacionadas pela lei de Ohm:

$$\frac{e_c}{i_c} = R_c \tag{34}$$

$$\therefore \frac{e_c^+ + e_c^-}{i_c^+ + i_c^-} = R_c \tag{35}$$

⇒ Onde o índice "c" significa tensões e correntes na posição da carga.

$\Rightarrow$ **Reflexões na linha sem perda. Coeficientes de reflexão de tensão e de corrente**

$\Rightarrow$ Usando as relações (32) e (33), tem-se:

$$\frac{e_c^+ + e_c^-}{\dfrac{e_c^+}{Z_0} - \dfrac{e_c^-}{Z_0}} = R_c \qquad (35a)$$

$\Rightarrow$ Dividindo o numerador e o denominador por e_c^+ e rearranjando os termos, obtém-se :

$$\frac{e_c^-}{e_c^+} = \frac{R_c - Z_0}{R_c + Z_0} \qquad (35b)$$

⇒ **Reflexões na linha sem perda. Coeficientes de reflexão de tensão e de corrente**

⇒ A relação e_c^- / e_c^+ é conhecida como coeficiente de reflexão de tensão Γ_c na posição da carga, ou seja:

$$\boxed{\Gamma_c = \frac{e_c^-}{e_c^+} = \frac{R_c - Z_0}{R_c + Z_0}} \qquad (36)$$

⇒ Na eq. (36) nota-se que o único valor de R_c que evita as reflexões é $R_c = Z_0 = R_0$ [Ω]. Neste caso, $\Gamma_c = 0$ e $e_c^- = \Gamma_c \cdot e_c^+ = 0$

⇒ **Reflexões na linha sem perda. Coeficientes de reflexão de tensão e de corrente**

⇒ Para os casos extremos de $R_C = 0$ (curto) e $R_C = \infty$ (aberto) tem-se $\Gamma_C = -1$ e $\Gamma_C = +1$, respectivamente. Para estas duas situações tem-se:

⇒ $e_C^- = -e_C^+$ e $e_C^- = e_C^+$, respectivamente

⇒ O caso de terminação em curto $R_C = 0\ [\Omega]$ pode ser entendido da seguinte forma. Se incidir uma tensão $e_C^+ = 1V$ na carga, há a criação instantânea de uma tensão refletida e de valor *-1V*, ou seja, de valor contrário uma vez que no curto $\Gamma_C = -1$. A tensão total no curto deve ser igual a zero.

$\Rightarrow$ **Reflexões na linha sem perda. Coeficientes de reflexão de tensão e de corrente**

$\Rightarrow$ O coeficiente de reflexão de corrente $\Gamma_c^{'}$ na posição da carga pode também ser definido de forma análoga àquela já feita para tensão. Pode-se mostrar que a expressão de $\Gamma_c^{'}$ é dada por :

$$\Gamma_c^{'} = \frac{\dot{i}_c^{-}}{\dot{i}_c^{+}} = \frac{Z_0 - R_c}{R_c + Z_0} = -\Gamma_c \qquad (37)$$

$\Rightarrow$ a considerações de reflexão de corrente, para os vários casos de R_c são semelhantes àquelas já feitas para a tensão.

$\Rightarrow$ **Coeficientes de transmissão de tensão e de corrente na posição da carga.**

$\Rightarrow$ Referindo-se novamente à Fig. 4, pode-se definir o coeficiente de transmissão de tensão na posição da carga como sendo:

$$\Gamma_c = \frac{\text{tensão total}}{\text{tensão incidente}} = \frac{e_c}{e_c^+} \qquad (38)$$

$\Rightarrow$ Para obter Γ_c, vamos utilizar a relação abaixo já obtida posteriormente:

$$\frac{e_c}{\dfrac{e_c^+}{Z_0} - \dfrac{e_c^-}{Z_0}} = R_c$$

$\Rightarrow$ **Coeficientes de transmissão de tensão e de corrente na posição da carga.**

$\Rightarrow$ Vamos dividi-la por e_c^{+}

$$\frac{e_c / e_c^{+}}{\dfrac{1}{Z_0} - \dfrac{e_c^{-}}{e_c^{+}} \cdot \dfrac{1}{Z_0}} = R_c$$

$$\therefore \tau_c = \frac{e_c}{e_c^{+}} = \frac{R_c}{Z_0}\,(1 - \Gamma_c) \qquad (39)$$

⇒ **Coeficientes de transmissão de tensão e de corrente na posição da carga.**

⇒ Usando o valor de Γ_c já obtido na eq. (36), tem-se:

$$\tau_c = \frac{e_c}{e_c^+} = \frac{2R_c}{R_c + Z_0} \tag{40}$$

⇒ O coeficiente de transmissão de corrente $\tau_c^{'}$ na posição da carga pode ser obtido de modo análogo, encontrando-se :

$$\tau_c^{'} = \frac{i_c}{i_c^+} = \frac{2Z_0}{R_c + Z_0} \tag{41}$$

⇒ **Diagrama ″Zig-Zag″ para as reflexões na linha.**

⇒ As múltiplas reflexões que podem ocorrer numa linha podem ser melhor visualizadas, fazendo uso do chamado diagrama ″zig-zag″. Este diagrama será explicado mediante a aplicação do mesmo problema simples.

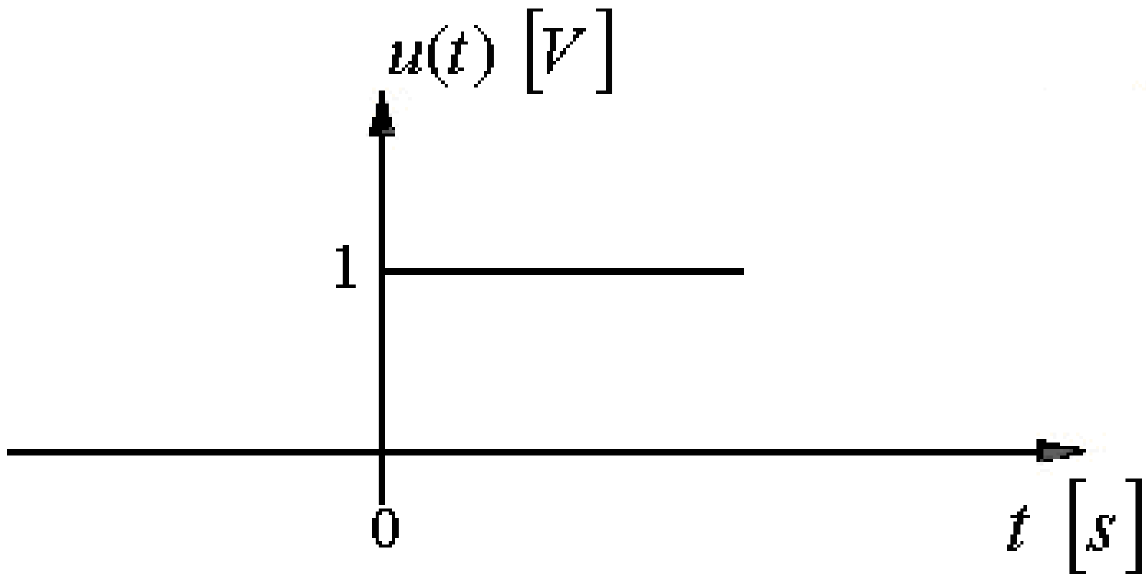
⇒ Seja o caso de uma linha sem perdas R = G = 0 (ver Fig. 6) excitada por um degrau de tensão de amplitude E volts, no instante t = 0 e na posição x (entrada da linha).

⇒ A condição de contorno é então:

$$e(0,t) = \frac{E}{2} \;.\; u(t)\left[V\right] \qquad (42)$$

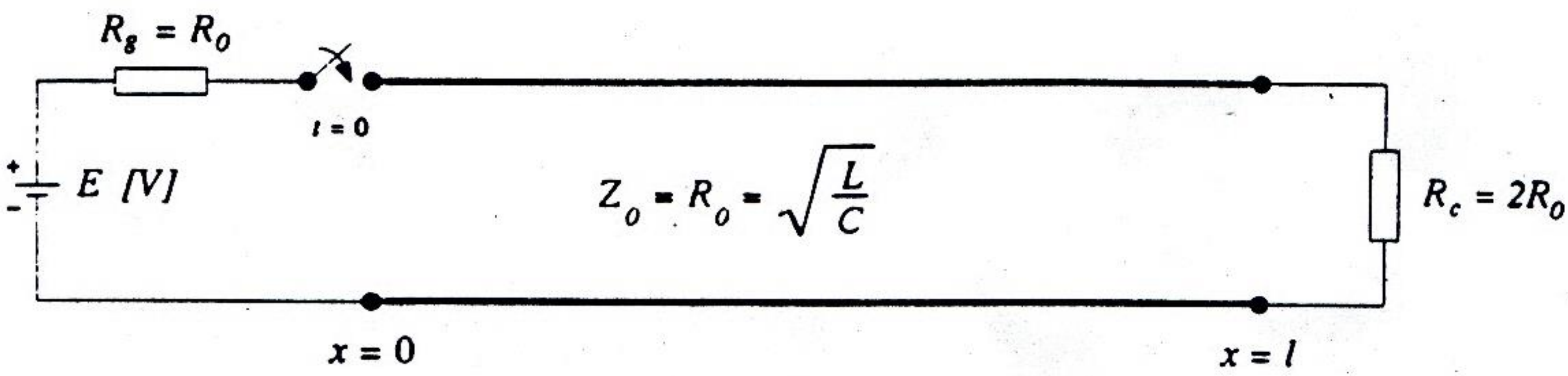
⇒ onde u(t) é a notação para o degrau unitário.

