Modelagem de aterramento elétrico para análise de transitórios

Walter Luiz Manzi de Azevedo

Orientador: Prof. Dr. José Pissolato Filho

Co-orientador: Dr. Anderson Ricardo Justo de Araújo

08/09/2023

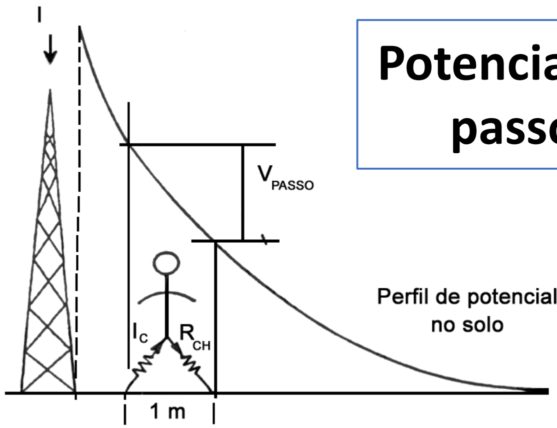
Sumário

- Introdução
- Modelagem do Solo
- Descargas Atmosféricas
- Metodologia
- Estudos de caso
- Conclusões

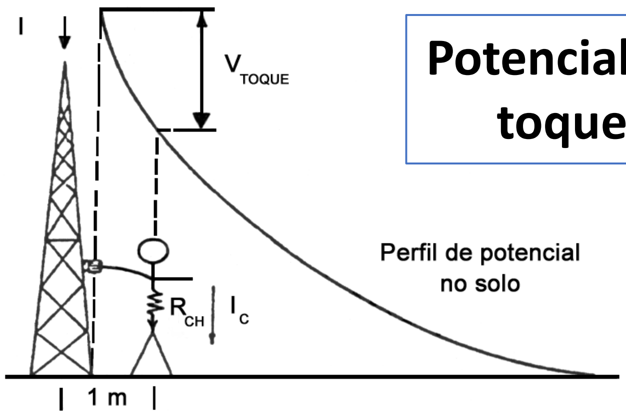
Introdução

- Sistemas de aterramento (SA) consistem em uma conexão física entre um componente e o solo. Eles devem ter uma baixa impedância a fim de dissipar correntes elevadas durante um regime transitório (faltas ou descargas atmosféricas).

- Eles são fundamentais para:
  - proteção de pessoas e equipamentos próximos a esses componentes,
  - bom desempenho dos sistemas elétricos ao qual ele está conectado.



Potencial de passo



Potencial de toque

Fonte: Visacro, S. V. F. "Aterramentos elétricos conceitos básicos técnicas de medição e instrumentação filosofias de aterramento", pag. 121

Introdução

- O desempenho de um SA pode ser medido por meio de sua impedância harmônica de aterramento (Zh) e sua resposta (GPR) frente à determinado fenômeno do qual se queira proteger (descarga atmosférica).

- Para fenômenos de baixa frequência SAs podem ser modelados por uma resistência.

- Fenômenos transitórios de altas frequências como descargas atmosféricas necessitam de modelos mais rigorosos devido a seu amplo espectro na frequência (MHz).

Introdução

- O solo pode ser representado por seus parâmetros elétricos resistividade, permissividade e permeabilidade magnética.

- Esses parâmetros dependem de diversas propriedades físicas, como a frequência, porosidade, umidade, temperatura, ionização e estratificação.

- Diversos pesquisadores têm estudado esse assunto, tais como:
  - Steinmetz: diminuição da resistividade com a frequência (1907);
  - Archie: formula empírica da resistividade em função da umidade e porosidade (1942);
  - Scott: medições mais precisas de resistividade e permissividade (1967);
  - Visacro-Alipio: metodologia para medir a resistividade em função da frequência (2011).

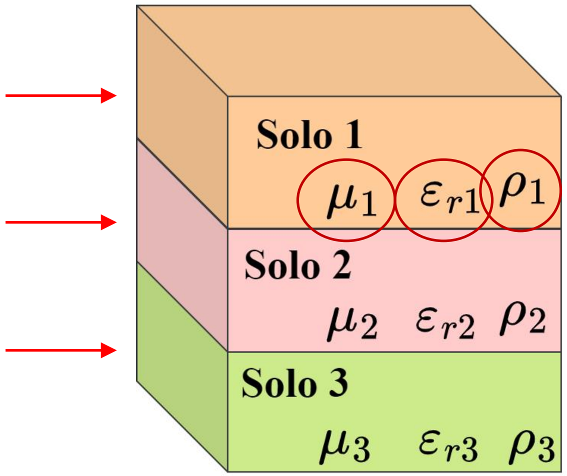
Introdução

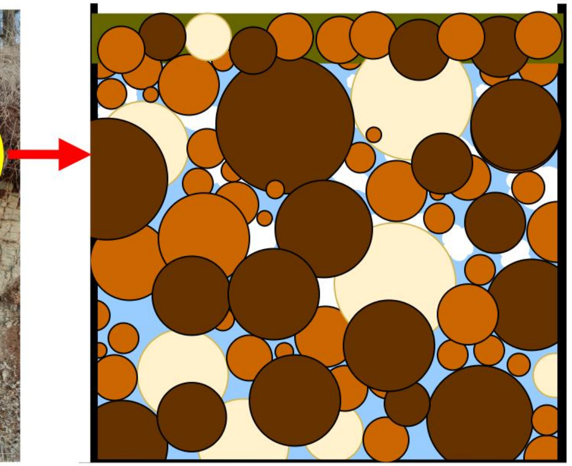
- Este trabalho compara alguns modelos de solos propostos na literatura, levando em consideração a frequência, a umidade e a porosidade, para diversos SAs frente à descargas atmosféricas.

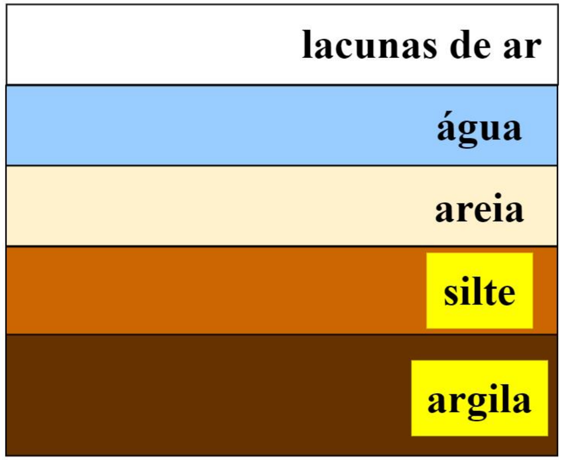
- As impedâncias harmônicas (Zh) são calculadas para sistemas de aterramento usando o software eletromagnético FEKO® empregando o Método dos Momentos (MoM) para um amplo intervalo de frequência.

- A elevação de potencial de terra (GPRs) é computada utilizando o Vector Fitting para o ajuste da impedância harmônica e em seguida, emprega-se o método da convolução recursiva.

Modelagem do solo







Dependência da frequência:

- Longmire-Smith (LS) (1975)
- Portela (P) (1999)
- Visacro-Alipio (VA) (2011)
- CIGRÈ (2019)

Dependência da frequência e umidade:

- Scott (S) (1967)
- Longmire-Smith (LS) (1975)
- Messier (M) (1985)

Porosidade e umidade:

- Archie (1942)

Modelagem do solo: Frequência

LS

$$\epsilon_r(f) = \epsilon_\infty + \sum_{n=1}^{13} \frac{a_n}{1 + (f/F_n)^2}$$

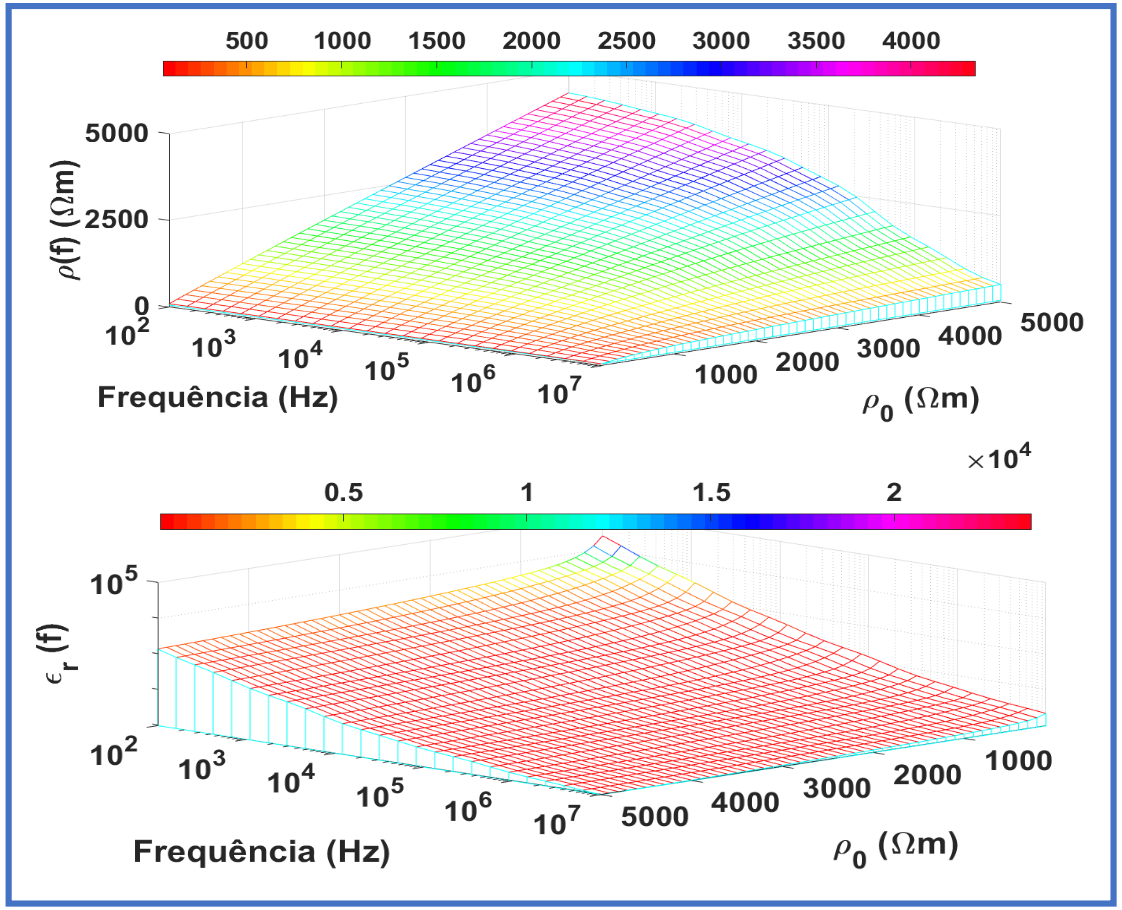
$$F_n = 10^{n-1} \cdot \left(\frac{125}{\rho_0}\right)^{0,8312}$$

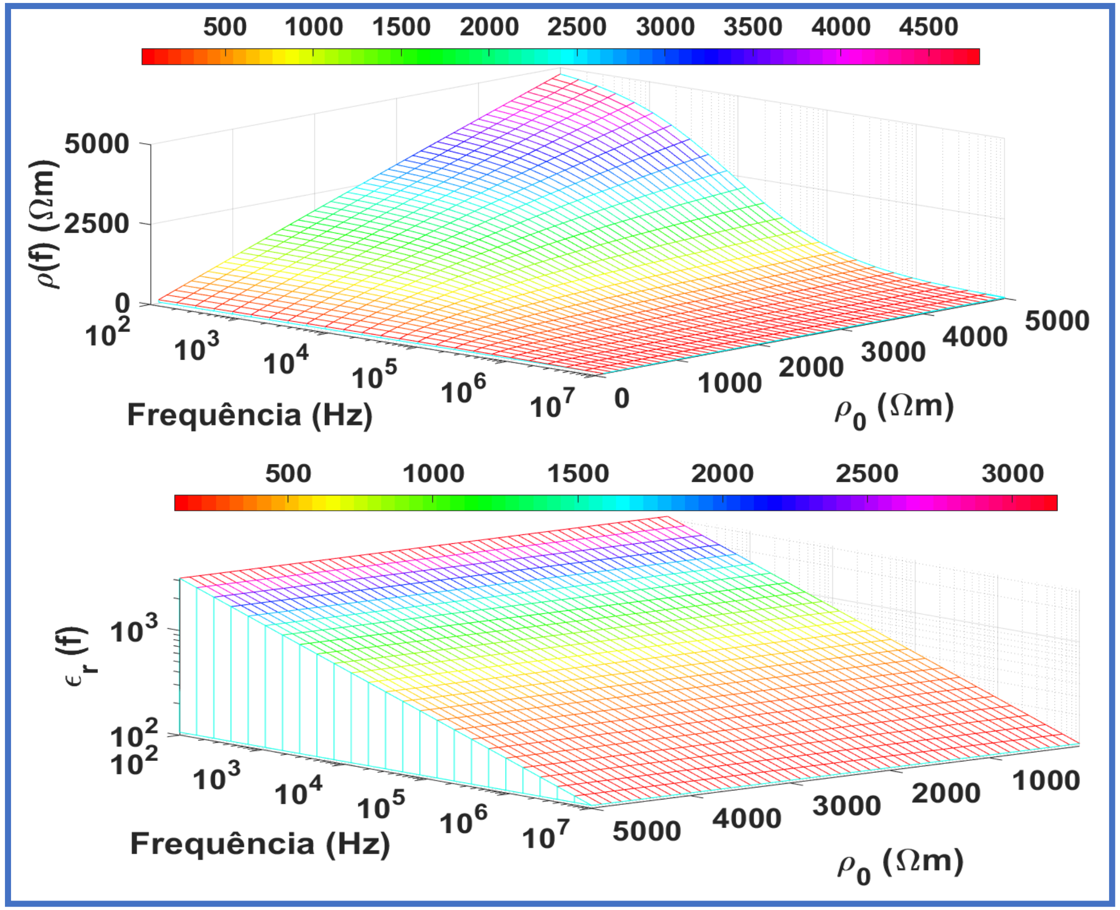
$$\rho(f) = \left[\frac{1}{\rho_0} + 2\pi\epsilon_0 \sum_{n=1}^{13} a_n F_n \frac{(f/F_n)^2}{1 + (f/F_n)^2}\right]^{-1}$$

P

$$\sigma(f) + j\omega\epsilon(f) = \sigma_0 + \Delta_i \left[\cot\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) + j\right] \left(\frac{\omega}{2\pi 10^6}\right)^{\alpha}$$

$$\varepsilon_r(f) = \Delta_i \left(\frac{f}{2\pi.10^6}\right)^{\alpha'} \frac{(f)^{-1}}{\varepsilon_0}$$