⇒ **Diagrama "Zig-Zag" para as reflexões na linha.**



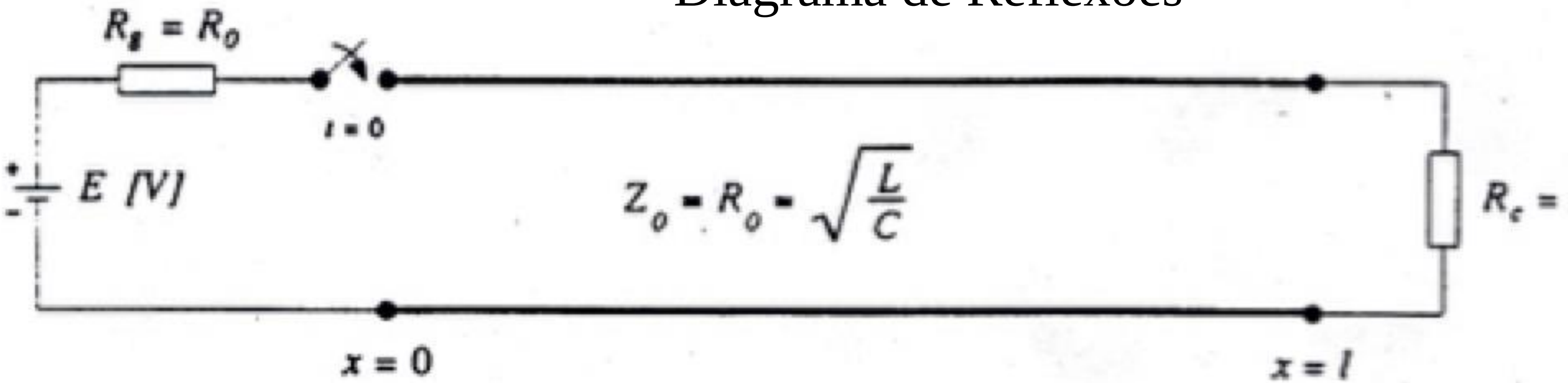
⇒ Fig. 5 – Degrau unitário de tensão ocorrendo em t = 0.

⇒ **Diagrama ″Zig-Zag″ para as reflexões na linha.**

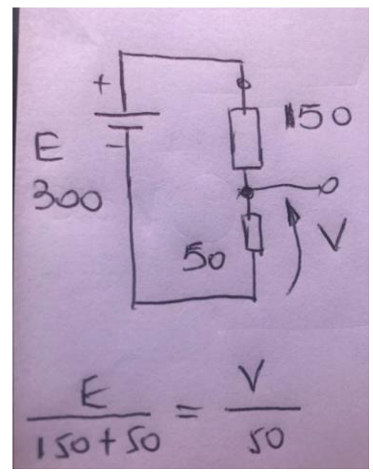


⇒ Fig. 6 – Exemplo para aplicação do digrama ″zig-zag″.

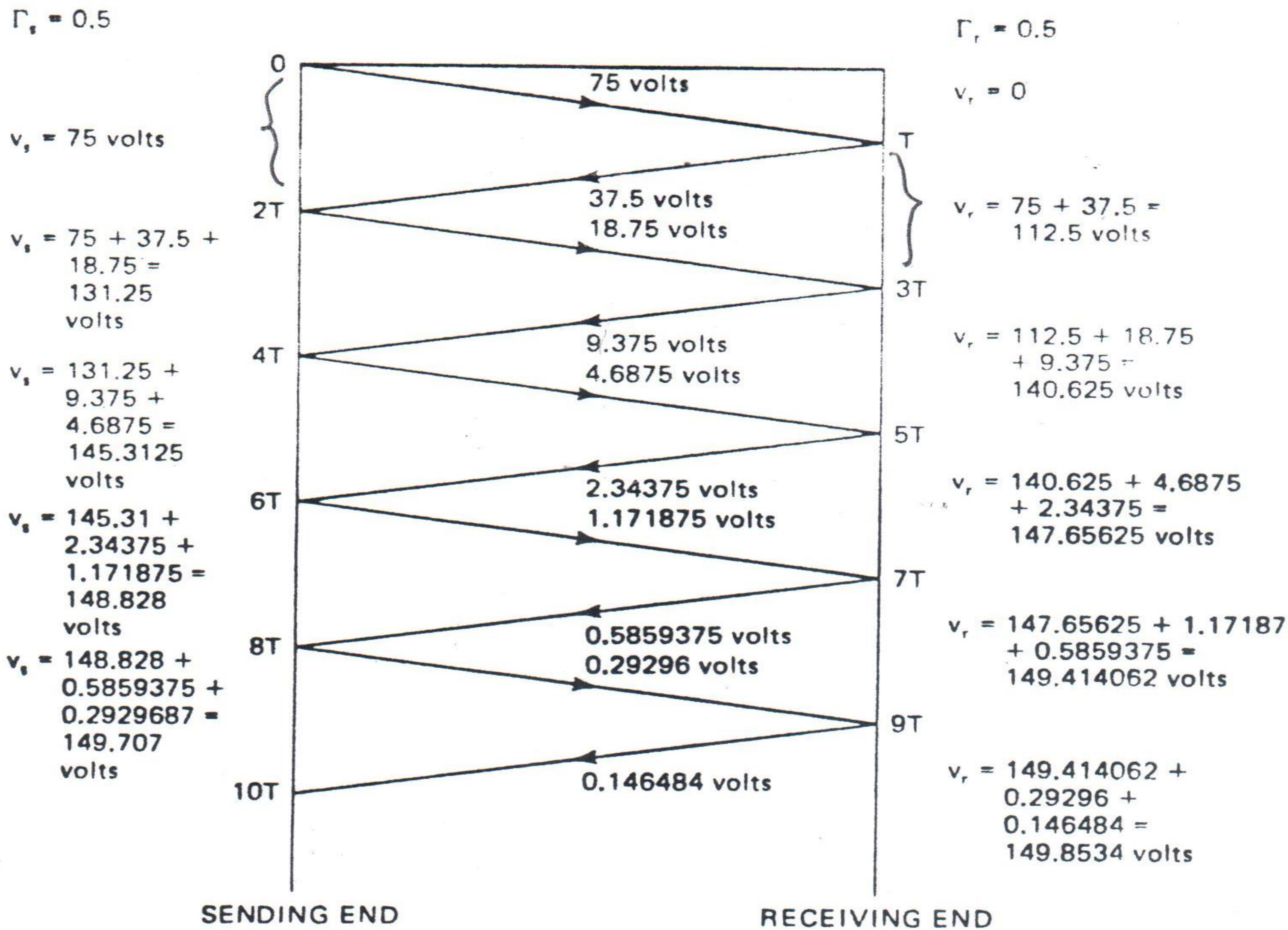
Diagrama de Reflexões



E=300 V $\quad$ Z_o = 50 Ω, $\quad$ $R_c = R_g$ = 150 Ω



$$\Gamma_c' = \frac{i_c^-}{i_c^+} = \frac{Z_0 - R_c}{R_c + Z_0} = -\Gamma_c$$


$\Gamma_s = 0.5$
$\Gamma_r = 0.5$
0
75 volts
$v_r = 0$
$v_s = 75$ volts
T
37.5 volts
18.75 volts
2T
$v_r = 75 + 37.5 = 112.5$ volts
$v_s = 75 + 37.5 + 18.75 = 131.25$ volts
3T
9.375 volts
4.6875 volts
4T
$v_r = 112.5 + 18.75 + 9.375 = 140.625$ volts
$v_s = 131.25 + 9.375 + 4.6875 = 145.3125$ volts
5T
2.34375 volts
1.171875 volts
6T
$v_r = 140.625 + 4.6875 + 2.34375 = 147.65625$ volts
$v_s = 145.31 + 2.34375 + 1.171875 = 148.828$ volts
7T
0.5859375 volts
0.29296 volts
8T
$v_r = 147.65625 + 1.17187 + 0.5859375 = 149.414062$ volts
$v_s = 148.828 + 0.5859375 + 0.2929687 = 149.707$ volts
9T
0.146484 volts
10T
$v_r = 149.414062 + 0.29296 + 0.146484 = 149.8534$ volts
SENDING END
RECEIVING END

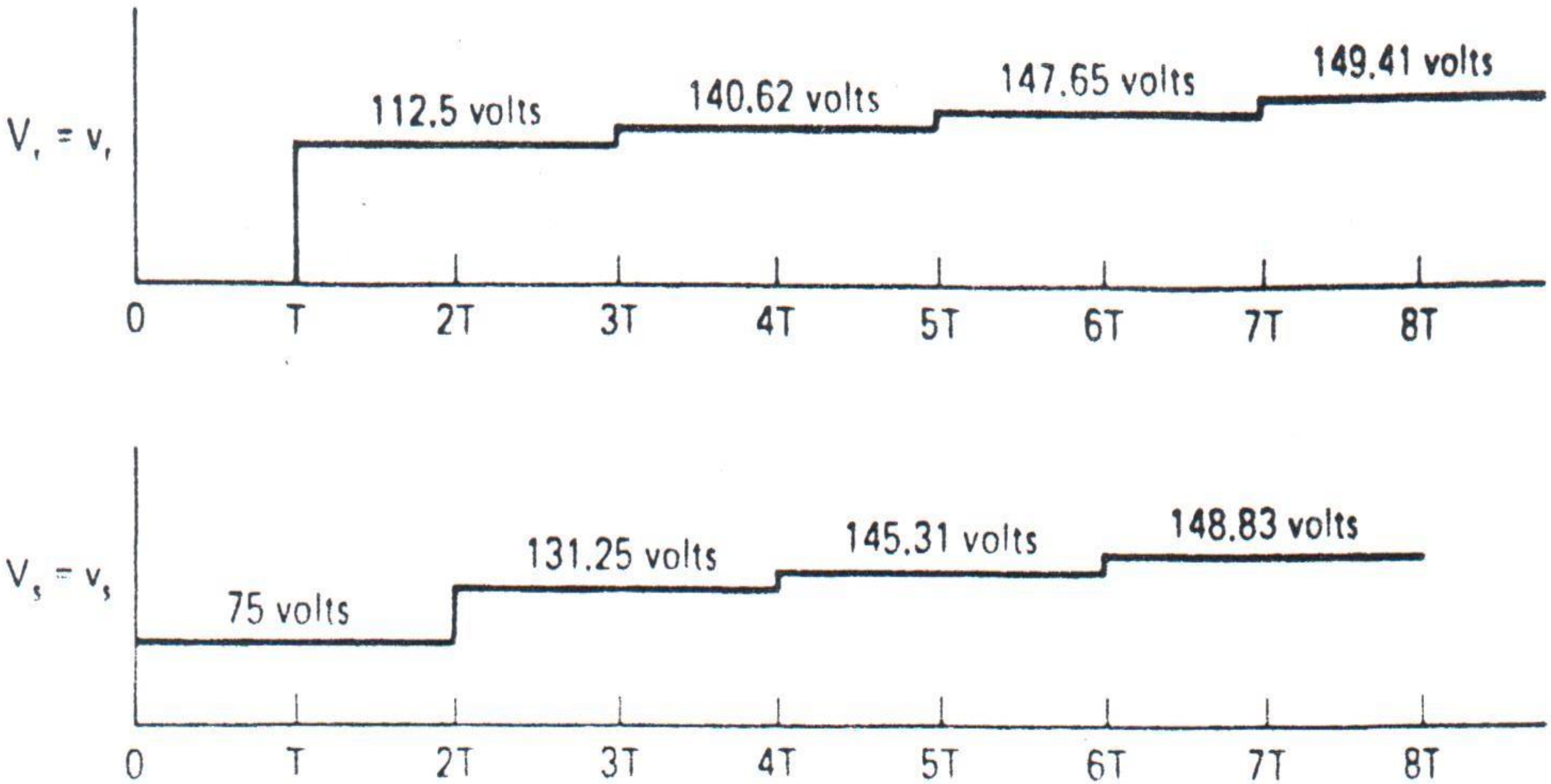


Figure 8-9. V_r and V_s as functions of time.