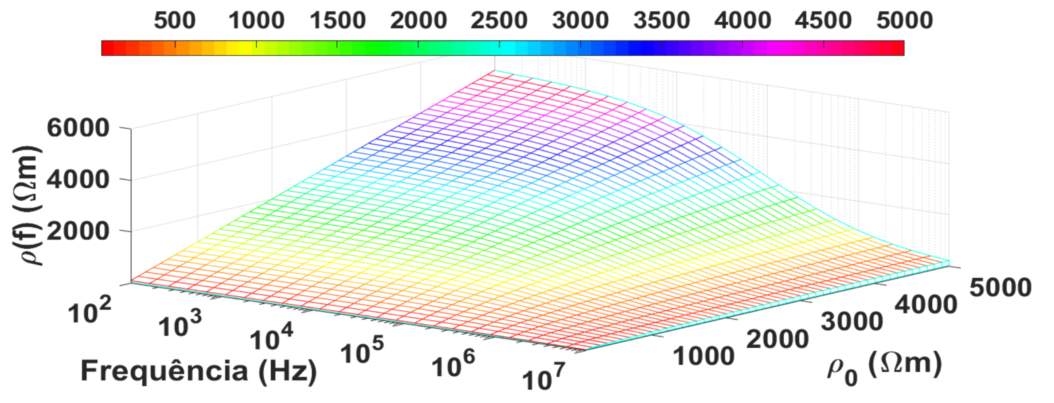


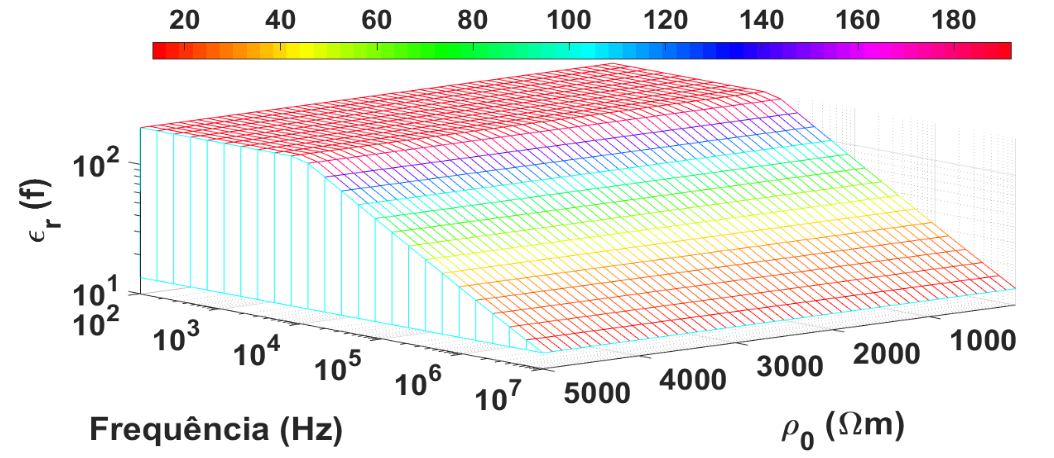
Modelagem do solo: Frequência

VA

$$\rho(f) = \frac{\rho_0}{1 + [1,2 \cdot 10^{-6} \rho_0^{0,73}][(f-100)^{0,65}]}$$

$$\epsilon_r(f) = \begin{cases} 7,6 \cdot 10^3 f^{-0,4} + 1,3 & f \geq 10 \text{ kHz} \\ 192 & f < 10 \text{ kHz} \end{cases}$$

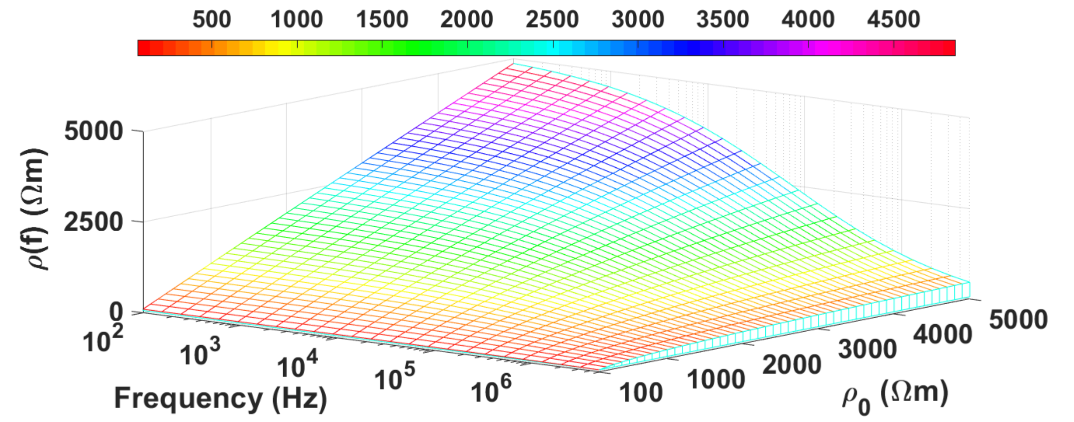


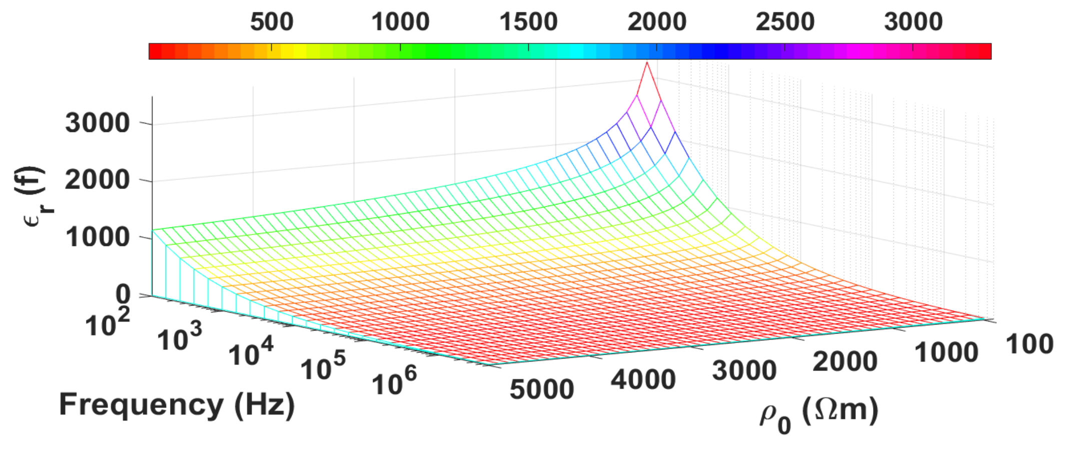


CIGRÈ

$$\rho(f) = \frac{\rho_0}{1 + 4.7 \cdot 10^{-6} \rho_0^{0.73} f^{0.54}}$$

$$\epsilon_r(f) = 9.5 \cdot 10^{-4} \rho_0^{-0.27} f^{-0.46} + 12$$

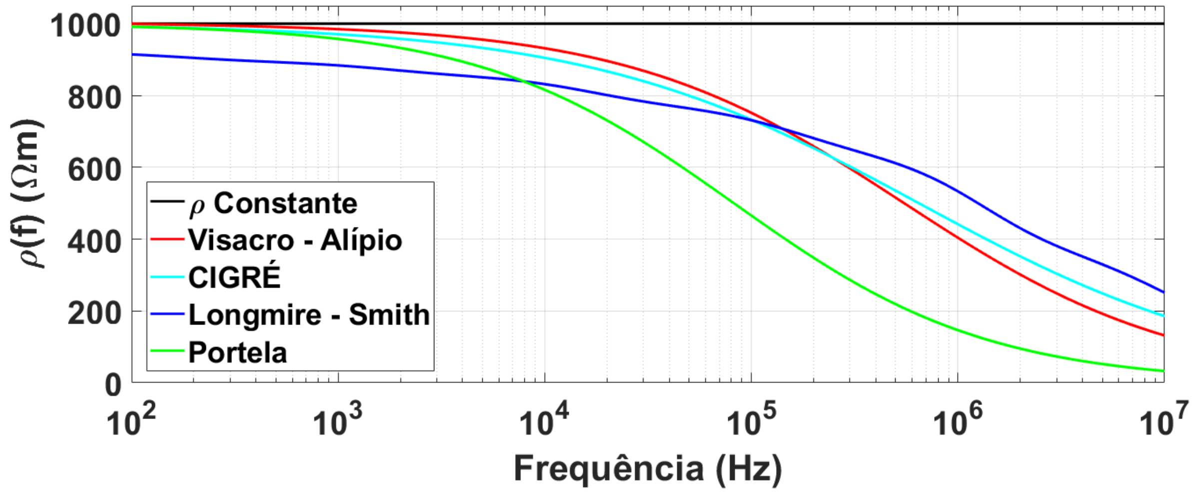


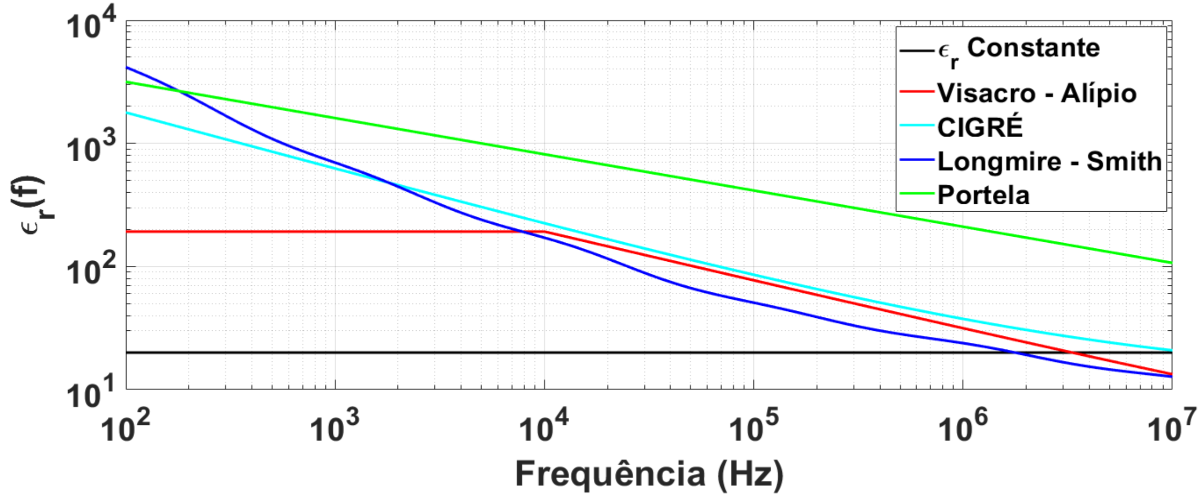


Modelagem do solo: Frequência

Comparação dos modelos

- ρ_0 igual a 1.000 Ωm.
- Nas baixas frequências, os modelos estudados não apresentam uma grande variação em relação ao modelo constante.
- Em baixas frequências a permissividade fica distante da curva calculada pelo parâmetro constante.
- Elas se aproximam nas altas frequências.
- Solo se torna mais condutivo em altas frequências.





Modelagem do solo: Frequência e umidade

S

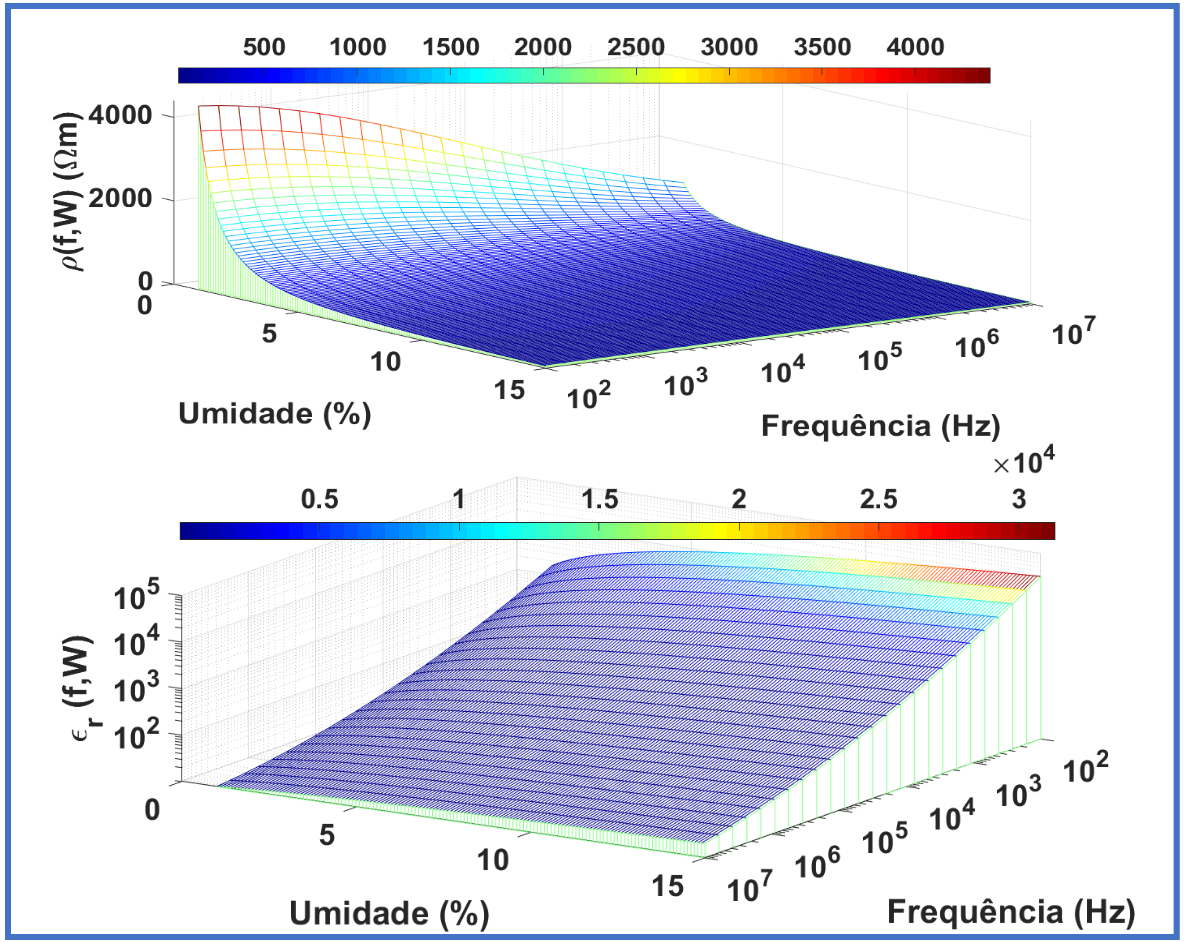
$$\rho(f,W) = 10^{0.604-1.64W_1+0.062f_1-0.062W_1^2+0.07W_1f_1-0.021f_1^2}$$

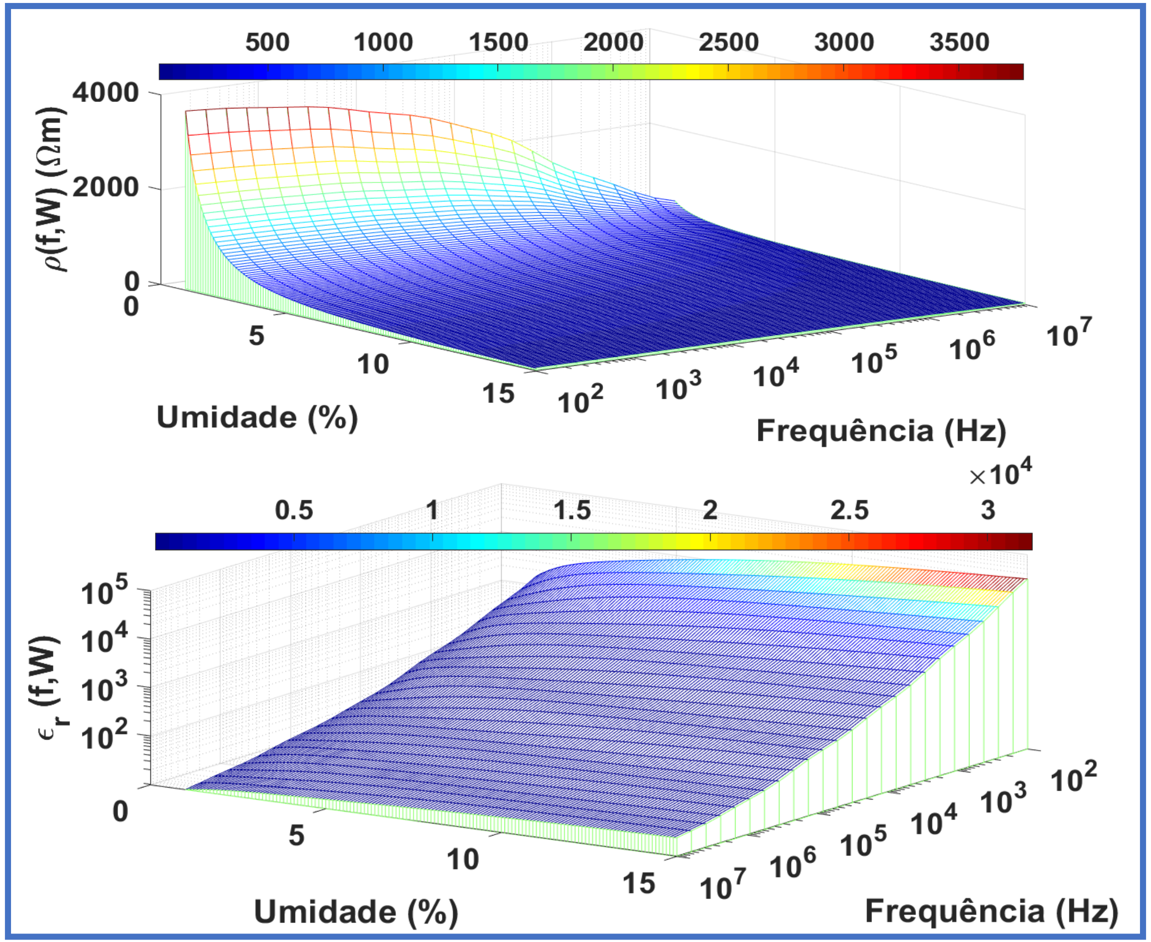
$$\varepsilon(f,W) = 10^{4.905+1.308W_1-0.971f_1+0.111W_1^2-0.168W_1f_1+0.059f_1^2}$$

LS

$$\rho_g(f,W) = \left[\beta_0 + \varepsilon_0 \sum_{n=1}^{13} a_n\beta_n \frac{(\omega/\beta_n)^2}{1+(\omega/\beta_n)^2}\right]^{-1}$$

$$\varepsilon_r(f,W) = \varepsilon_\infty + \sum_{n=1}^{13} \frac{a_n}{1+(\omega/\beta_n)^2}$$





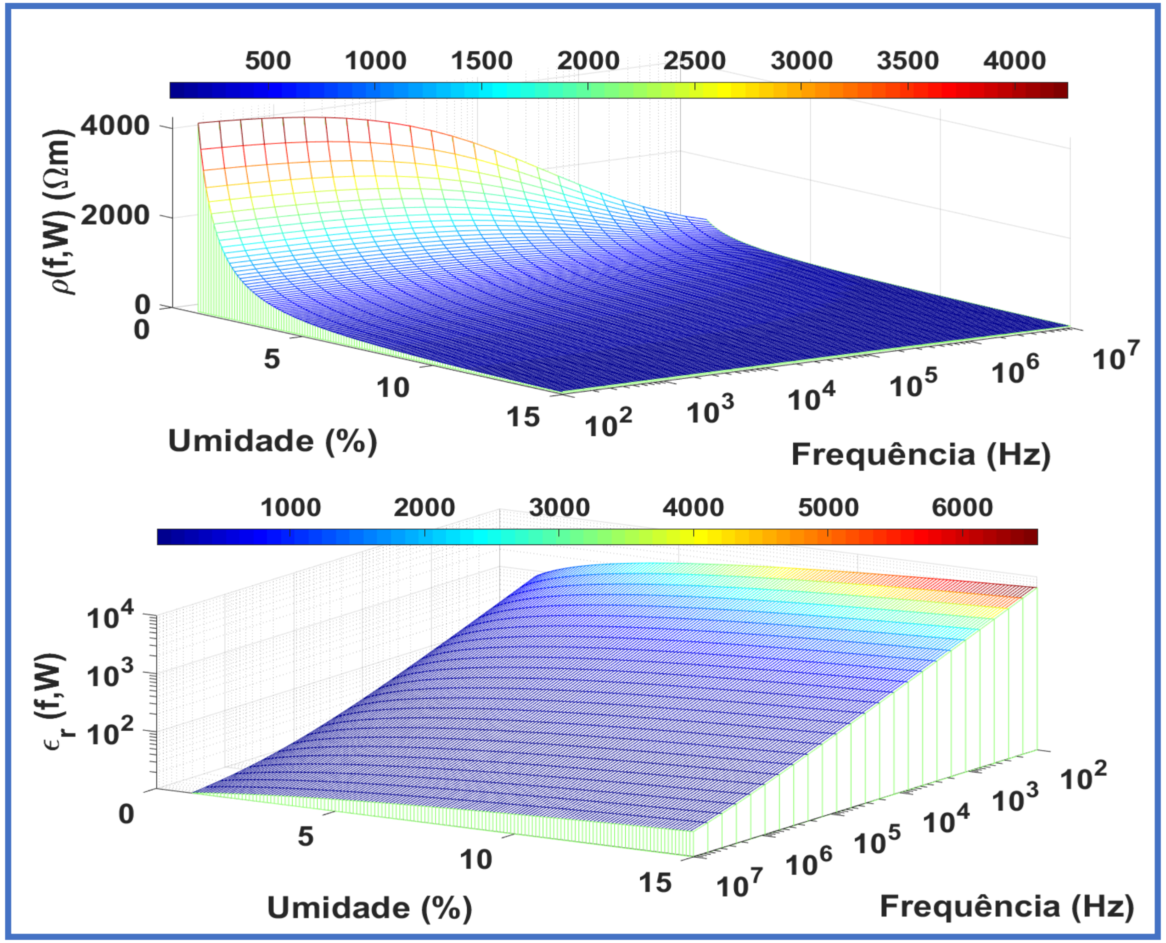
Modelagem do solo: Frequência e umidade

M

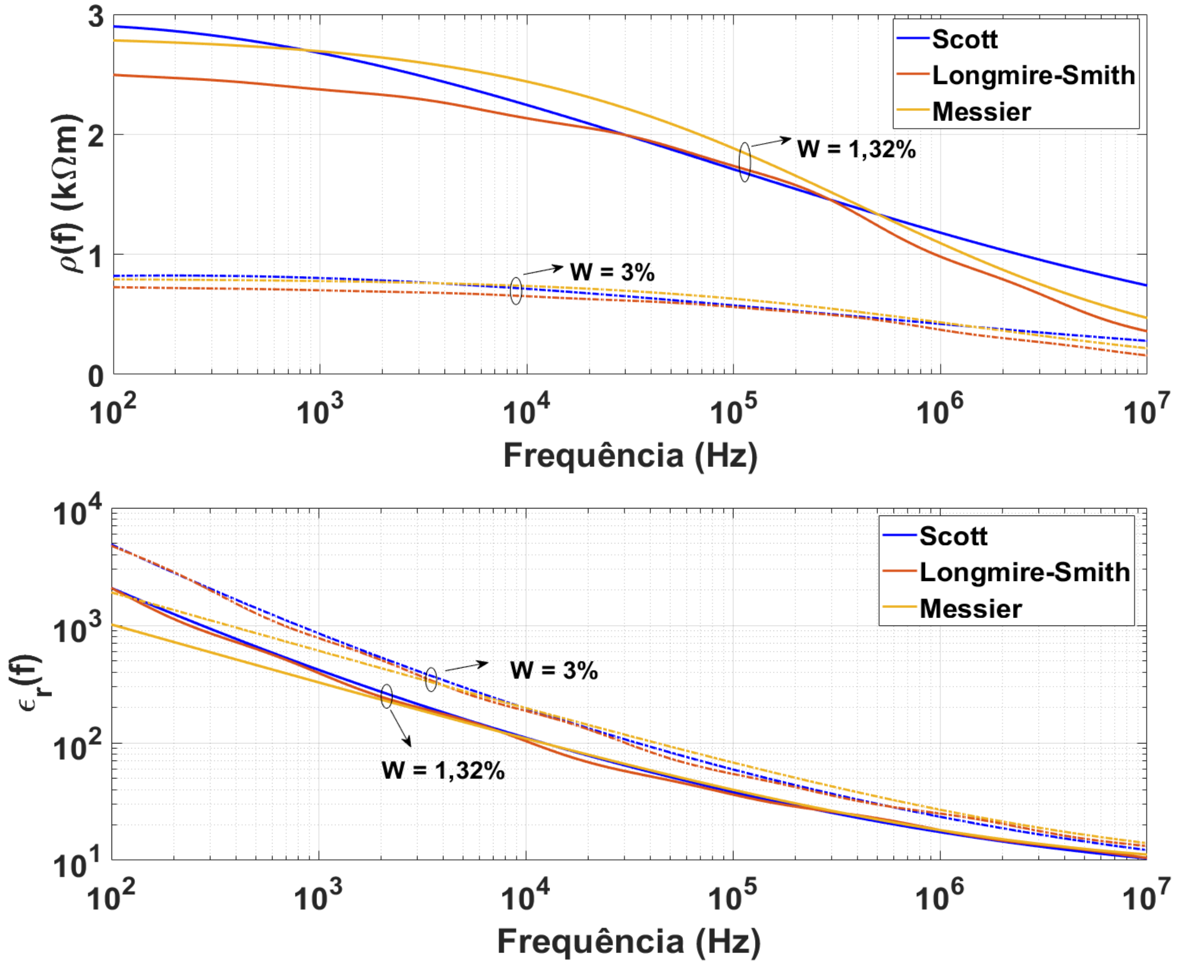
$$\rho_g(f,W) = \frac{\rho_0}{1+\sqrt{4\pi f \varepsilon_\infty \rho_0}}$$

$$\rho_0(W) = \frac{1}{8\times 10^{-3}(\frac{W}{10})^{1.54}}$$

$$\varepsilon_r(f,W) = \frac{\varepsilon_\infty}{\varepsilon_0}\left(1+\sqrt{\frac{1}{\pi f \varepsilon_\infty \rho_0}}\right)$$



Comparação dos modelos



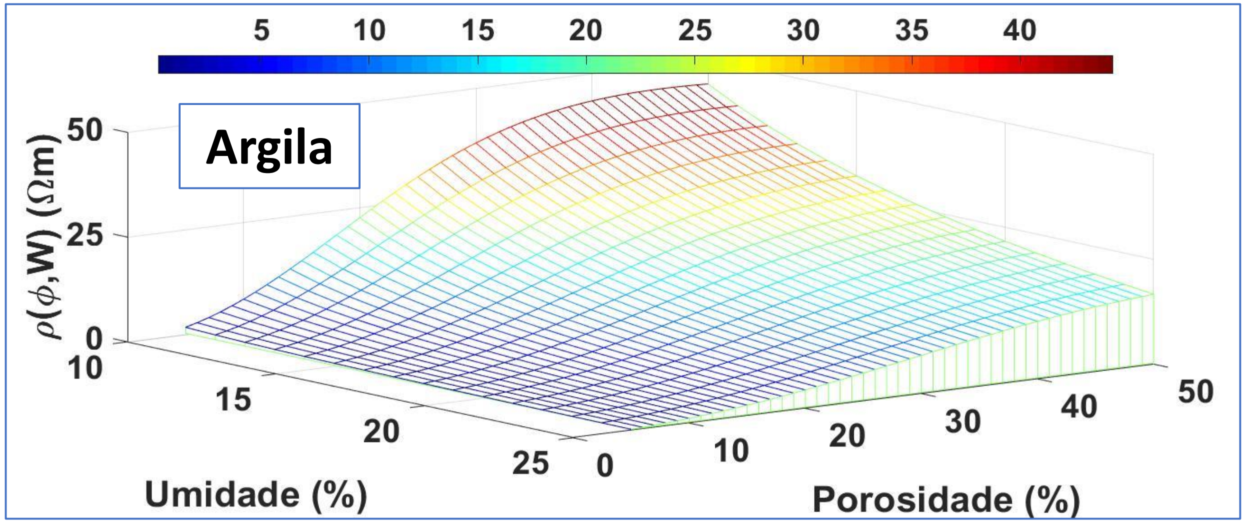
Modelagem do solo: Porosidade e umidade

Archie

$$\rho(W,\phi) = \sigma^{-1} = \left[\sigma_{dry} + \left(\frac{\sigma_{sat} - \sigma_{dry}}{\phi^2} - \eta\right) W^2 + \eta\phi W\right]^{-1}$$

$$\eta = \alpha\frac{f_{clay}}{f_{sand} + f_{silt}} + \beta$$

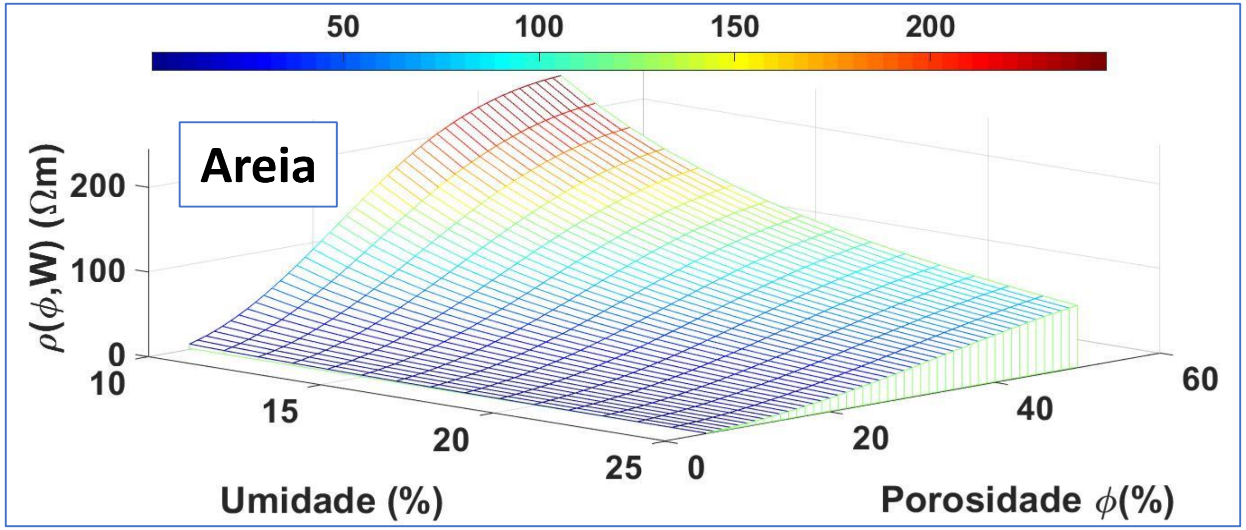
$\alpha = 0{,}654$ $\beta = 0{,}018$



Dois tipos de solo:

- **Argila**: $\sigma_{sat} = 0,15$, $\sigma_{dry} = 0,005$, $f_{clay} = 30$, $f_{sand} = 40$, $f_{silt} = 30$

- **Areia:** $\sigma_{sat} = 0,04$, $\sigma_{dry} = 0,0004$, $f_{clay} = 5$, $f_{sand} = 90$, $f_{silt} = 5$