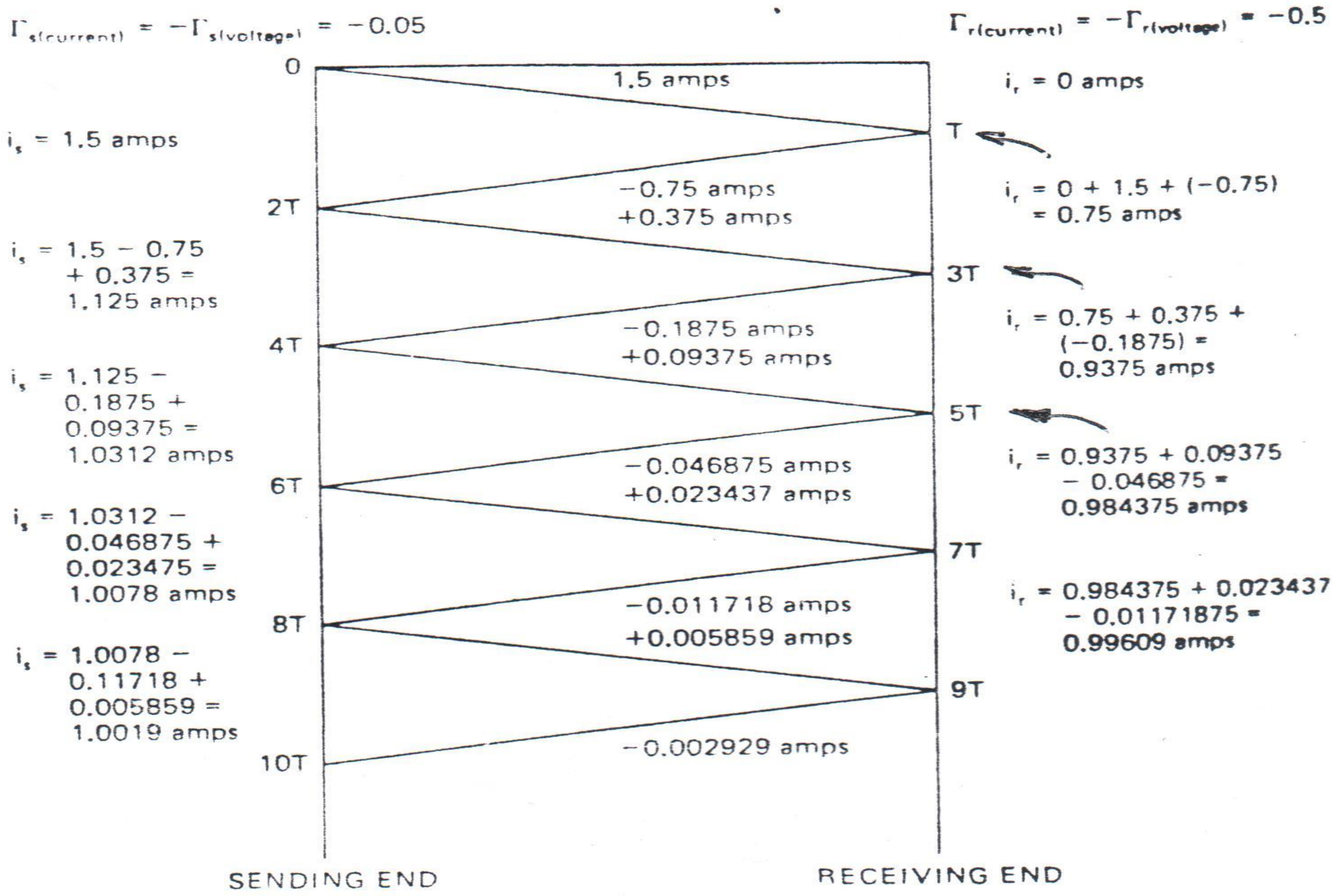


Figure 8-10. Current Bounce Diagram.

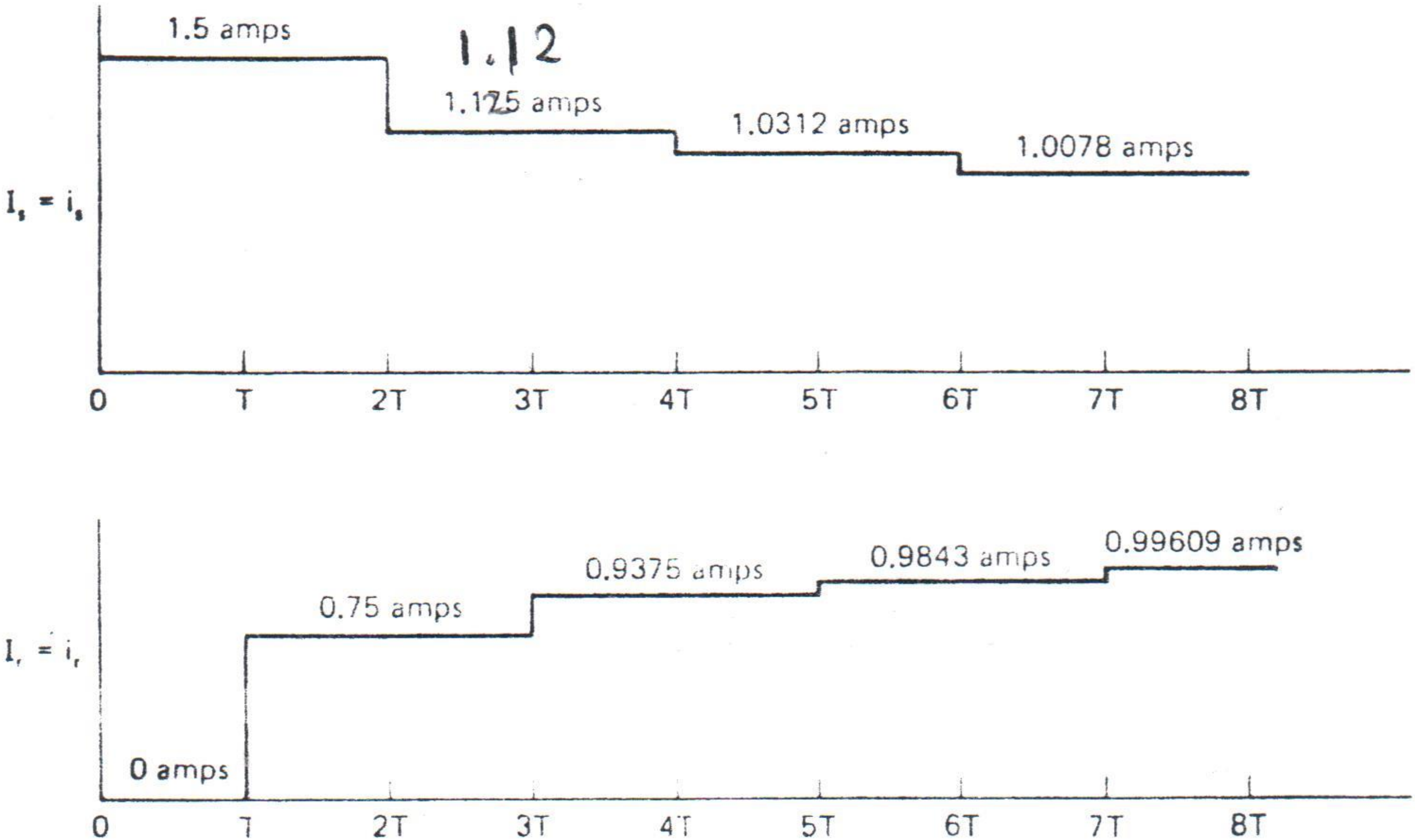


Figure 8-11. I_s and I_r as functions of time.

EXEMPLO Diagrama "Zig-Zag" para as reflexões na linha.

⇒A fonte de tensão é real, e tem uma resistência interna R_g que, no exemplo dado, coincide com a impedância (ou resistência) característica da linha. Ou seja, $R_g = R_0 = \sqrt{L/C}\ [\Omega]$. Também, neste caso, o resistor de carga vale $R_c = 2R_0$ [Ω].

⇒Uma vez que a linha fornece ondas como solução para a tensão e para a corrente, o degrau gerado na boca da linha sai viajando pela linha, com a velocidade de propagação $v = 1/\sqrt{LC}\ \lfloor \mathrm{m/s} \rfloor$

⇒Depois de decorridos $t = T = \dfrac{l}{v}\ [\mathrm{s}]$, o degrau de tensão deve atingir a carga colocada em x = ℓ .

$\Rightarrow$ **Diagrama "Zig-Zag" para as reflexões na linha.**

$\Rightarrow$ Para a construção do diagrama "zig-zag" de tensão é necessário obter os coeficientes de reflexão na posição do gerador (Γ_g).

$\Rightarrow$ No exemplo dado tem-se:

$$\Gamma_c = \frac{R_c - Z_0}{R_c + Z_0} = \frac{2R_0 - R_0}{2R_0 + R_0} = \frac{R_0}{3R_0} = \frac{1}{3} \qquad (43)$$

$$\Gamma_g = \frac{R_g - Z_0}{R_g + Z_0} = \frac{R_0 - R_0}{R_0 + R_0} = 0 \qquad (44)$$

⇒ **Diagrama "Zig-Zag" para as reflexões na linha.**

⇒ O diagrama "zig-zag" de tensão está ilustrado na Fig. 7.a. O diagrama de corrente pode ser visto na Fig. 7.b.

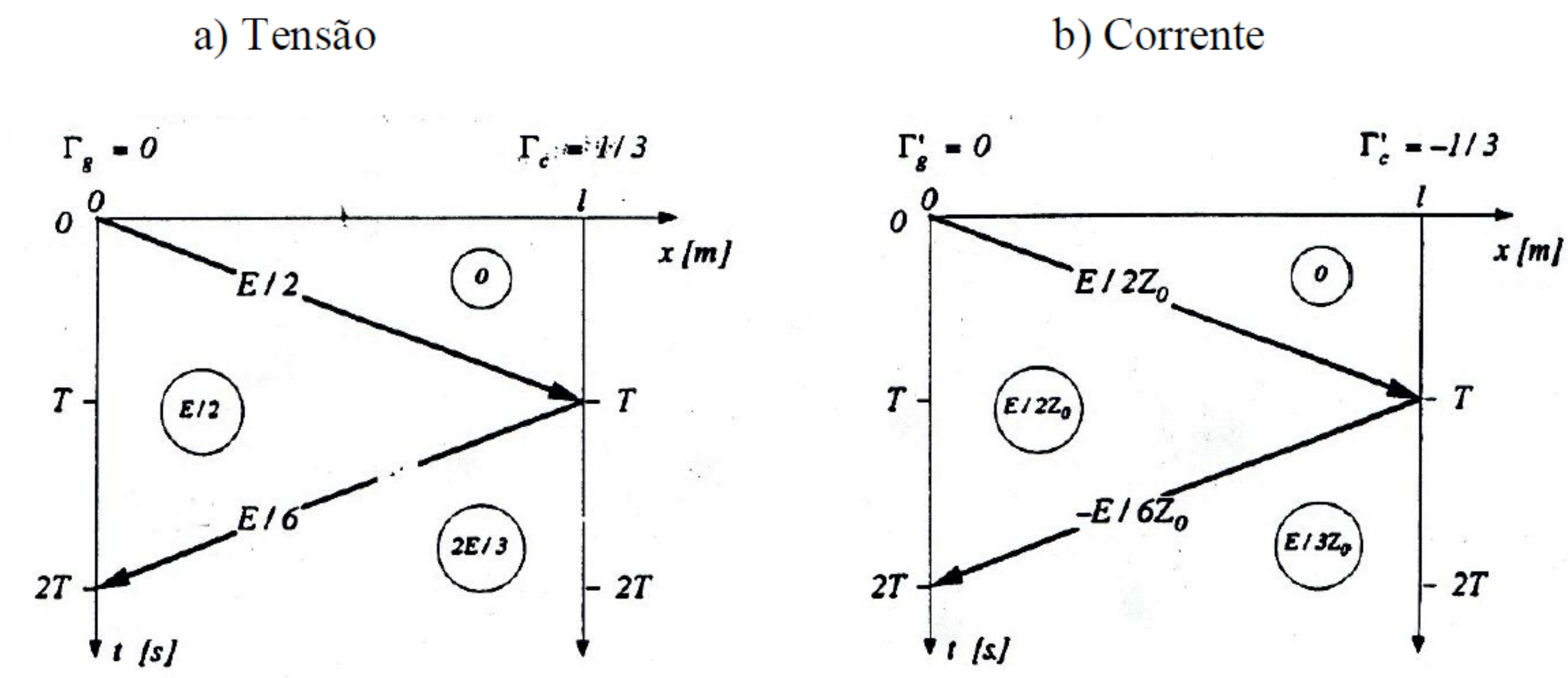


Fig. 7 - Diagrama "zig-zag" para o problema da Fig.6.

⇒ **Diagrama "Zig-Zag" para as reflexões na linha.**

⇒ Como se nota na Fig. 7, o diagrama "zig-zag" é na verdade um diagrama espaço x tempo, onde a distância x é colocada na horizontal, desde x = 0 até o final da linha x = ℓ. O tempo, por outro lado, é marcado na vertical, e cresce para baixo na Fig.7.

⇒ No ponto x = 0 e t = 0 é iniciado o vai-e-vem das ondas, para este problema em questão. A tensão inicial injetada na linha é facilmente obtida através de uma divisão resistiva da tensão E[V] da bateria entre o valor $Z_0 = R_0$ [Ω] "mostrado" pela linha e a sua própria resistência interna R_g , ou seja :

$$e_g^+ = E \cdot \frac{R_0}{R_g + R_0} \tag{45}$$

$\Rightarrow$ **Diagrama "Zig-Zag" para as reflexões na linha.**

$\Rightarrow$ Como R_g = R_0 (o gerador está casado com a linha) a eq. (45) fornece o valor inicial injetado $e_g^+ = E/2\,[V]$. O degrau de amplitude $^E/_2$ viaja então pela linha e, depois de T [s], atinge o resistor de carga $R_c = 2R_0$. Aí ocorre então uma reflexão.

$\Rightarrow$ A tensão incidente $^E/_2$ multiplicada por $\Gamma_c = 1/3$ fornece então o valor $^E/_6$ para a tensão degrau, que retorna ao gerador depois de T segundos adicionais, ou seja, no instante t = 2T[s]. Neste instante, como $R_g = R_0$ [Ω], $\Gamma_g = 0$, não há mais ondas refletidas.

⇒ **Diagrama "Zig-Zag" para as reflexões na linha.**

⇒ Para o diagrama "zig-zag" de corrente o raciocínio é semelhante àquele já feito acima para a tensão. Obviamente, usa-se agora os coeficientes de reflexão de corrente $\Gamma'c$ e $\Gamma'g$. O valor inicial de corrente é $^E/2Z_0$, ou seja, a tensão inicial injetada dividida pela impedância característica $Z_0 = R_0$.

⇒ Os valores marcados por círculos são os valores de tensão e corrente já acumulados, após cada reflexão. Após cada reflexão, renova-se o valor da soma acumulada.

⇒ Finalmente deve-se observar que se Γg (ou $\Gamma' g$) fosse diferente de zero no exemplo dado, os diagramas da Fig. 7 se estenderiam indefinidamente (não terminariam em t = 2T).

⇒ **Funções de tensão e de corrente em relação a x (espaço) e t (tempo).**

⇒ Os diagramas da Fig.7 constituem-se numa ferramenta simples e rápida para se determinar as funções e(x,t1) e i(x,t1) onde t1 é um instante qualquer de interesse. Obtém-se, neste caso, as chamadas distribuições de tensão e de corrente (função só de x) fazendo-se um corte horizontal em t = t1 .

⇒ **Funções de tensão e de corrente em relação a x (espaço) e t (tempo).**

⇒ A Fig. 8.a ilustra a distribuição de tensão para t = 0,5 T .
⇒ A Fig. 8.b ilustra a distribuição de tensão para t = 1,5 T .

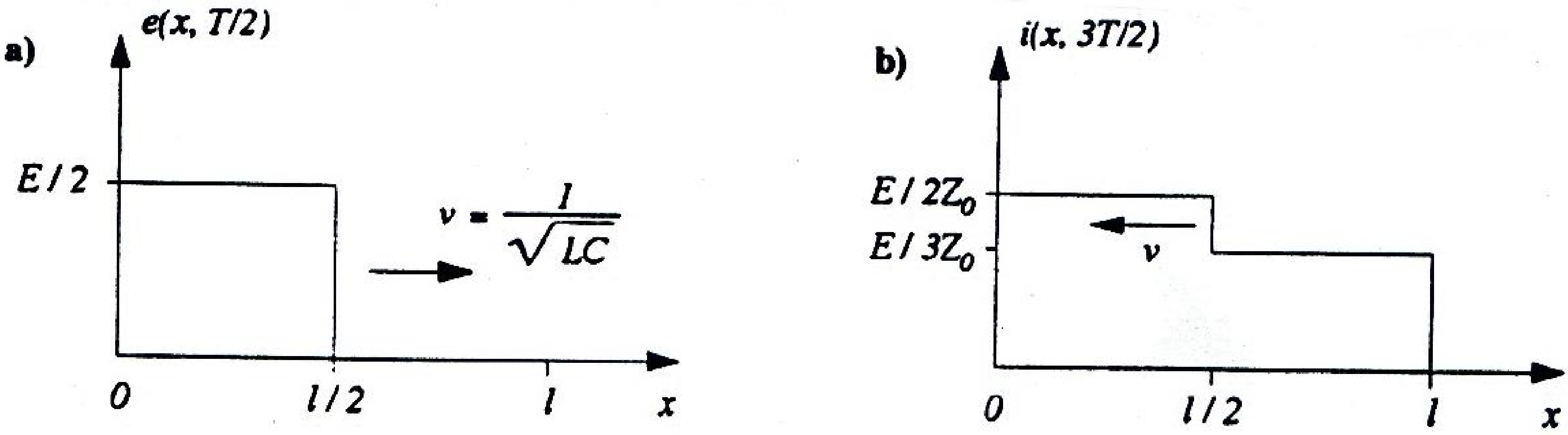


Fig. 8 - Instantâneos de tensão e corrente na linha para o exemplo dado.

⇒ **Funções de tensão e de corrente em relação a x (espaço) e t (tempo).**

⇒ Se por outro lado, for desejado as formas de onda e(x1,t) e i(x1,t) para uma posição x = x1 qualquer na linha, basta fazer cortes verticais em x = x1 nos diagramas da Fig.7.

⇒ A Fig. 9.1 mostra a forma de onda de tensão para x = 0. A Fig. 9.b ilustra a corrente para x = l / 2.