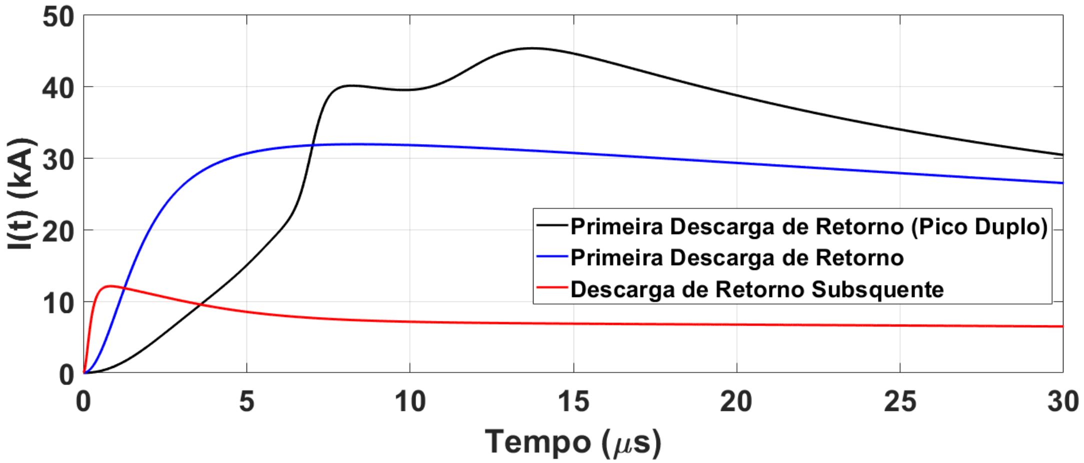


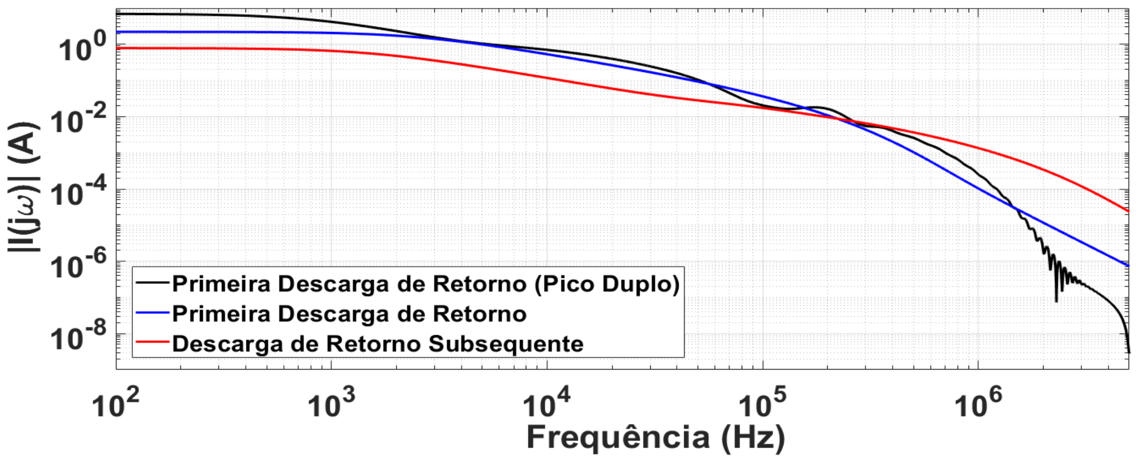
Descargas Atmosféricas

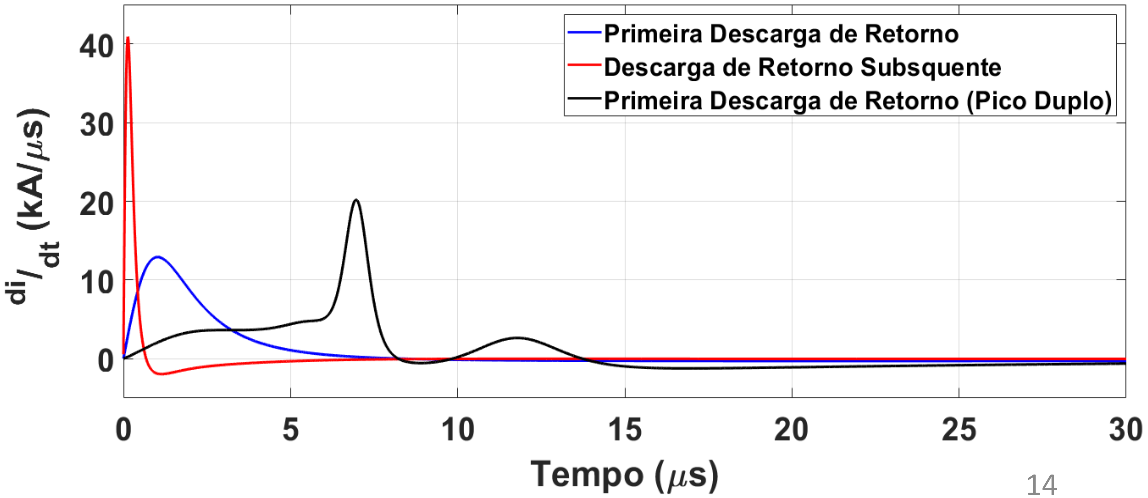
Fonte: https://www.nssl.noaa.gov/education/svrwx101/lightning/ Acessado: 21/11/2022

$$I(t) = \sum_{k=1}^{i} \frac{I_0}{\eta} exp\left(\frac{-t}{\tau_{2k}}\right) \frac{(t/\tau_{1k})^{n_k}}{1+(t/\tau_{1k})^{n_k}}$$

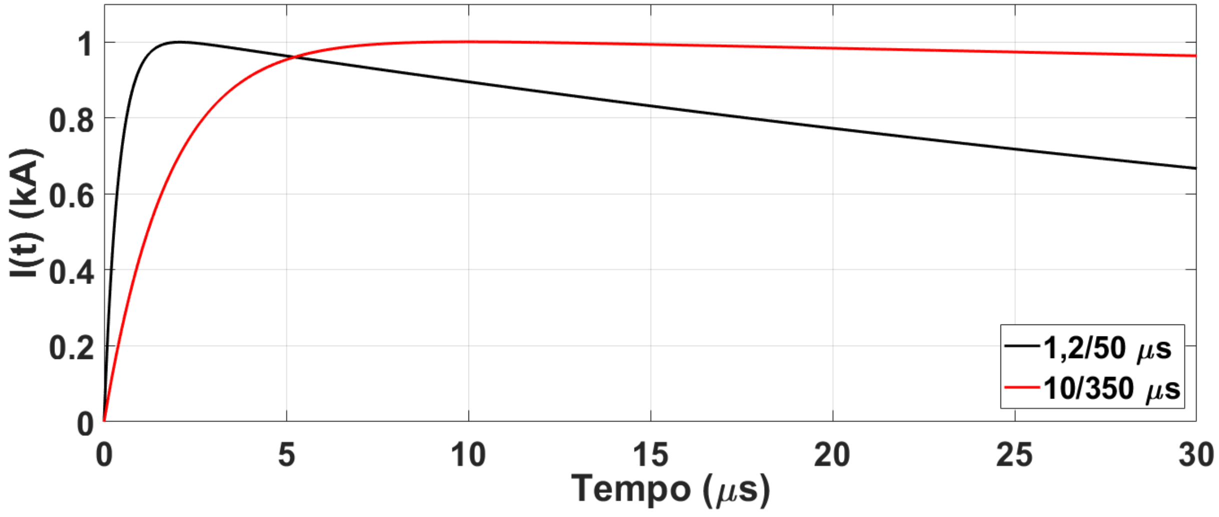
$$\eta = exp\left[-\left(\frac{\tau_{1k}}{\tau_{2k}}\right)\left(\frac{n_k \tau_{2k}}{\tau_{1k}}\right)^{1/n_k}\right]$$



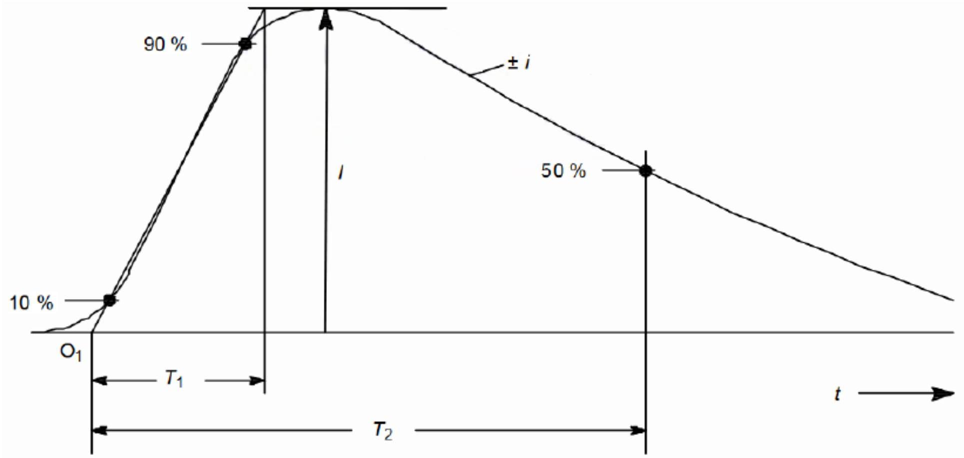


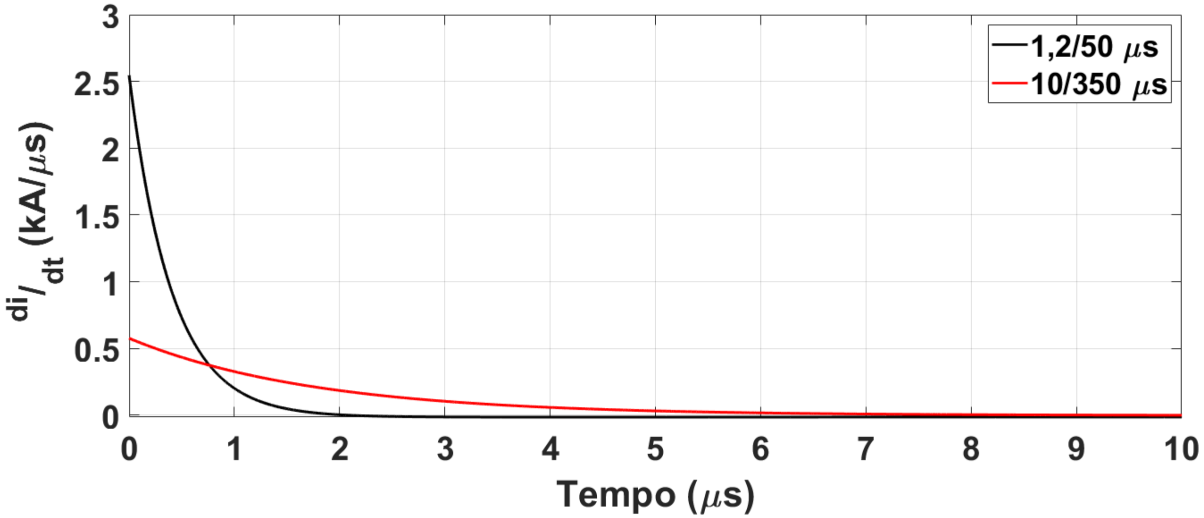


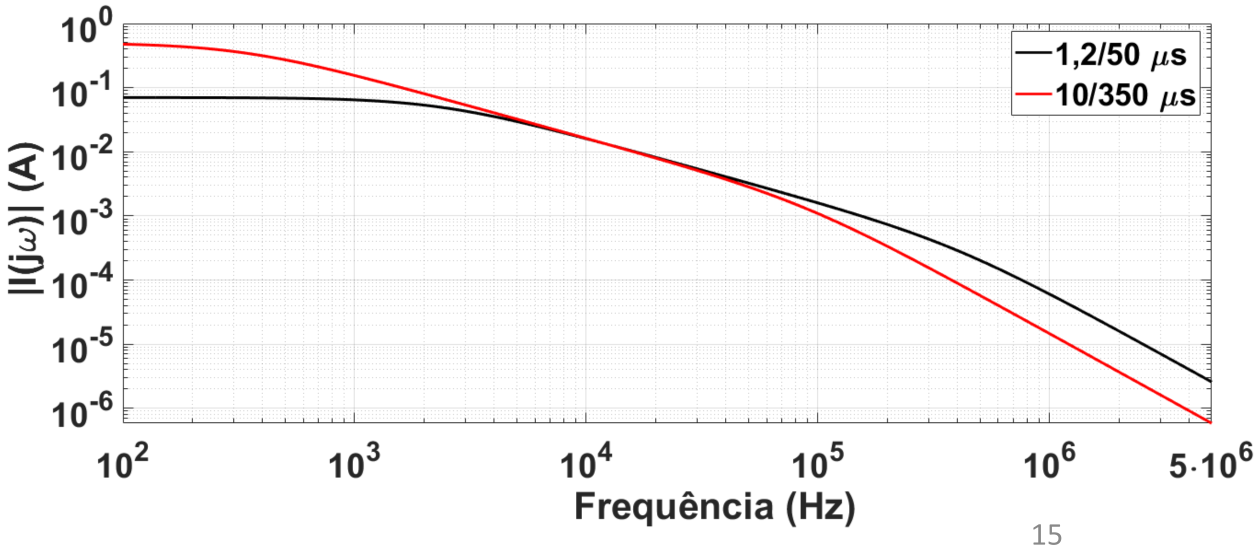
Descargas Atmosféricas



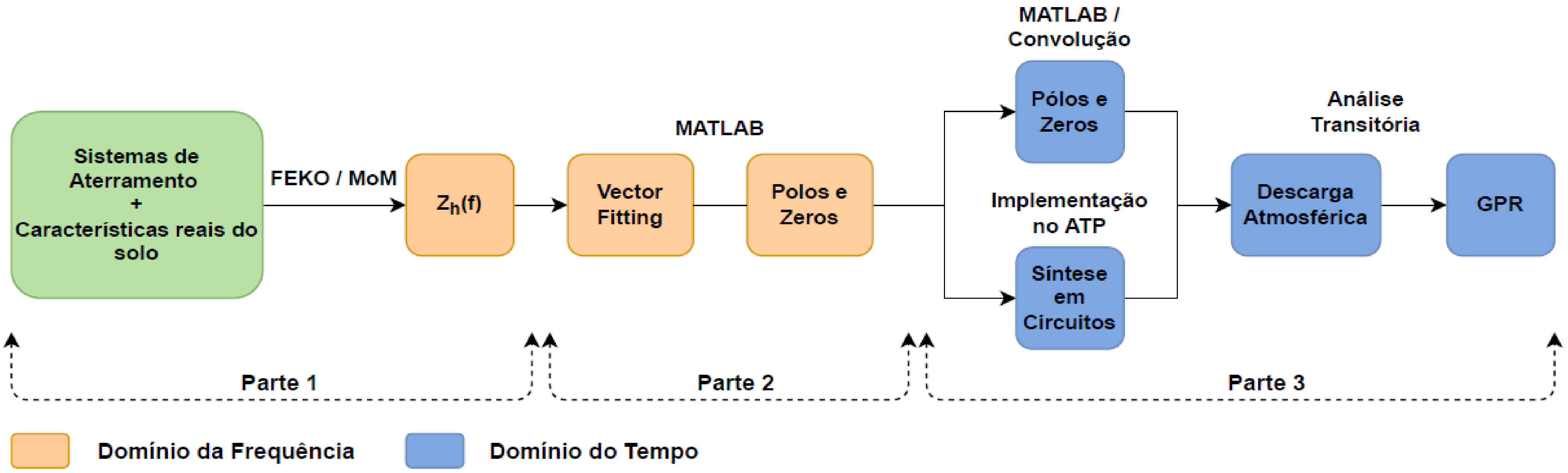
$$I(t) = A\left(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\right)$$







Metodologia



Parte 1: Cálculo da impedância harmônica Z_h a partir dos parâmetros do solo e da topologia do aterramento, utilizado FEKO®.
Parte 2: Uso do *Vector Fitting* para aproximar Z_h por meio de polos e zeros.
Parte 3: Cálculo do GPR no domínio do tempo por convolução, ou pela representação por circuito elétrico implementado em programas de transitórios eletromagnéticos, ATPDraw®.

Metodologia: FEKO/MoM

Cálculo da impedância harmônica (Zh)

Equações de Maxwell

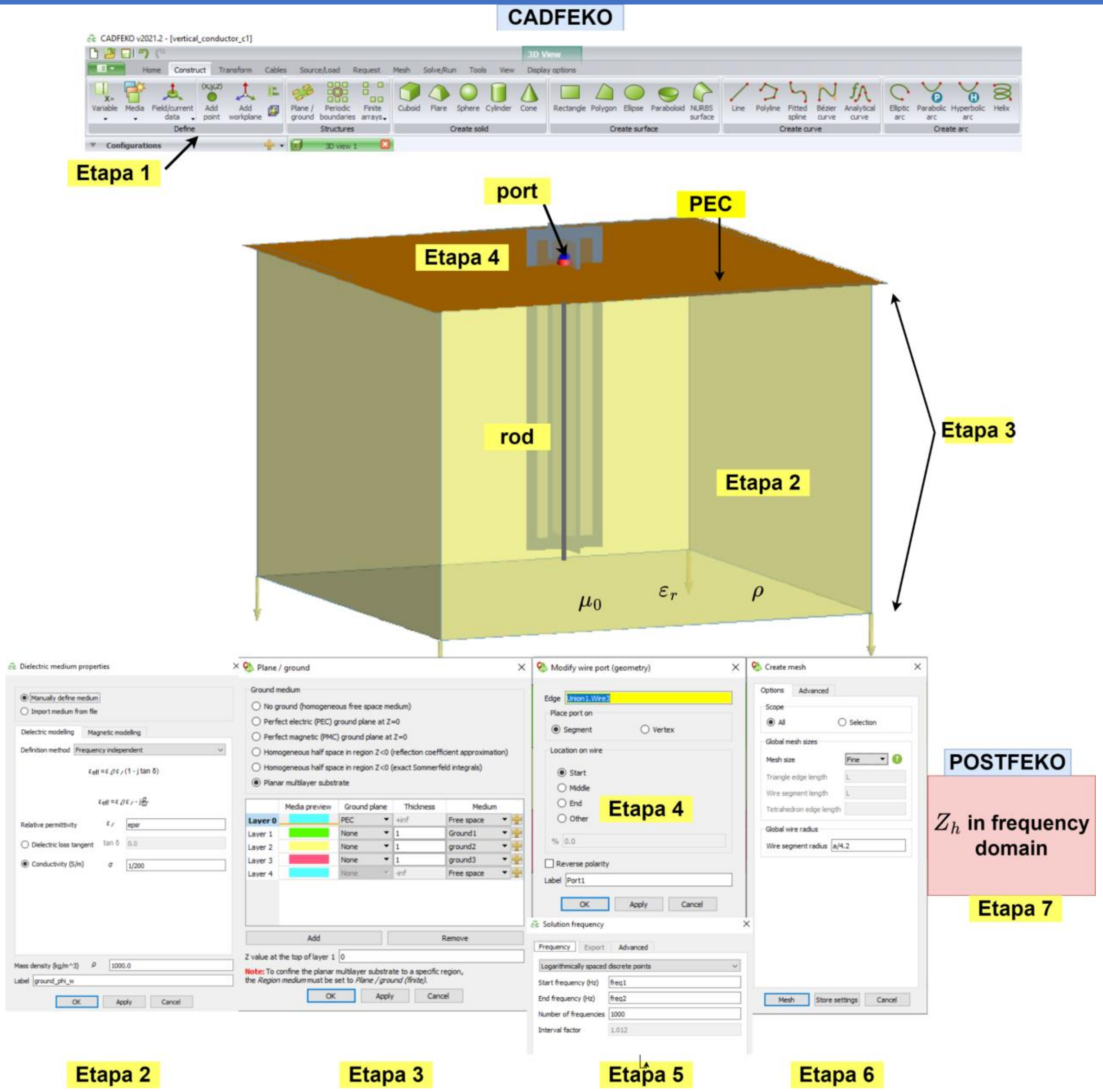
$$\vec{E}(\omega) = -\nabla\varphi - j\omega\vec{A} - \varepsilon^{-1}\nabla\times\vec{F}$$

$$\vec{H}(\omega) = -\nabla\psi - j\omega\vec{F} - \mu^{-1}\nabla\times\vec{A}$$

$$Z_h(j\omega) = \frac{V_S}{I_{in}(j\omega)}$$

$$V_s = 1\angle 0^\circ$$

Método dos Momentos (MoM)