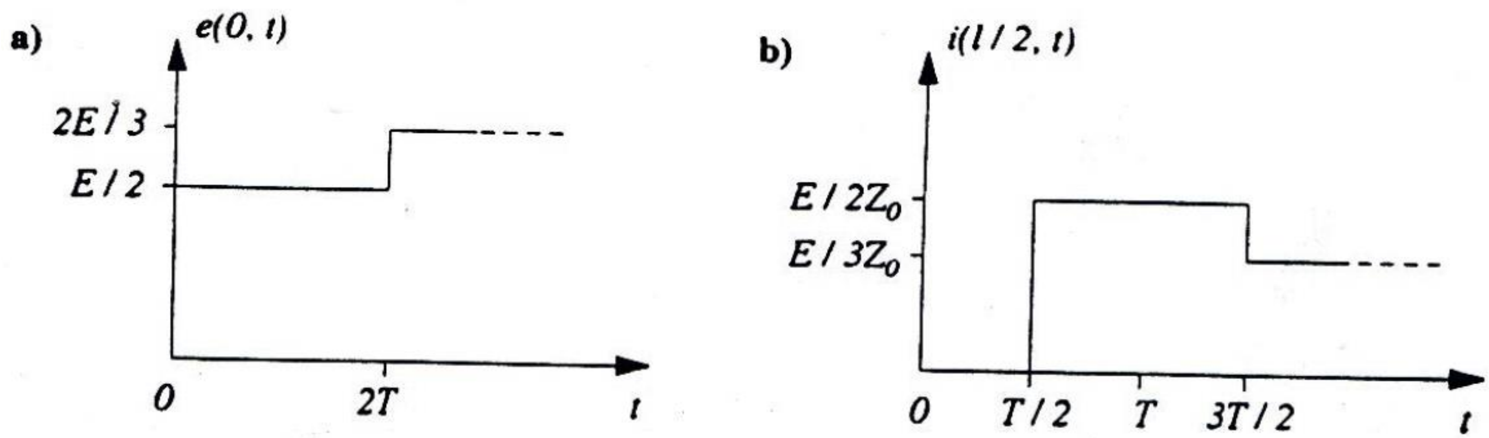


Fig. 9 - Formas de ondas de tensão e de corrente para o exemplo dado.

$\Rightarrow$ **Funções de tensão e de corrente em relação a x (espaço) e t (tempo).**

$\Rightarrow$ Finalmente, deve-se frisar aqui que os métodos de determinar tensões e correntes em função de x e de t vistos nas secções A.6 e A.7 são muito úteis para determinar a resposta da linha ideal a excitações em degrau. A resposta a um pulso retangular de amplitude A e duração t_0, por exemplo, pode ser encontrada fazendo no mesmo diagrama “zig-zag” a resposta para o degrau A u(t) bem como para o degrau atrasado - Au(t - t_0). Uma ligeira reflexão mostra que a soma destes dois degraus conforma o pulso retangular desejado na entrada da linha. A acumulação das várias reflexões que ocorrem no diagrama fornece então as formas de tensão (e de corrente) em função de x e de t .

Linhas de Regime Estacionário Senoidal

Introdução

⇒O estudo de linha de transmissão em regime permanente senoidal é muito importante por várias razões. A existência de uma quantidade imensa de linhas de potência que operam em 60Hz ou 50 Hz pelo mundo já seria uma razão bem forte para tal estudo.

⇒Há, na verdade, uma razão principal para o estudo de linhas de transmissão em regime permanente senoidal. Graças aos estudos de Fourier, Laplace e outros, qualquer sinal real no tempo *(periódico ou não)* tem um espectro em frequência.

⇒ Os sinais periódicos são melhor tratados com o auxílio da Série de Fourier. Uma função periódica é decomposta num tom da frequência fundamental, bem como numa série infinita de tons senoidais harmônicos *(múltiplos inteiros da fundamental)* com suas respectivas amplitudes e fases.

⇒ Este fato dá origem ao chamado espectro de linhas ou de raias. Há dois espectros de maior interesse: o de amplitude e o de fase.

⇒ Os sinais não periódicos, por outro lado, são melhor tratados através da Integral ou Transformada de Fourier.

⇒ A diferença básica neste caso é que os espectros de amplitude e de fase são agora cheios ou contínuos, e não mais só de raias, como no caso dos sinais periódicos.

⇒ No momento, o que deve ficar claro é o fato de que pode-se encarar qualquer sinal real no tempo como tendo a sua contrapartida em frequência.

⇒ Qualquer sinal real pode ser encarado como sendo uma soma de infinitos tons senoidais eternos ($-\infty$ até $+\infty$) de certas amplitudes e fases. Esta soma deve reproduzir o valor da função *(do sinal)* para qualquer instante ($-\infty < t < \infty$).

⇒ Sendo assim, sabendo-se a resposta do sistema para o regime estacionário senoidal nas frequências de interesse, pode-se prever qual é a forma de onda do sinal na saída de tal sistema.

Solução Geral de tensão e Corrente na Linha em Regime Permanente Senoidal

⇒Foram vistas as equações diferenciais válidas numa linha genérica:

Equação 5

$$\frac{\partial e}{\partial x} = -Ri - L\frac{\partial i}{\partial t} \qquad (A.1)$$

Equação 7

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -Ge - C\frac{\partial e}{\partial t} \qquad (A.2)$$

$\Rightarrow$ Nas equações anteriores a tensão “e”, bem como a corrente “i” são funções de “x” e de “t”.

$\Rightarrow$ No regime estacionário senoidal as tensões e correntes são, como já visto em teoria de circuitos C.A., **as projeções de vetores ou fasores girantes**, ou seja:

$$e = \mathrm{Re}\left[E\ .\exp(j\omega t)\right] \tag{A.3}$$

$$i = \mathrm{Re}\left[I\ .\exp(j\omega t)\right] \tag{A.4}$$

$\Rightarrow$ Nas equações (A.3) e (A.4), E e I são as amplitudes da tensão e da corrente, respectivamente. Isto pode ser visualizado lembrando as identidades de Euler, e aplicando nas eqs. (A.3) e (A.4). Assim,

$$e = \text{Re}\left[E \,.\cos\omega t + jE \,.\, sen\,\omega t\right] = E \;.\; \cos\omega t \tag{A.5}$$

$$i = \text{Re}\left[I \;.\; \cos\omega t \;+\; jI \;.\, sen\omega t\right] \;=\; \text{I} \;.\; \cos\omega t \tag{A.6}$$

$\Rightarrow$ Nas equações (A.3) e (A.4), as quantidades entre parênteses são conhecidas como fasores girantes.

$\Rightarrow$ As quantidades conhecidas apenas como fasores são as quantidades *(reais ou complexas)* que se obtém dos fasores quando se faz $t = 0$, isto é, quando se omite a dependência temporal.

$\Rightarrow$ A omissão do termo $e^{j\omega t}$ é geralmente feita na teoria de circuitos alternados senoidais. Sendo assim, se o fasor tensão num ponto qualquer do circuito for obtido como sendo o número complexo $E = E_0\angle\theta_0$, a correspondente onda de tensão real no domínio do tempo é obtida, fazendo:

$$E = \mathrm{Re}\left[E\,.\exp(\mathrm{j}\,\omega \mathrm{t})\right] = E_0 \cos(\omega \mathrm{t} + \theta_0) \qquad \text{(A.7)}$$

⇒ Ao invés do fasor amplitude, muitas vezes, se fala no fasor amplitude eficaz. Neste caso, deve-se lembrar que:

$$\text{Fasor eficaz} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\text{fasor amplitude}) \qquad \text{(A.8)}$$

⇒ Um dos aspectos mais interessantes da análise de Fourier reside no fato de que se soubermos a resposta de amplitude e de fase para *"todos"* os tons senoidais no intervalo das frequências *"de interesse"*, ou seja, na banda de frequência do sinal de entrada, saberemos também como é a forma do sinal *"transiente"* da resposta temporal numa linha real.

$\Rightarrow$ Das equações (A.1) e (A.2) nota-se que há derivadas dos fasores de tensão e corrente tanto em relação a x como a t. Vamos colocar estas duas equações citadas numa forma mais adequada ao tratamento fasorial.

$\Rightarrow$ Substituindo os fasores girantes de (A.3) e de (A.4) e (A.2), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[E\ .\ \exp(j\omega t)\right] = -RI\ \exp(j\omega t) - j\omega LI\ \exp(j\omega t) \qquad \text{(A.9)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[I\ .\ \exp(j\omega t)\right] = -GE\ \exp(j\omega t) - j\omega CE\ \exp(j\omega t) \qquad \text{(A.10)}$$

$\Rightarrow$ Omitindo a dependência temporal, as equações (A.9) e (A.10) podem ser escritas com **derivadas totais**:

$$\frac{dE}{dx} = -\,(R + j\omega L)\;.\;I \qquad \text{(A.11)}$$

$$\frac{dI}{dx} = -\,(G + j\omega C)\;.\;E \qquad \text{(A.12)}$$

$\Rightarrow$ Define-se:

Impedância série da linha por unidade de comprimento

$$Z = R + j\omega L \tag{A.13}$$

Admitância paralela da linha por unidade de comprimento

$$Y = G + j\omega C \tag{A.14}$$

$\Rightarrow$ Portanto:

$$\frac{dE}{dx} = -\ ZI \qquad \text{(A.15)}$$

$$\frac{dI}{dx} = -\ YE \qquad \text{(A.16)}$$

$\Rightarrow$ Vamos obter uma equação diferencial que contenha só a tensão fasorial *E*. Fazendo *d*(eq. A.15) / *dx*, tem-se:

$$\frac{d^2E}{dx^2} = -Z\frac{dI}{dx} \qquad \text{(A.17)}$$

$\Rightarrow$ Substituindo (A.16) em (A.17), tem-se:

$$\frac{d^2E}{dx^2} = (ZY)E \qquad \text{(A.18)}$$

$\Rightarrow$ Tentemos uma solução de *E* para a equação (A.18). Deve ser uma função que, diferenciada duas vezes, reproduza a função original multiplicada por (*ZY*). Então, uma solução possível é:

$$E = C_1 \exp\left[-\sqrt{ZY}\,x\right] \tag{A.19}$$

$\Rightarrow$ Onde C_1 é uma constante que tem a dimensão de tensão *(volts).* Entretanto, é necessário completar a solução de *E* com a possibilidade de haver reflexões na linha, de volta ao gerador. Vamos incluir:

$$E = C_2 \ \exp\left[\sqrt{ZY}\ \mathrm{x}\right] \tag{A.20}$$

$\Rightarrow$ Portanto, a solução geral é do tipo:

$$\boxed{E = C_1 \exp\left[-\sqrt{ZY}\;\; x\right] + C_2 \; \exp\left[\sqrt{ZY}\;\; x\right]} \qquad \text{(A.21)}$$

$\Rightarrow$ Substituindo (A.21) em (A.15) pode-se achar a correspondente solução da corrente I, ou seja:

$$\boxed{I = \frac{1}{\sqrt{Z/Y}} \left\{ C_1 \, . \exp\left[-\sqrt{ZY}\;\; x\right] - C_2 \exp\left[\sqrt{ZY}\;\; x\right] \right\}} \qquad \text{(A.22)}$$

⇒ A grandeza *(complexa em geral)* $(Z/Y)^{1/2}$ é a impedância característica Z_0 da linha real, ou seja,

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \qquad [\Omega]} \tag{A.23}$$

⇒ Observe que Z_0 é dada em [Ω], e independente do comprimento da linha: Z_0 é função de *R,L,G,C* e da frequência $\omega = 2\pi f$.

Lembrete: Para linha sem dissipação *(ideal)* $R=G=0$ e $Z_0 = R_0 = (L/C)^{1/2}$ *(real puro)*.

⇒ Por outro lado, observando as equações (A.21) e (A.22), nota-se que a grandeza é responsável pela propagação. Assim, define-se:

$$\boxed{\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta} \qquad \text{(A.24)}$$

onde:

γ = const. de propagação complexa ou função de propagação.

α = const. de atenuação da linha dada em [nep/m]

β = const. de desvio de fase da linha dada em [rad/m].

Linha infinita, velocidade de fase e comprimento de onda

⇒É instrutivo neste ponto, analisar como ficam as soluções obtidas na secção anterior para o caso de uma linha de transmissão de comprimento infinito, ($\ell = \infty$). A Fig. A.1 ilustra esta situação.

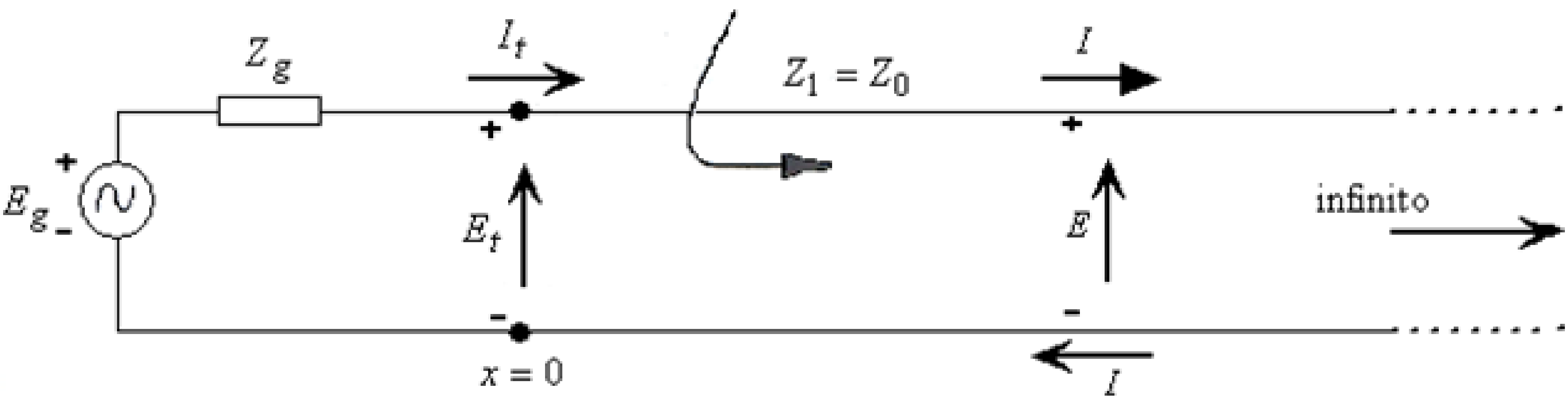


Figura A.1 – Linha Infinita.

- $\Rightarrow$ Nesta Figura, E_t e I_t são os fasores tensão e corrente na posição *(no lado da transmissão)*, E e I são os fasores tensão e corrente num ponto qualquer, a uma distância x do gerador.

- $\Rightarrow$ Como o termo de propagação γ envolve a atenuação α da linha, que é uma quantidade positiva, é natural esperar que as soluções de tensão (ver eq.(A.21) e de corrente (ver eq. (A.22) tenham $C_2 = 0$.

- $\Rightarrow$ A existência do 2º. termo nas equações citadas faria com que este termo tendesse a infinito, à medida que $x \rightarrow \infty$. Isto seria impossível do ponto de vista de energia, uma vez que a linha real dissipa energia de fato. Portanto C_2 deve ser zero.

⇒ A solução de tensão na linha é então:

$$E = C_1 \exp\left[-\sqrt{ZY}\ \ x\right] \qquad \text{(A.25)}$$

→ (Propagação para a direita)

⇒ Calculemos C_1 a partir de uma condição de contorno. Para $x = 0$, tem-se $E = E_t$ *(tensão na boca da linha).* Então a eq. (A.25). Pode ser escrita como a seguir:

$$E_t = C_1 \exp[0] = C_1 \qquad (A.26)$$

$$E = E_t \exp\left[-\sqrt{ZY}\ \mathrm{x}\ \right] = E_t \exp[-\gamma x] \qquad (A.27)$$

$$E = E_t \exp[-(\alpha + j\beta)x] \qquad (A.28)$$

$$E = E_t \exp[-\alpha x] \exp[-j\beta x] = E_t \exp[-\alpha x] \angle^{-\beta x} \qquad (A.29)$$

⇒ De (A.29), nota-se que a fase de referência *(fase zero)* é colocada na tensão de entrada. E_t é real e é a amplitude de pico da onda *cos ωt*. Se, por outro lado, a referência de fase for em E_g, E_t seria complexa indicando alguma fase diferente de zero, dado que Z_g e/ou Z_0 são complexas em geral.

⇒ A solução de corrente é obtida de maneira análoga da eq. (A.22), fazendo também $C_1 = E_t$ e $C_2 = 0$. Obtém-se então:

$$I = \frac{E_t}{Z_0} \exp[-\alpha x] \exp[-j\beta x] \tag{A.30}$$

⇒ Assim, se E_t é real (fase zero na tensão de entrada) tem-se:

$$I = \frac{E_t}{|Z_0|} \exp[-\alpha x] \exp[-j\beta x - j\theta_0] \tag{A.31}$$

$$I = \frac{E_t}{|Z_0|} \exp[-\alpha x] \, \underline{|(\beta x + \theta o)} \qquad \text{(A.32)}$$

Onde: $Z_o = |Z_0| \langle \theta_0 = |Z_0| \exp[j\theta_0]$ é uma grandeza complexa geral

$\Rightarrow$ Observe de (A.29) e (A.30) que:

$$\frac{E}{I} = Z_0 \qquad \text{(A.33)} \qquad \text{ou} \qquad \frac{I}{E} = Y_0 \qquad \text{(A.34)}$$

Onde: $$Y_0 = \frac{1}{Z_0} = |Y_0| \langle -\theta_0 = |Y_0| e^{-j\theta 0} \qquad \text{(A.35)}$$

⇒ É importante, neste momento, lembrar que a eq. (A.29) dá a tensão na forma fasorial. Para achar a onda no tempo, faz-se:

$$e(x,t) = \mathrm{Re}\left[E_t \exp(-\alpha x)\exp(-j\beta x)\exp(j\omega t)\right] \qquad \text{(A.36)}$$

$$e(x,t) = E_t \exp(-\alpha x)\cos(\omega t - \beta x) \qquad \text{(A.37)}$$

⇒ Da eq. (A.37), nota-se que em cada ponto x qualquer da linha, há uma oscilação senoidal *(ou cossenoidal)* de tensão com uma amplitude, e com atraso de fase dado em radianos. Pode-se notar também que se *α ≠ 0 (linha real)* a amplitude de oscilação cai com a distância x do gerador, de uma maneira exponencial.

$\Rightarrow$ Note finalmente que, se α = *0 (linha ideal)* a amplitude da oscilação não cai mais com x (é constante, e vale E_t); há apenas um retardo de fase proporcional à distância x do gerador ($-\beta x$).

$\Rightarrow$ A forma de (A.37) é reconhecida como sendo a equação de uma onda progressiva (x e t *aparecem conjuntamente no argumento do cosseno)*. A ideia de uma onda senoidal progressiva é melhor visualizada se usarmos a ideia do observador montado na onda. O argumento é então uma constante, ou seja :

$$\omega t - \beta x = K \tag{A.38}$$

⇒ Nota-se que (A.37) descreve uma perturbação senoidal que viaja para a direita *(sentido de x crescente)*, uma vez que se t aumenta (ver eq. A.38), x tem que aumentar, para manter a constante K. A velocidade desta perturbação é obtida de (A.38), diferenciando em relação ao tempo, ou seja:

$$\omega - \beta \frac{dx}{\mathrm{dt}} = 0 \tag{A.39}$$

$$\boxed{v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}} \tag{A.40}$$

$\Rightarrow$ A equação (A.40) define a velocidade de fase v_f da perturbação senoidal.

$\Rightarrow$ Se a linha não tem perdas (R = G = 0) a função de propagação γ (ver eq. A.24) fornece:

$$\Upsilon = \sqrt{(j\omega L)\,(j\omega C)} \;=\; j\omega\sqrt{LC} = \alpha + j\beta \qquad \text{(A.41)}$$

Portanto:

$$\alpha = 0 \quad \beta = \omega\sqrt{LC} \qquad \text{(A.42)}$$

⇒ Assim, substituindo o valor obtido para β de (A.42) em (A.40), obtém-se:

$$\boxed{v_f = \frac{\omega}{\omega\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \;\; [\mathrm{m/s}]} \qquad \text{(A.41)}$$

⇒ Assim, conclui-se que para linha ideal a velocidade de fase é independente da frequência (ver (A.43). Isto é uma consequência de que, na linha ideal, β é diretamente proporcional à frequência (ver (A.42)).

⇒ Para uma linha real, de modo geral não é diretamente proporcional à frequência. Por consequência, a velocidade da fase não é uma constante. Este fato é o responsável pelo fenômeno da dispersão em linhas.

- ⇒ As várias componentes senoidais *(pense no espectro de um pulso injetado na linha)* viajarão com velocidades de fase diferentes. Algumas chegarão antes das outras. A composição de todas elas na saída da linha não mais conformará o mesmo pulso injetado na entrada, e ele estará então distorcido *(ou espalhado no tempo)*. Este tipo de distorção é causado pela não linearidade da constante de desvio da fase. É a chamada distorção de fase.

- ⇒ Um outro tipo de distorção é a chamada distorção de amplitude. Esta aparece devido ao fato de que a constante de atenuação não é, de fato, constante com a frequência. O valor de α é obtido através da relação (A.24).

⇒ O fato de α variar com a frequência faz com que as várias componentes senoidais do pulso já referido anteriormente sofram atenuações diferentes. Deste modo, elas também não podem mais conformar o pulso que foi injetado na entrada da linha. Assim, ele aparece distorcido na saída. É então o caso de distorção de amplitude.