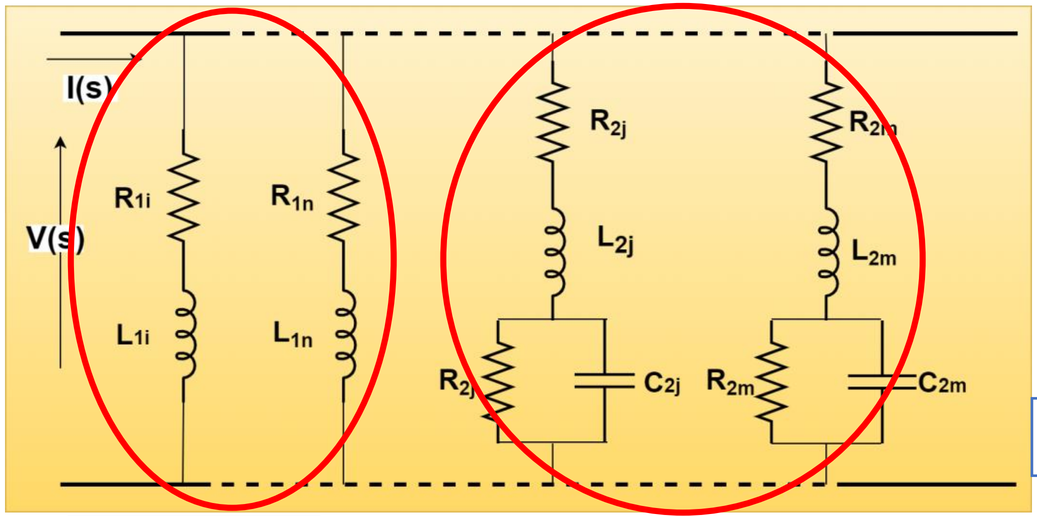


Metodologia: Cálculo do GPR

Vector Fitting

$$Z_h(s) \approx Z_{fit}(s) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{c_k}{s + a_k} \right) + d + bs$$

Representação por circuito



Polos reais

Polos complexos

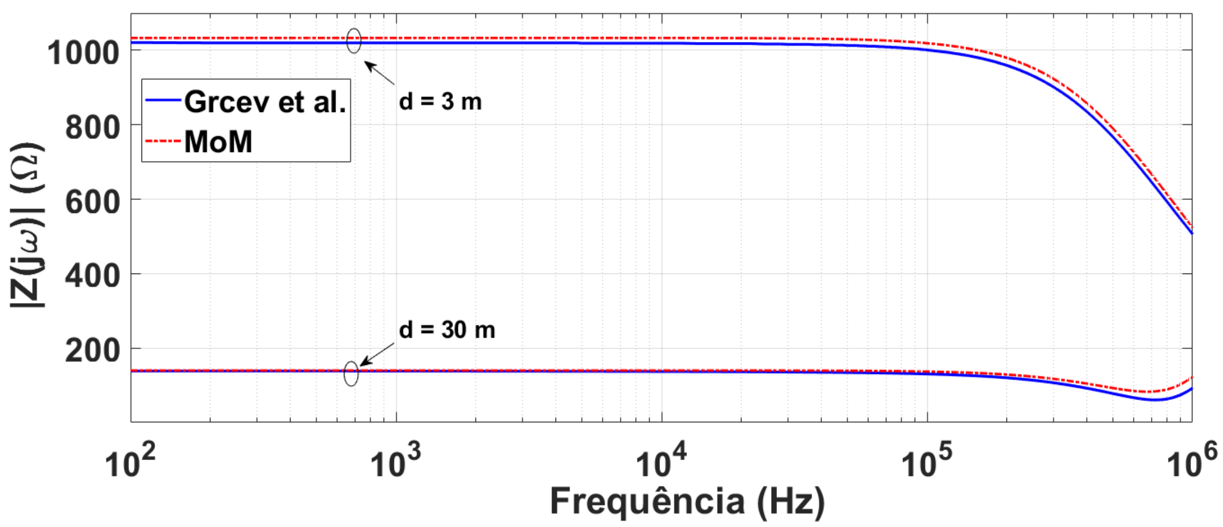
Convolução

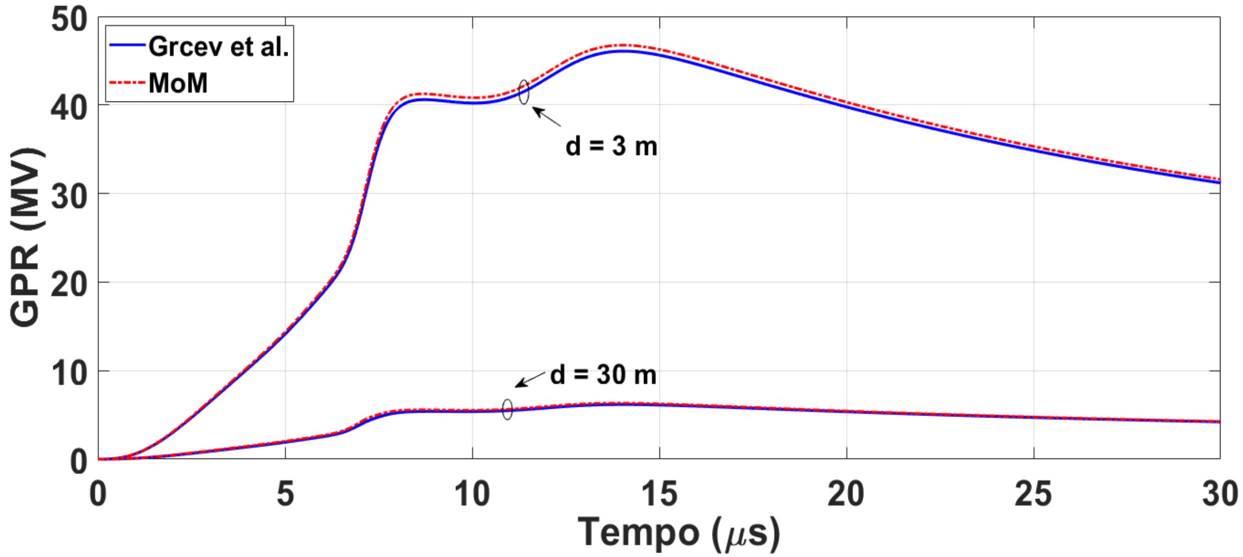
Por meio dos pólos (p_k) e resíduos (r_k), pode-se calcular v(t) pelo método recursivo dado por :

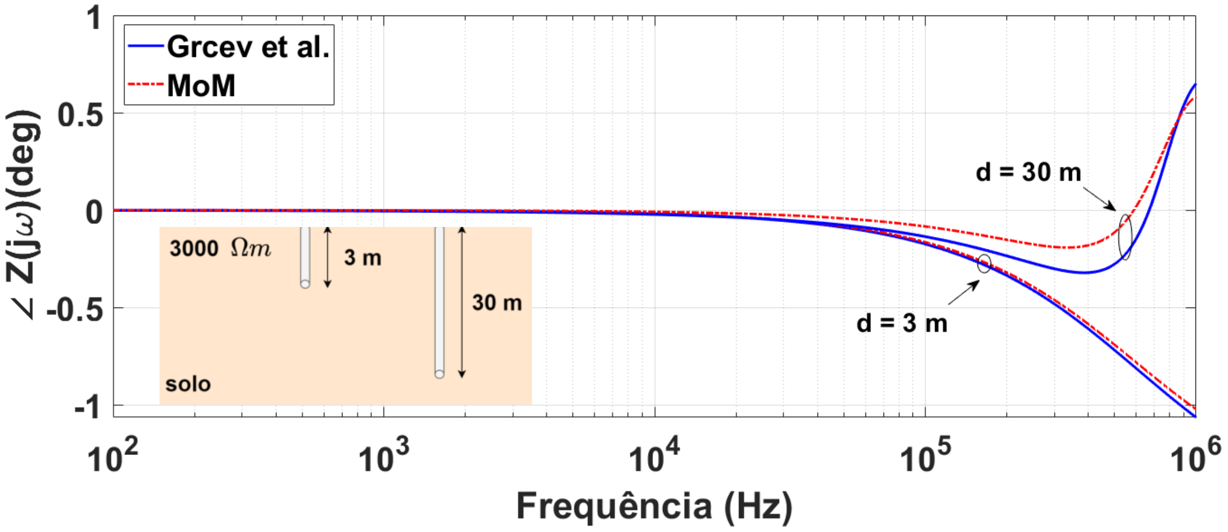
$$v(t) = \pounds^{-1}\left\{Z_h(s) \times \pounds\left\{i(t)\right\}\right\} = z(t) * i(t)$$

$$v(t) = \alpha v(t - \Delta t) + \beta i(t) + \mu i(t - \Delta t)$$

Validação





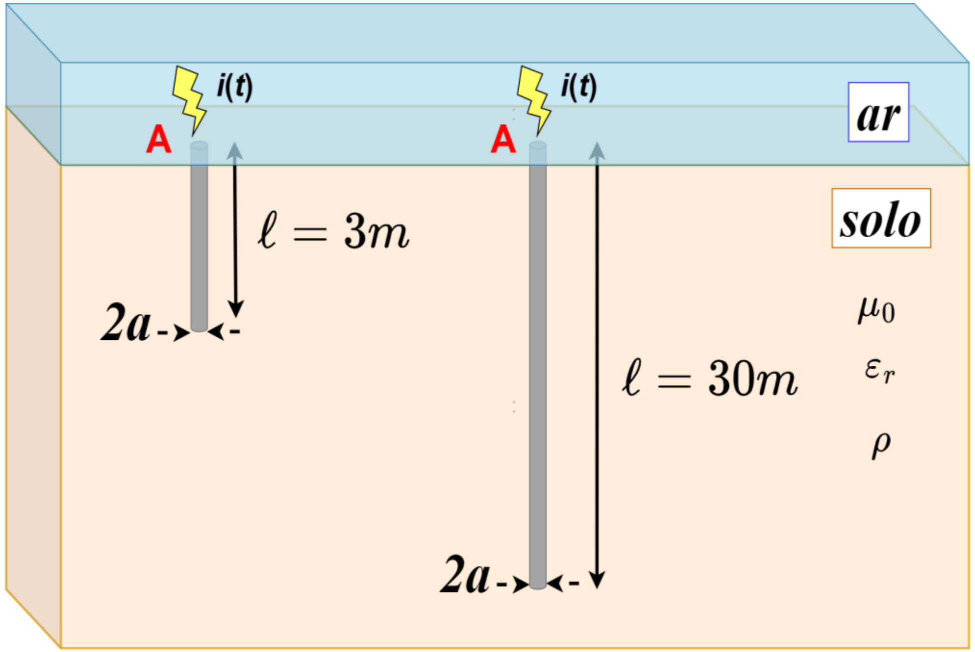


Boa concordância entre as respostas encontradas na literatura e as calculadas pelo MoM/FEKO.

Estudo de Caso

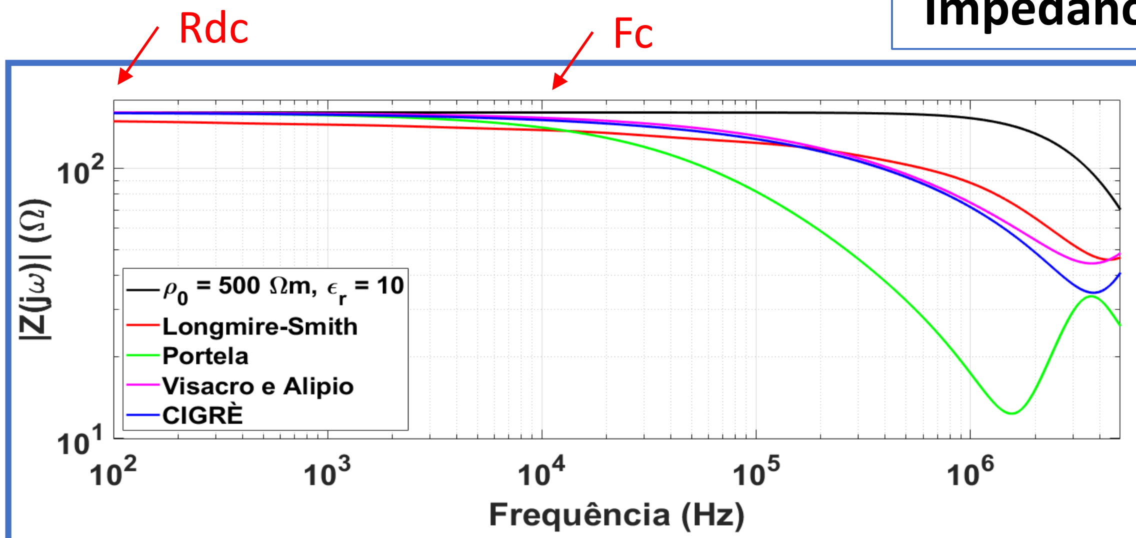
Zh e GPR

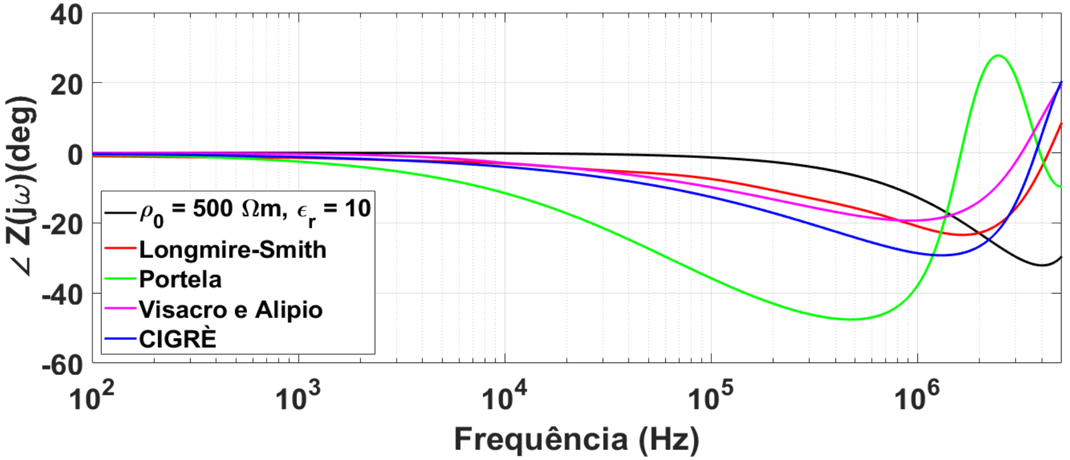
- **Modelos de solo**
  - Permissividade relativa para o modelo constante $\varepsilon_r = 10$.
  - Homogêneo
  - Permeabilidade do espaço livre igual a $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$H/m.
- **Descarga atmosférica**
  - Primeira descarga de retorno
  - Descarga de retorno subsequente
- **Duas hastes verticais**
  - Comprimento: 3 m e 30 m
  - Raio: 12,5 mm
  - Material: cobre $\rho_{Cu} = 1{,}724 \cdot 10^{-8}\Omega\mathrm{m}$