⇒ Para a corrente dada em (A.30), valem idênticas considerações àquelas já feitas para a tensão. É preciso apenas notar que, se Z_0 for real, E e I estão em fase para qualquer ponto x da linha. Se Z_0 não é real então, a corrente I está atrasada de um ângulo θ_0 em relação à tensão no mesmo ponto x da linha (ver eq. A.32).

$\Rightarrow$ Vamos definir agora o comprimento de onda λ como a menor distância entre dois pontos de mesma fase, ou seja:

$$\left.\beta x\right|_{x=\lambda} = \beta\lambda = 2\pi \ \text{radianos} \tag{A.44}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \ \text{ou} \ \beta = \frac{2\pi}{\lambda}} \tag{A.45}$$

$\Rightarrow$ Das relações (A.45) e (A.40), obtém-se várias identidades de interesse

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\omega} v_f = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T}} v_f = \frac{v_f}{f} = T v_f} \qquad \text{(A.46)}$$

Onde f é a frequência cíclica dada em Hz, T [s] é o período da oscilação

Linha finita bem terminada

⇒Note que, na Fig. A.1, se a linha for seccionada num valor $x = \ell$ [m] mas, ao mesmo tempo, providenciarmos uma impedância de carga $Z_c = Z_0$ para terminar a linha de comprimento ℓ, as soluções já obtidas para E e I para $0 \leq x \leq \ell$ na secção anterior devem se conservar.

Linha finita bem terminada

⇒Isto se explica pelo fato de que os fasores E e I estão relacionados na linha através de $E / I = Z_0$, para qualquer x . Esta relação continua válida também em $x = \ell$, por construção. Assim o trecho de linha de comprimento ℓ não pode *"perceber"* que a linha foi seccionada.

⇒As soluções dos fasores E e I numa linha finita terminada com impedância de carga $Z_c = Z_0$ [Ω] são então aquelas já obtidas nas eqs. (A.29) e (A.30). A Fig. A.2 ilustra a posição dos fasores de tensão na linha, em um comprimento de onda.

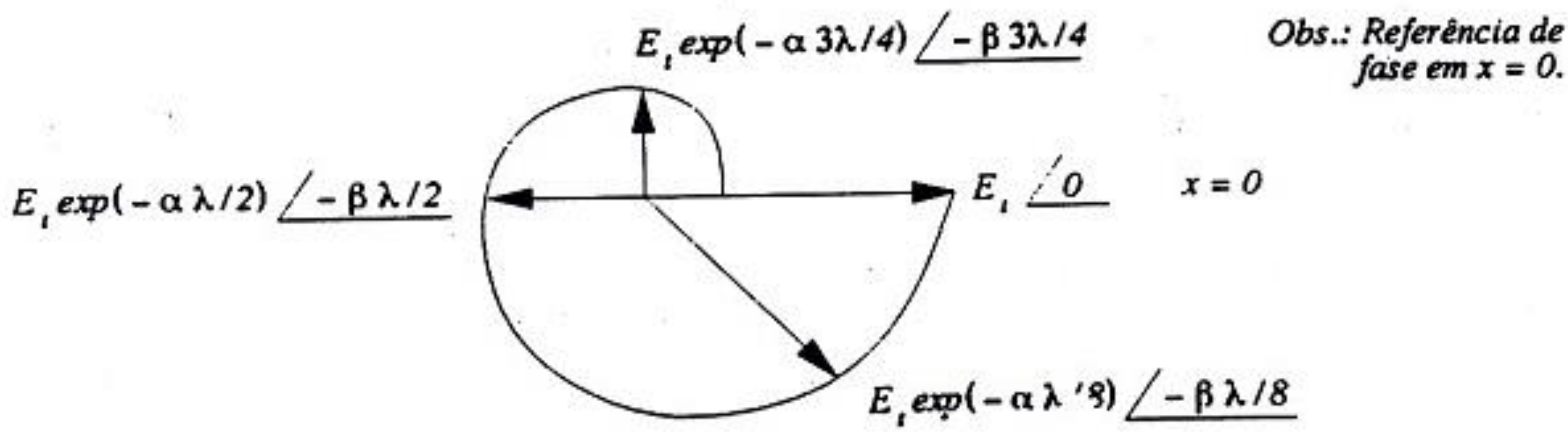


Fig. A. 2 – Fasores de tensão para x = 0 (no eixo real), x = λ/8, x = λ/2 e x = 3λ/4.

⇒ Note que a ponta dos fasores descreve uma espiral logarítmica decrescente à medida que se aumenta x, devido ao termo de atenuação exp(-αx).

⇒ As distribuições de tensão ao longo da linha, para vários instantes sucessivos, podem ser visualizadas na Fig. A.3.

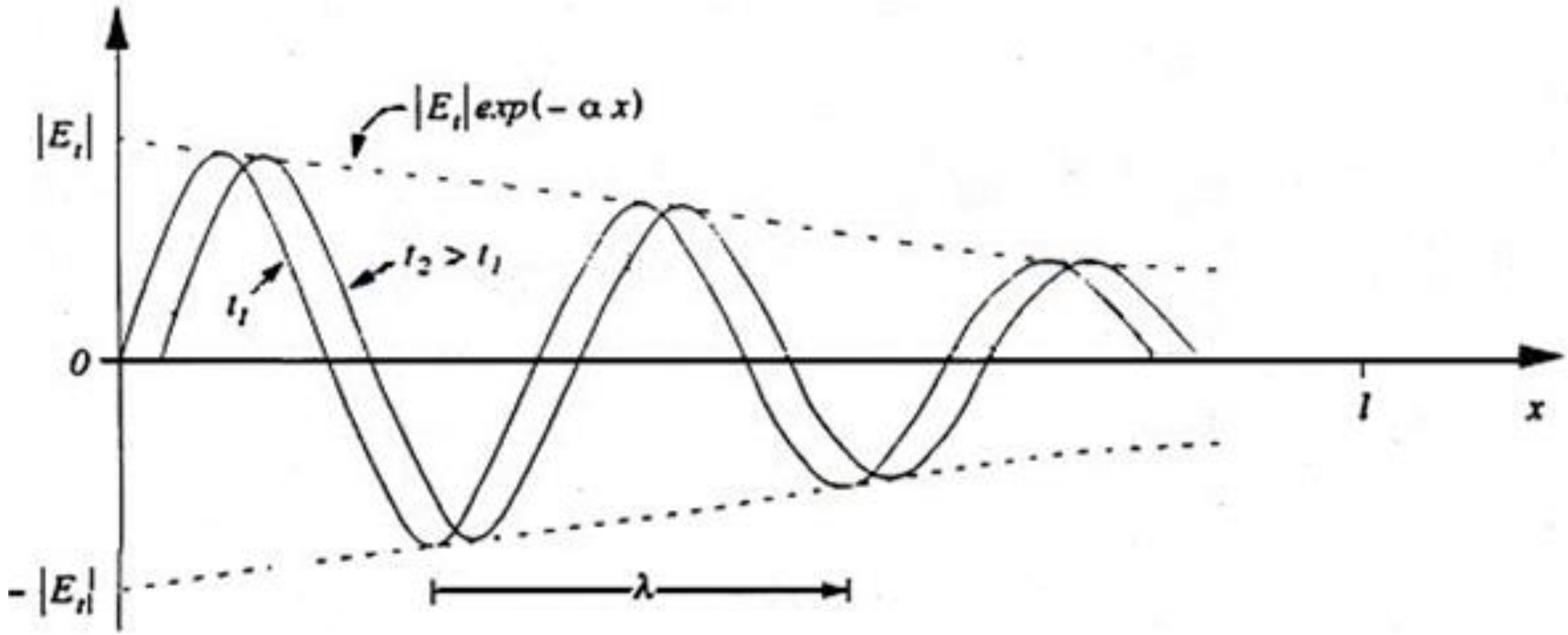


Fig. A.3.-Instantâneos de tensão na linha real terminada com $Z_c = Z_0$

⇒ Note da Fig. A.3 que as amplitudes das oscilações senoidais na linha decrescem de um modo exponencial, devido à presença do termo de atenuação na solução de (A.29).

Reflexões na Linha e coeficiente de reflexão medido a partir da carga:

$$E = E^{+} + E^{-} \qquad \text{(A.47)}$$

onde o fasor E total é a soma do fasor incidente E^{+} e do fasor refletido E^{-} .

$$I = I^{+} + \mathrm{I}^{-} \qquad \text{(A.48)}$$

A corrente é também da mesma forma.

A comparação de (A.47) e (A.48) com as eqs. (A.21) e (A.22) mostra que :

$$I^{+} = \frac{E^{+}}{Z_0} \qquad \text{(A.49)}$$

$$I^{-} = \frac{-E^{-}}{Z_0} \qquad \text{(A.50)}$$

A determinação das constantes *(que têm dimensão de tensão)* nas soluções já obtidas nas eqs. (A.21) e (A.22) pode ser feita de várias maneiras. É útil, por exemplo, expressar as quantidades em função das grandezas terminais (ver Fig. A.4).

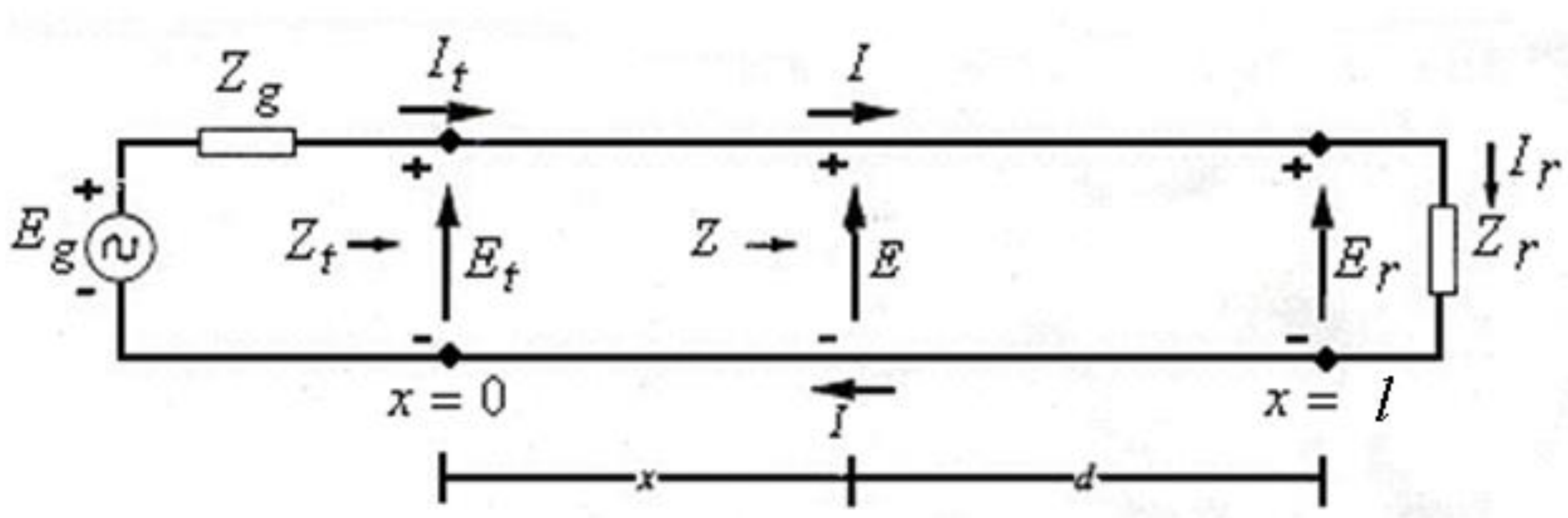


Fig. A.4 – Diagrama contendo a notação usada.

Vamos substituir $E = I_r Z_r$ e $I = I_r$ em $x = \ell$ nas eqs. (A.21) e (A.22). Obtém-se então :

$$I_r Z_r = C_1 \ \exp(-\gamma\ell) \ + \ C_2 \ \exp(\gamma\ell) \qquad \text{(A.51)}$$

$$I_r Z_0 = C_1 \ \exp(-\gamma\ell) \text{ - } C_2 \ \exp(\gamma\ell) \qquad \text{(A.52)}$$

Somando (A.51) e (A.52), obtém-se C_1 dado por :

$$C_1 = \frac{I_r}{2}\left(Z_r + Z_0\right)\exp\left(\gamma\ell\right) \tag{A.53}$$

Subtraindo (A.52) e (A.51), obtém-se C_2 dado por :

$$C_2 = \frac{I_r}{2}\left(Z_r - Z_0\right)\exp\left(-\gamma\ell\right) \tag{A.54}$$

Assim, substituindo estes valores em (A.21) e (A.22), E e I, respectivamente, obtém-se :

$$E = \frac{I_r}{2}\left\{\left(Z_r + Z_0\right)\exp\left[\gamma(\ell - x)\right] + \left(\mathrm{Z_r} - Z_0\right)exp\left[\gamma(x - \ell)\right]\right\} \tag{A.55}$$

$$I = \frac{I_r}{2Z_0}\left\{(Z_r + Z_0)\exp\left[\gamma(\ell - x)\right] - (Z_r - Z_0)\exp\left[\gamma(x - \ell)\right]\right\} \tag{A.56}$$

Se quisermos referir a distância a partir da carga, pode-se usar a relação $d = \ell - x$ (ver Fig. A.4), temos então :

$$E = \frac{I_r}{2}\left\{\left(Z_r + Z_0\right)\exp(\gamma d) + \left(\mathrm{Z_r} - Z_0\right)exp(-\gamma d)\right\} \qquad \text{(A.57)}$$

$$I = \frac{I_r}{2Z_0}\left\{(Z_r + Z_0)\exp(\gamma d) - (Z_r - Z_0)\exp(-\gamma d)\right\} \qquad \text{(A.58)}$$

A relação entre a onda de tensão refletida pela incidente resulta no coeficiente de reflexão de tensão, ou seja:

$$\Gamma = \frac{E^-}{E^+} = \frac{Z_r - Z_0}{Z_r + Z_0}\exp(-2\gamma d) \qquad \text{(A.59)}$$

$$\Gamma = \Gamma_r \exp(-2\alpha d)\exp(-j2\beta d) \qquad \text{(A.60)}$$

Sendo

$$\Gamma_r = \left(Z_r - Z_0\right) / \left(Z_r + Z_0\right) \qquad \text{(A.61)}$$

o coeficiente de reflexão de tensão na posição da carga ou recepção. Enquanto o coeficiente de reflexão de corrente é dado por:

$$\Gamma' = -\Gamma = \frac{Z_0 - Z_r}{Z_r + Z_0} \exp(-2\alpha d) \exp(-j2\beta d) \qquad \text{(A.62)}$$

A impedância complexa num ponto da linha é obtida da divisão do fasor total E pelo total I . assim, usando as eqs. (A.57) e (A.58), obtém-se:

$$Z = \frac{E}{I} = Z_0 \frac{\left(Z_r + Z_0\right)\exp\gamma d + \left(Z_r - Z_0\right)\exp(-\gamma d)}{\left(Z_r + Z_0\right)\exp\gamma d - \left(Z_r - Z_0\right)\exp(-\gamma d)} \qquad \text{(A.63)}$$

Ou então:

$$Z = Z_0 \cdot \frac{Z_r[\exp(\gamma d) + \exp(-\gamma d)] + Z_0[\exp(\gamma d) - \exp(-\gamma d)]}{Z_0[\exp(\gamma d) + \exp(-\gamma d)] + Z_r[\exp(\gamma d) - \exp(-\gamma d)]}$$

(A.64)

Por meio da relação trigonométrica

$$\frac{\exp(\gamma d) - \exp(-\gamma d)}{\exp(\gamma d) + \exp(-\gamma d)} = tgh(\gamma d) \qquad \text{(A.65)}$$

aplicada à (A.64), obtém-se:

$$Z = Z_0 \frac{Z_r + Z_0 \; tgh(\gamma d)}{Z_0 + Z_r \; tgh(\gamma d)} \qquad \text{(A.66)}$$

Se $Z_r = Z_0$ a impedância Z em qualquer ponto da linha é também igual a Z_0.

Se eventualmente $Zr = 0$, então (A.66) é descrita como:

$$Z = Z_0 \frac{Z_0 tgh(\gamma d)}{Z_0} = Z_0 tgh(\gamma d) \qquad \text{(A.67)}$$

No caso de uma linha ideal, sendo $Z_r = R_0$ e $\gamma d = j\beta d$, tem-se :

$$Z = R_0 tgh(j\beta d) \qquad \text{(A.68)}$$

e

$$tgh(jx) = j\ tg\ x \qquad \text{(A.69)}$$

Sendo assim, obtém-se para a linha sem perdas:

$$Z = jR_0\ .\ tg\ (\beta d) \qquad \text{(A.70)}$$

O módulo da impedância num ponto qualquer da linha ideal com $Z_r = 0$ varia então segundo uma tangentóide:

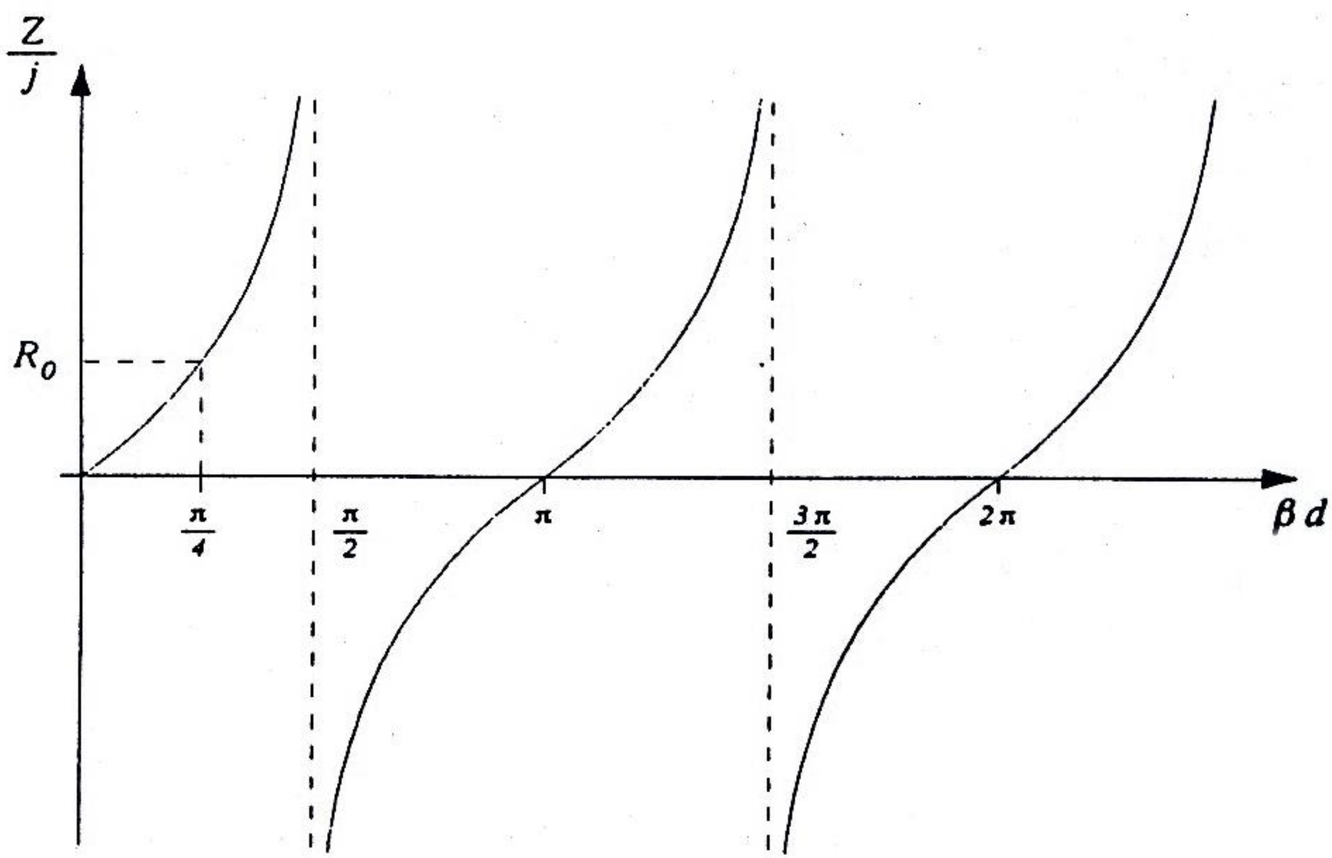


Fig. A.5 – Reatância produzida por uma linha ideal em curto.