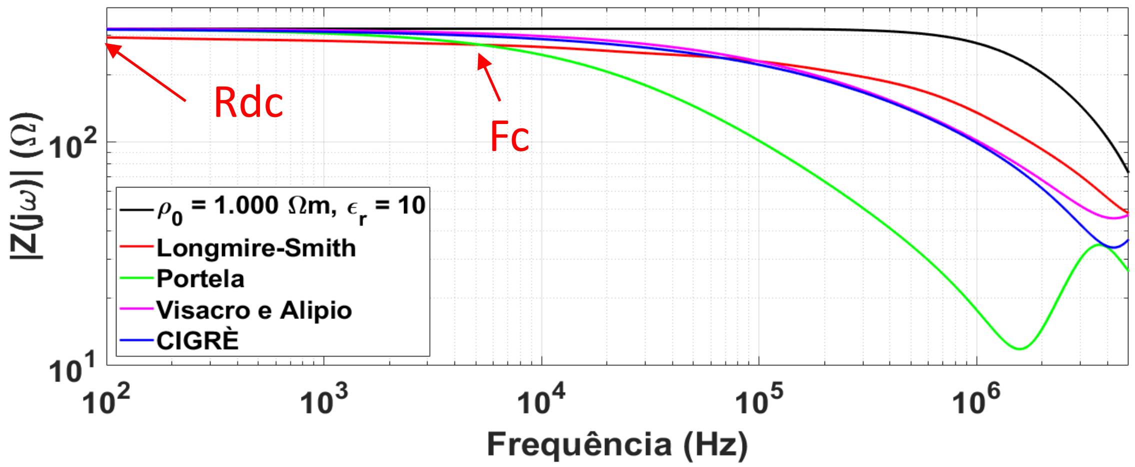


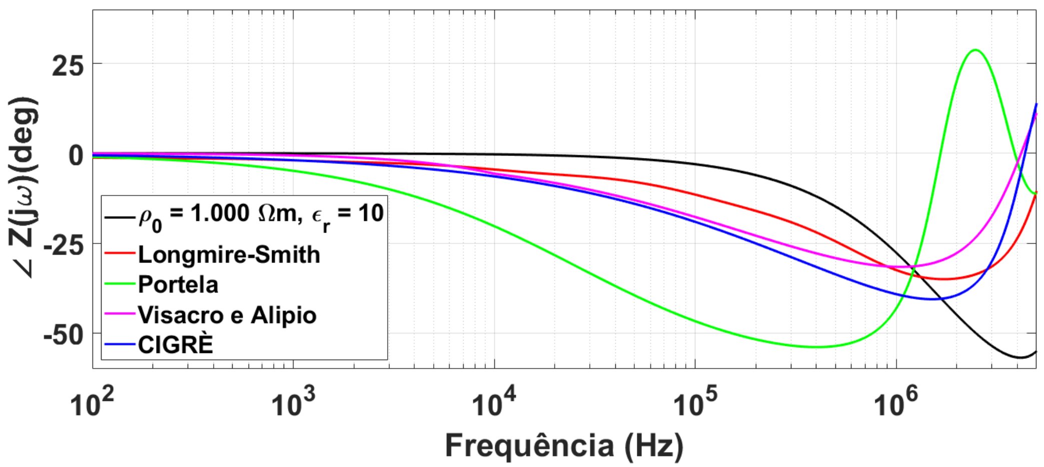
Estudo de Caso: Frequência

Impedância (Zh) - 3 m



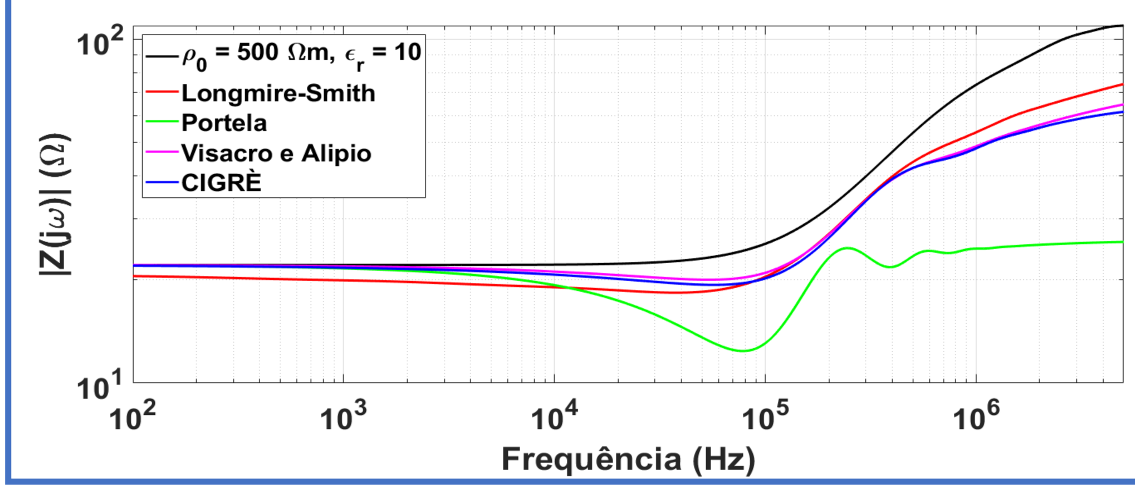


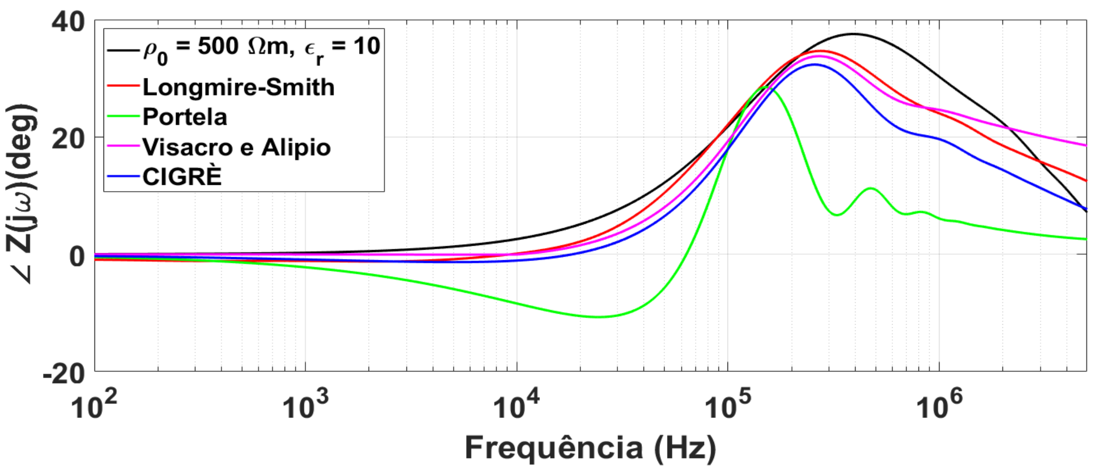


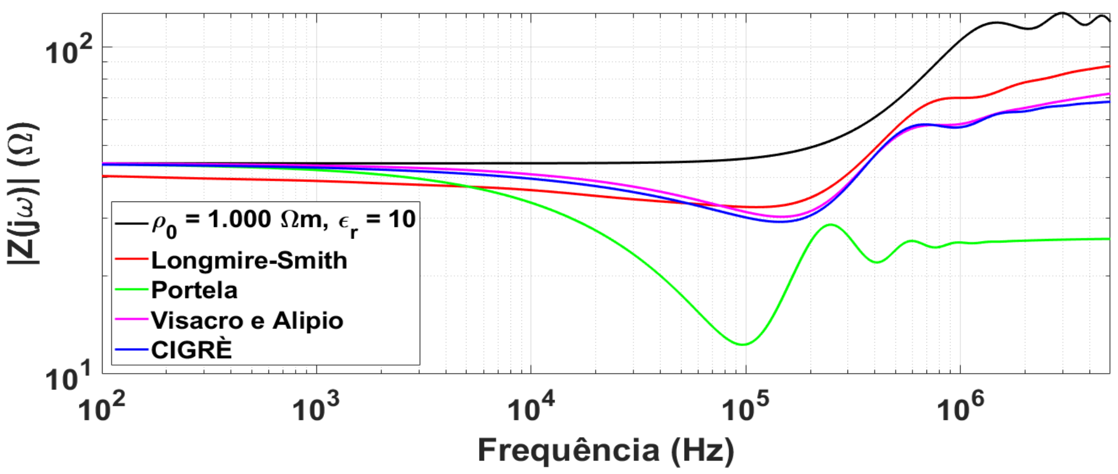


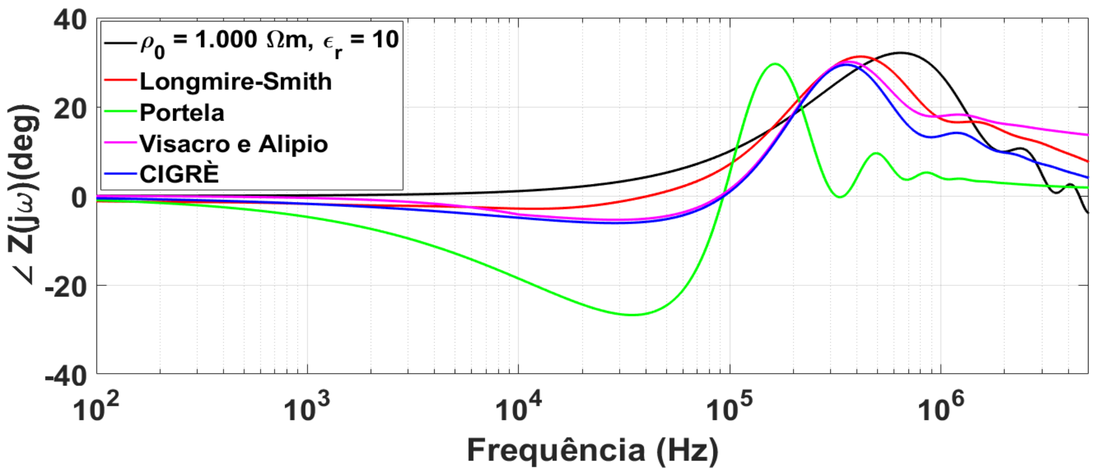
Estudo de Caso: Frequência

Impedância (Zh) - 30 m



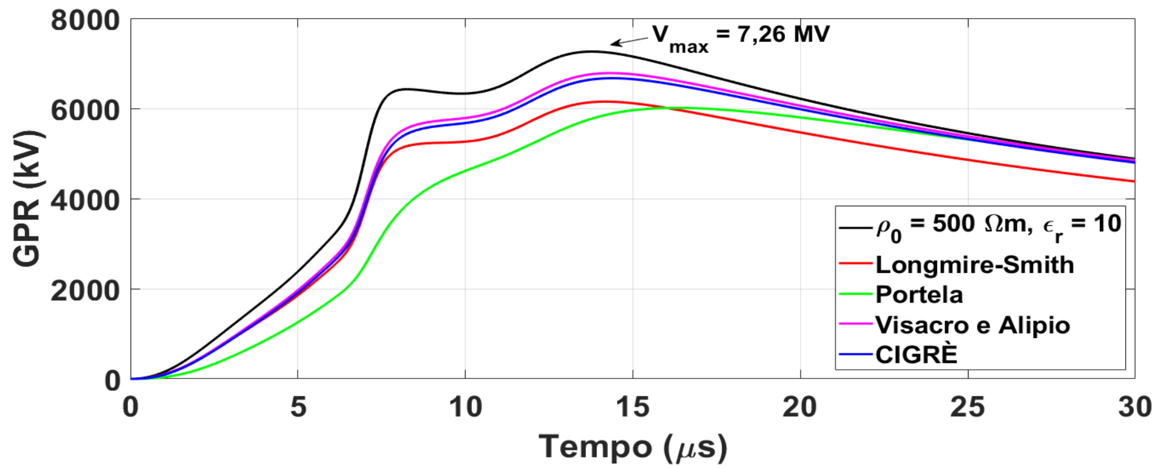


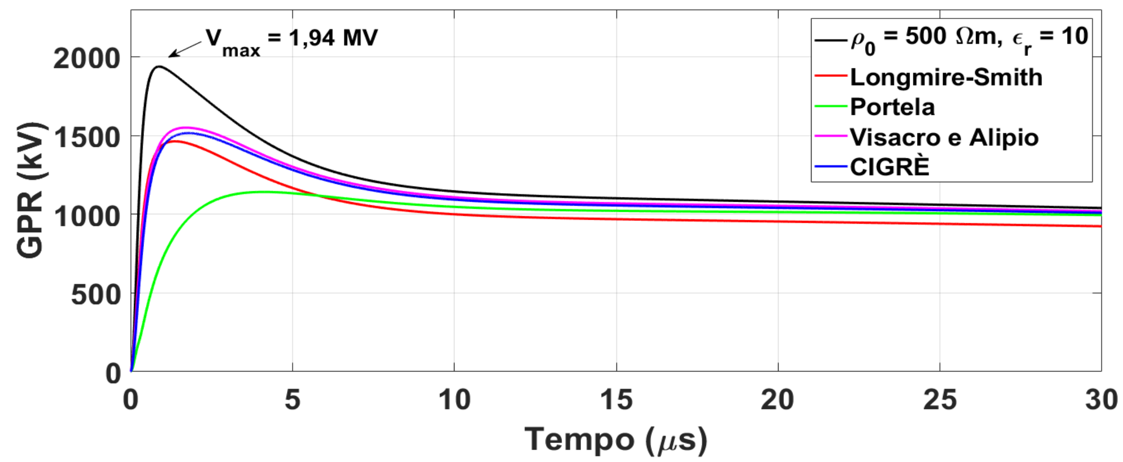


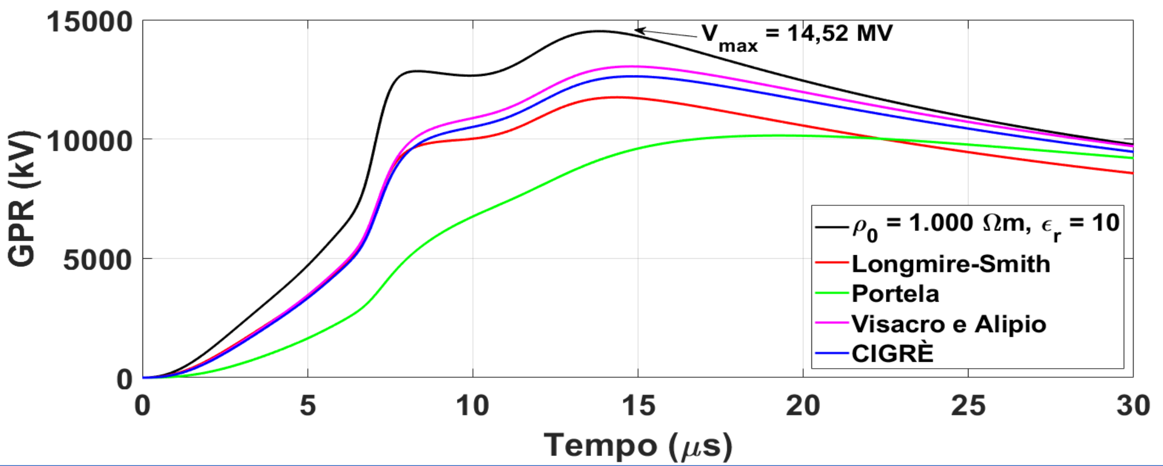


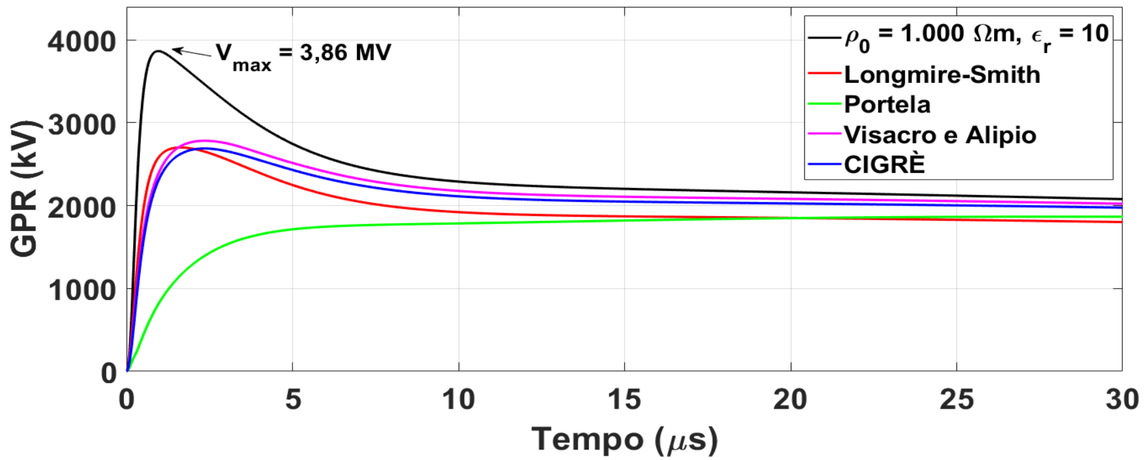
Estudo de Caso: Frequência

GPR - 3 m



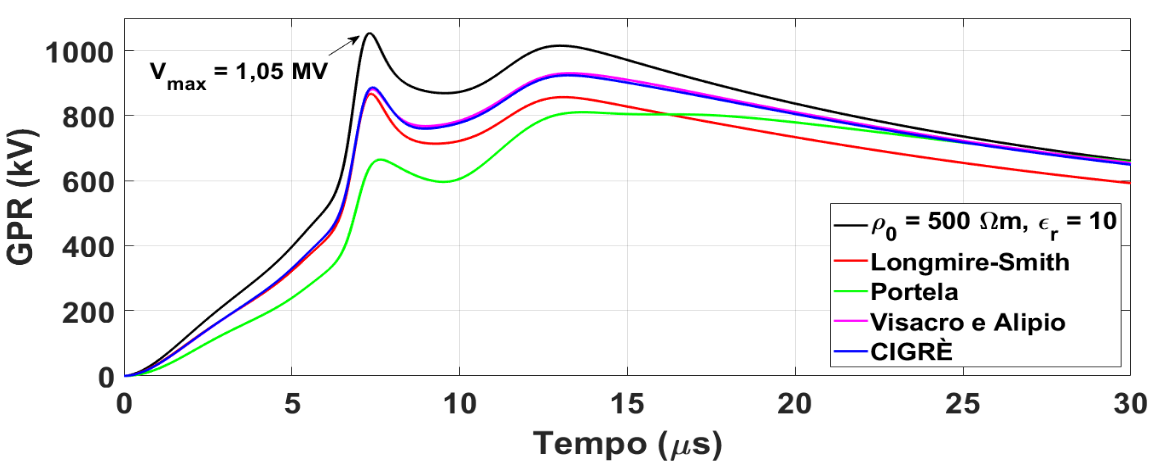


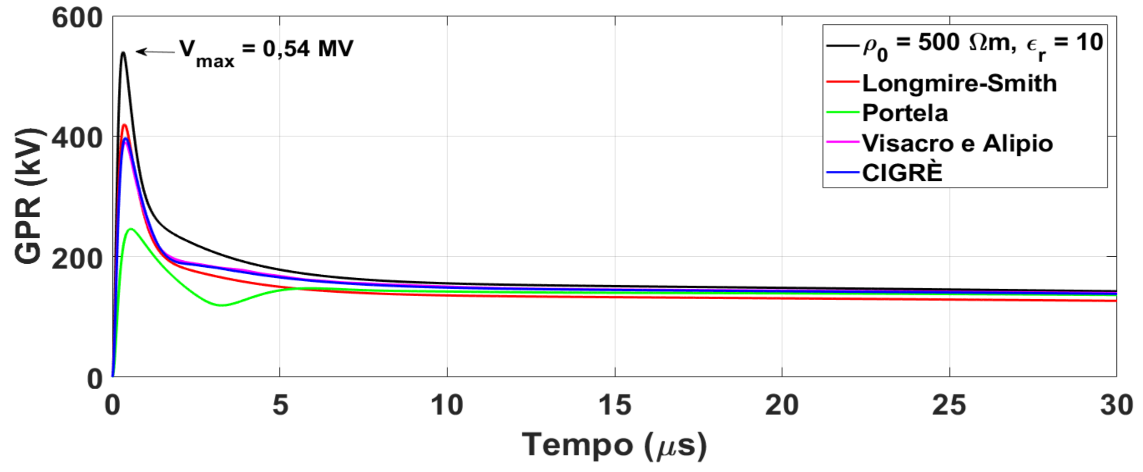


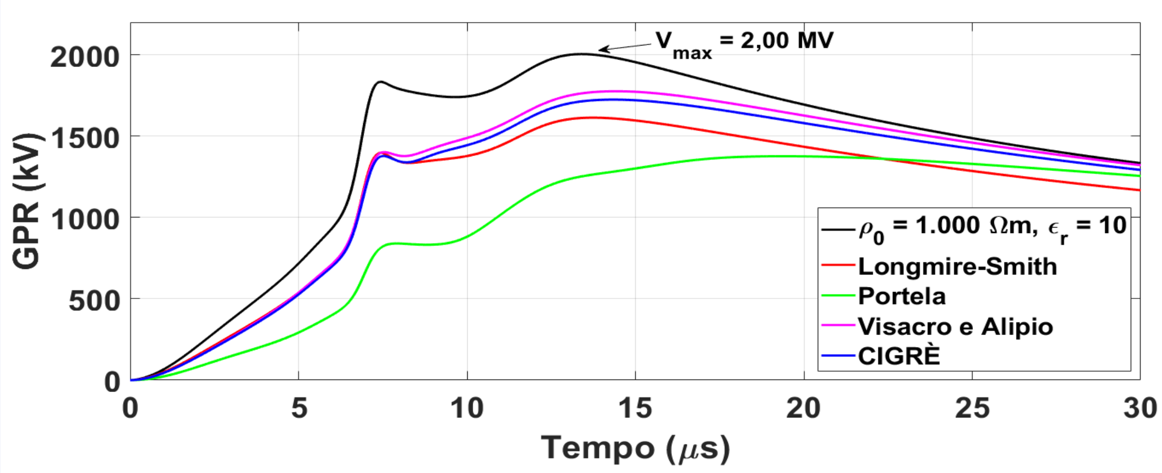


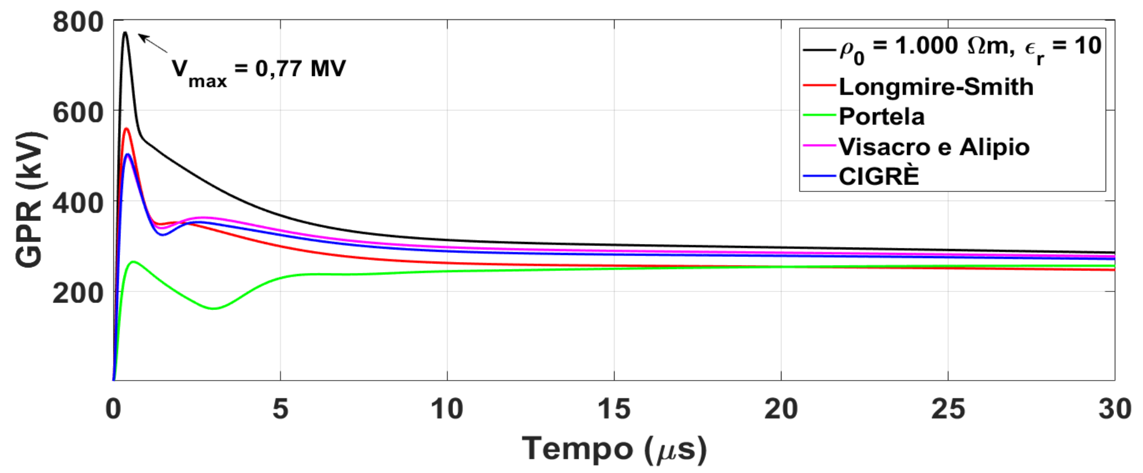
Estudo de Caso: Frequência

GPR - 30 m









Estudo de Caso: Frequência

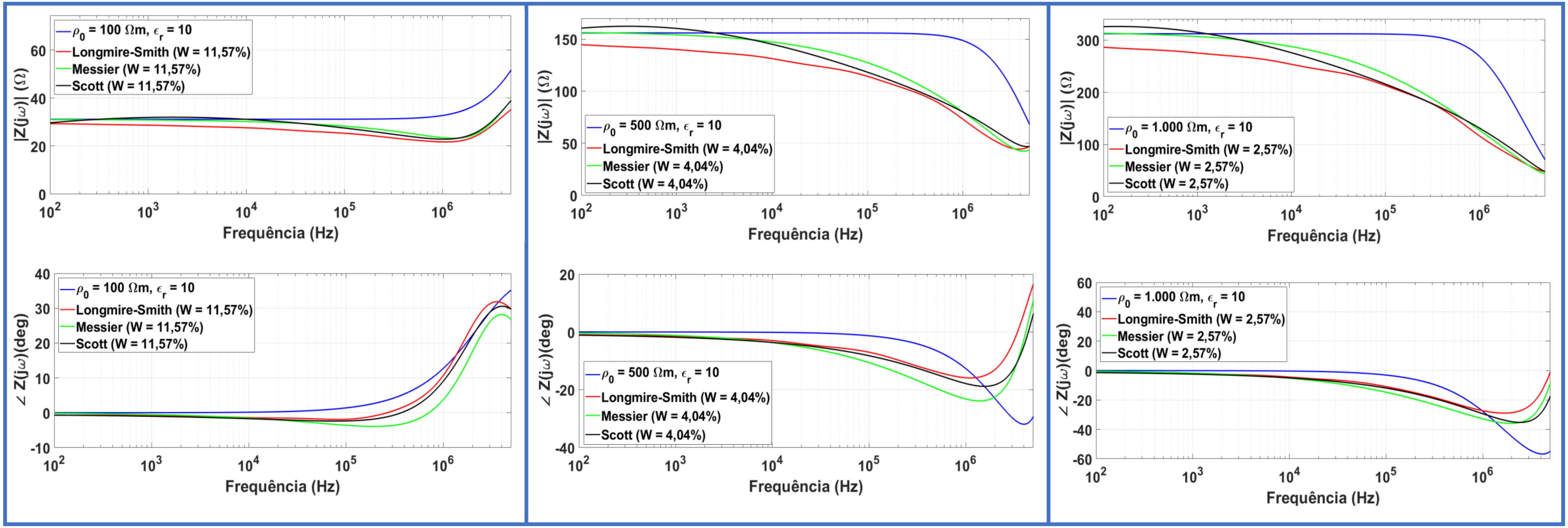
$$\delta(\%) = \frac{V_{max}^{const} - V_{max}^{FD}}{V_{max}^{const}} \times 100\%$$

- Modelos mais resistivos apresentaram maior δ
- Modelo de Portela possui o maior δ em comparação aos demais modelos
- δ é mais pronunciado para a descarga de retorno subsequente do que para primeira descarga pico-duplo

	Primeira descarga de retorno					
ℓ	ρ_0	Const.	LS	P	VA	C
3 m	500	7,26 (0)	6,15 (15)	6,01 (17)	6,78 (7)	6,66 (8)
	1.000	14,52 (0)	11,75 (19)	10,15 (30)	13,04 (10)	12,62 (13)
30 m	500	1,05 (0)	0,87 (17)	0,81 (23)	0,93 (11)	0,92 (12)
	1.000	2,00 (0)	1,61 (20)	1,38 (31)	1,77 (12)	1,72 (14)
	Descarga de retorno subsequente					
ℓ	ρ_0	Const.	LS	P	VA	C
3 m	500	1,94 (0)	1,46 (25)	1,14 (41)	1,55 (20)	1,51 (22)
	1.000	3,86 (0)	2,70 (30)	1,87 (52)	2,78 (28)	2,69 (30)
30 m	500	0,54 (0)	0,42 (22)	0,25 (54)	0,39 (28)	0,40 (26)
	1.000	0,77 (0)	0,56 (27)	0,27 (65)	0,50 (35)	0,50 (35)

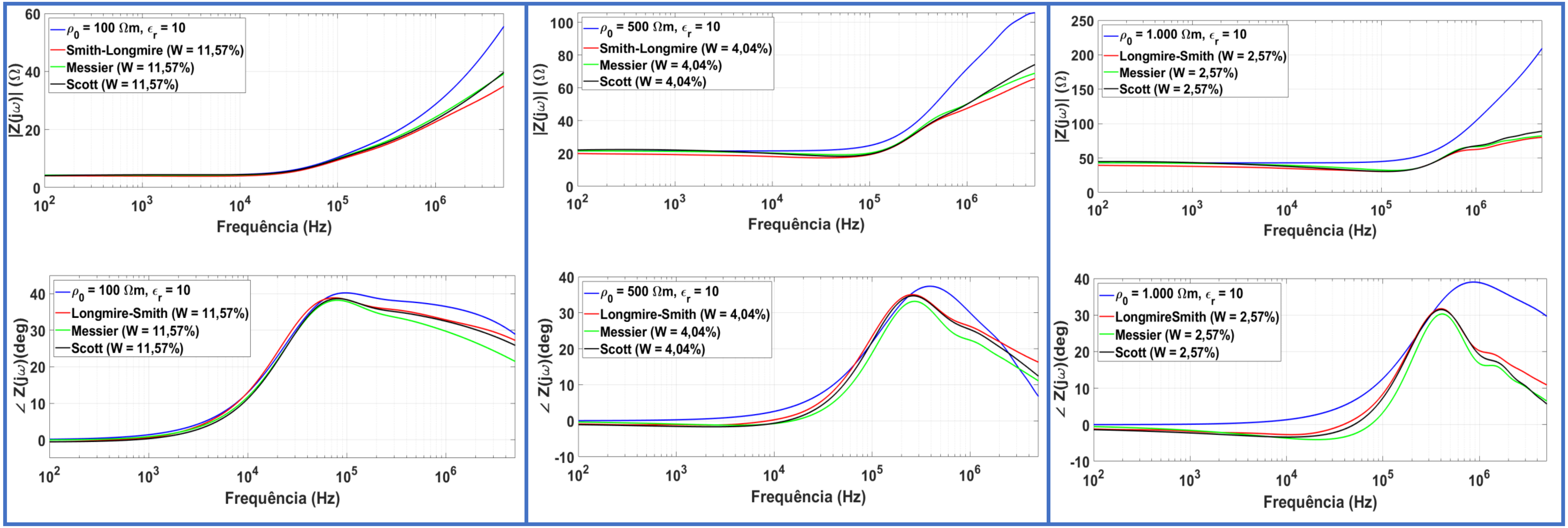
Estudo de Caso: Frequência e umidade

Impedância (Zh) - 3 m



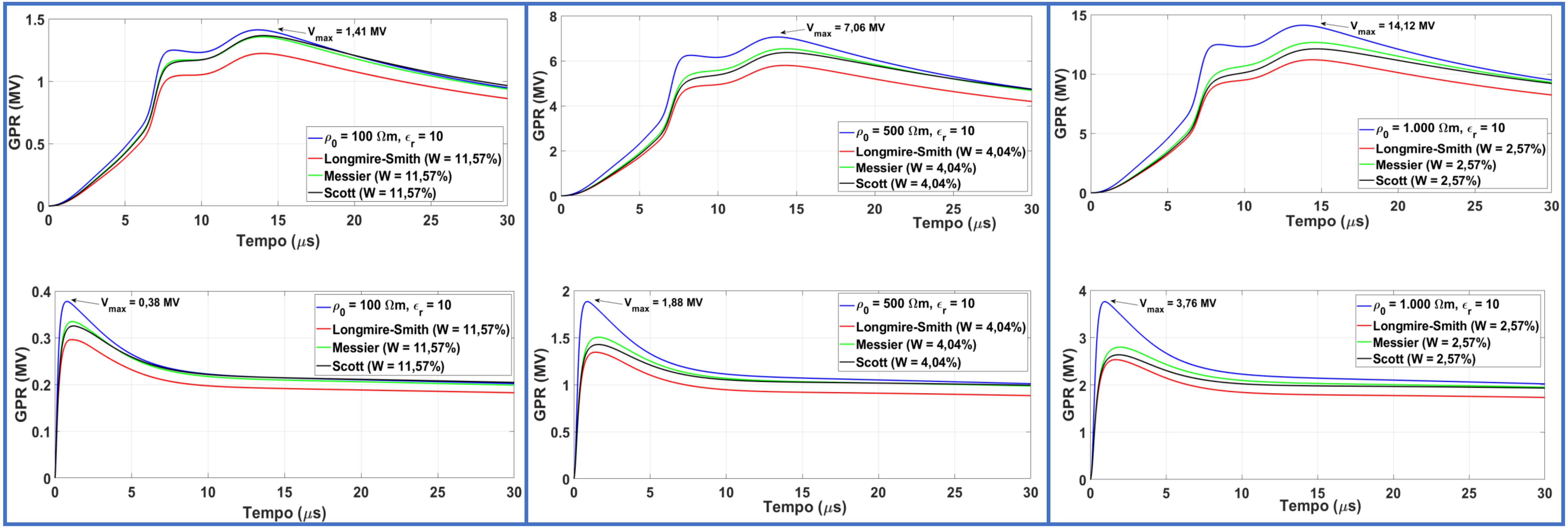
Estudo de Caso: Frequência e umidade

Impedância (Zh) - 30 m



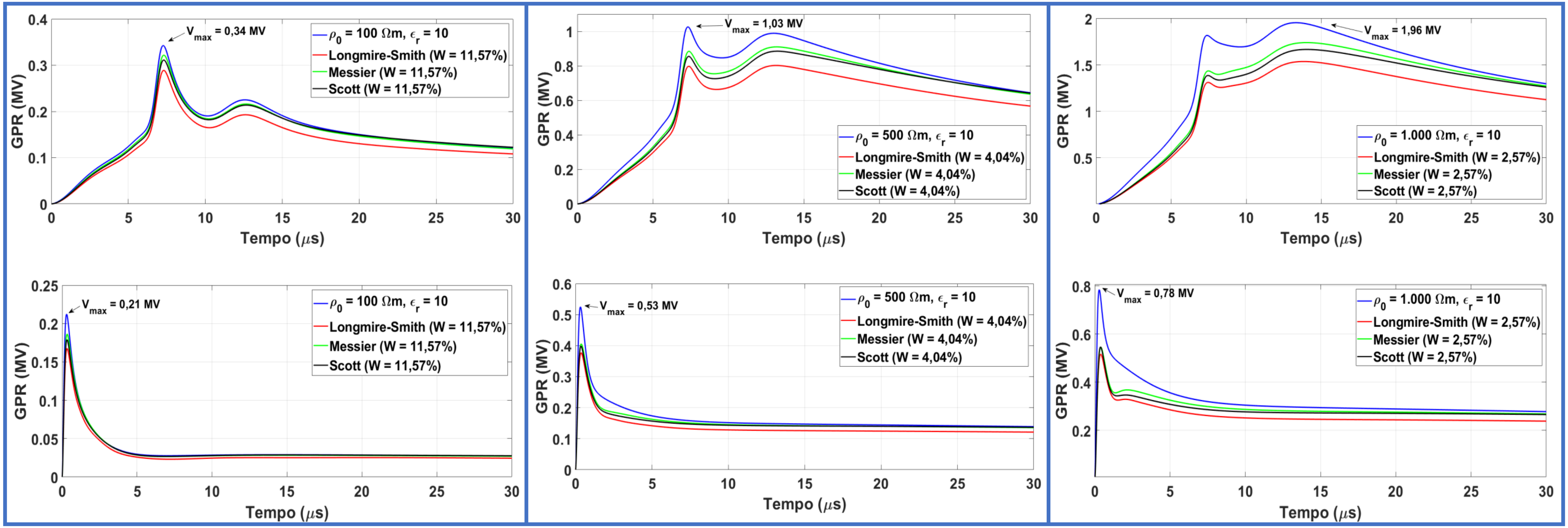
Estudo de Caso: Frequência e umidade

GPR - 3 m



Estudo de Caso: Frequência e umidade

GPR - 30 m



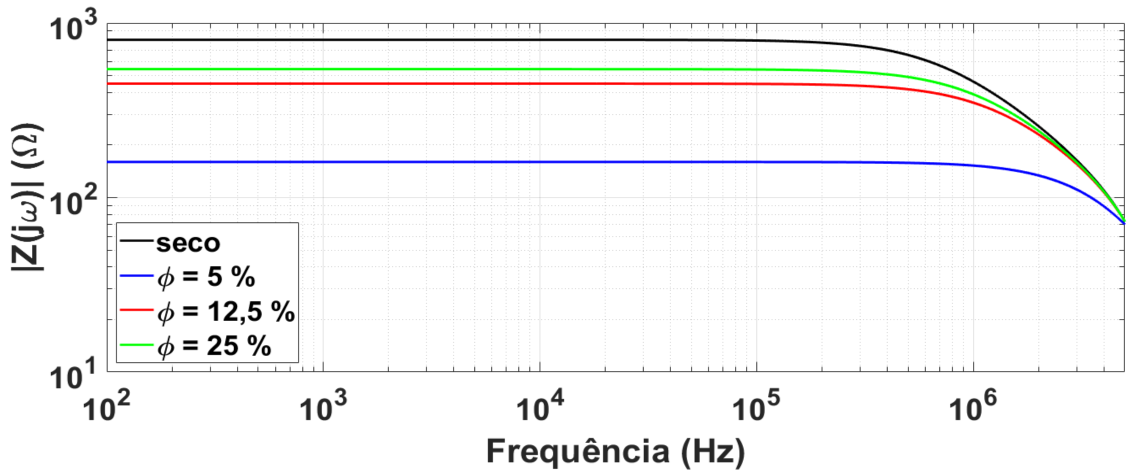
Estudo de Caso: Frequência e umidade

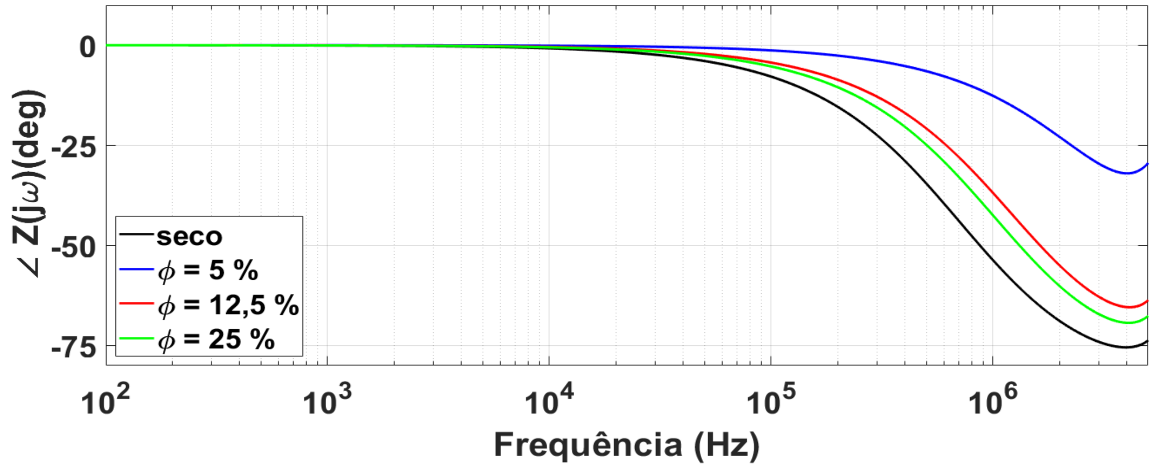
- Solos com baixa umidade (mais resistivo) apresentaram maior variação em relação ao modelo Rdc e Const.
- Descarga subsequente possui variação maior do que a primeira descarga de retorno (maior espectro).
- LS é o modelo que possui diferença maior em relação ao Const.

	Primeira descarga de retorno				
ℓ	Const.	W(%)	LS	M	S
3 m	14,12 (0)	2,57	11,21 (21)	12,68 (10)	12,13 (14)
	7,06 (0)	4,04	5,80 (18)	6,54 (7)	6,37 (10)
	1,41 (0)	11,57	1,22 (13)	1,36 (4)	1,37 (3)
30 m	1,96 (0)	2,57	1,54 (21)	1,74 (11)	1,67 (15)
	1,03 (0)	4,04	0,80 (22)	0,91 (11)	0,86 (14)
	0,34 (0)	11,57	0,29 (16)	0,32 (6)	0,31 (9)
		Descarga de retorno subsequente			
ℓ	Const.	W(%)	LS	M	S
3 m	3,76 (0)	2,57	2,53 (33)	2,80 (26)	2,64 (30)
	1,88 (0)	4,04	1,34 (29)	1,51 (20)	1,43 (24)
	0,38 (0)	11,57	0,30 (22)	0,34 (11)	0,33 (14)
30 m	0,78 (0)	2,57	0,52 (34)	0,55 (30)	0,55 (30)
	0,53 (0)	4,04	0,38 (28)	0,41 (23)	0,40 (24)
	0,21 (0)	11,57	0,17 (21)	0,19 (19)	0,18 (16)

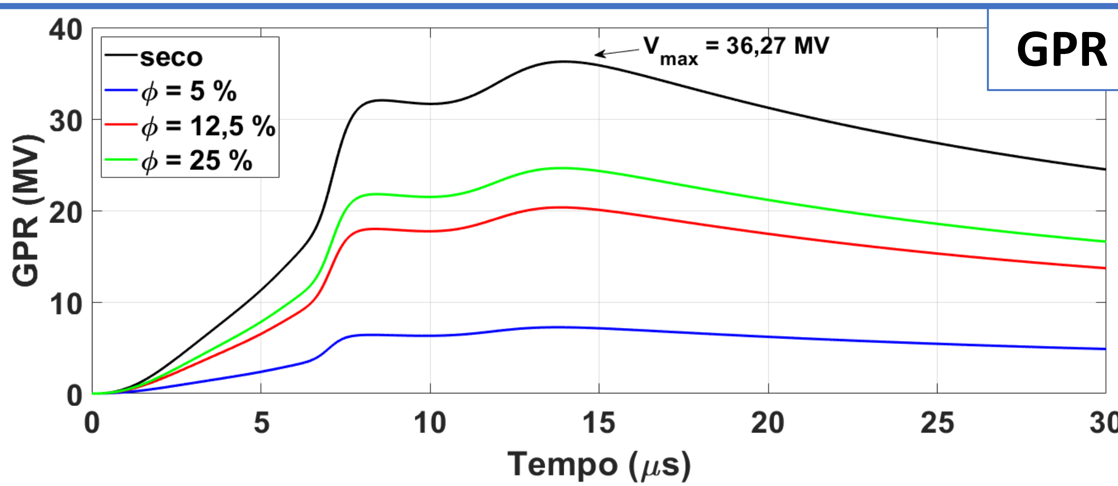
Estudo de Caso: Porosidade e umidade

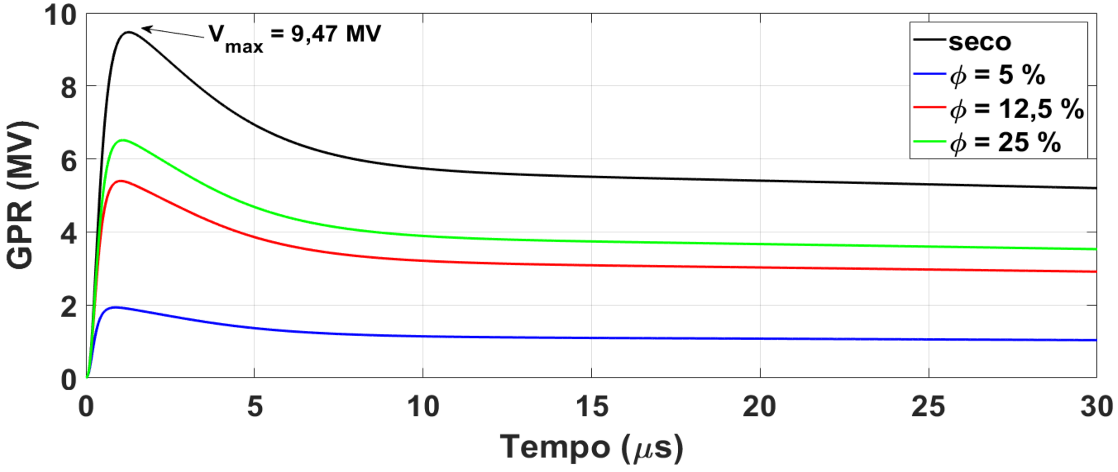
Impedância (Zh) - 3 m





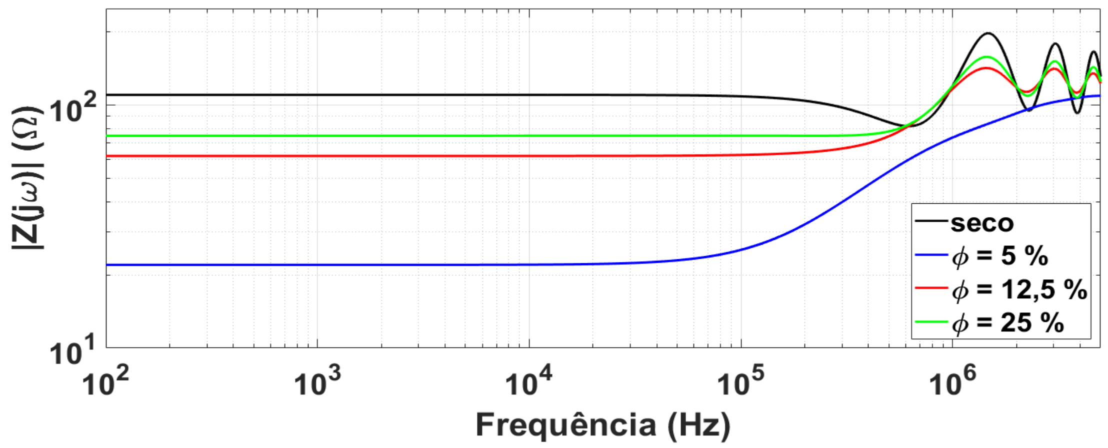
GPR - 3 m

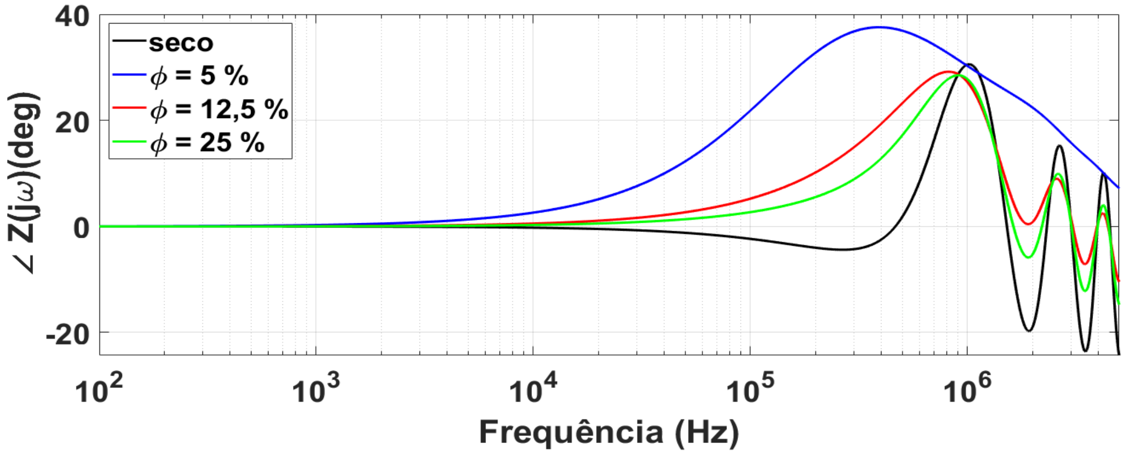




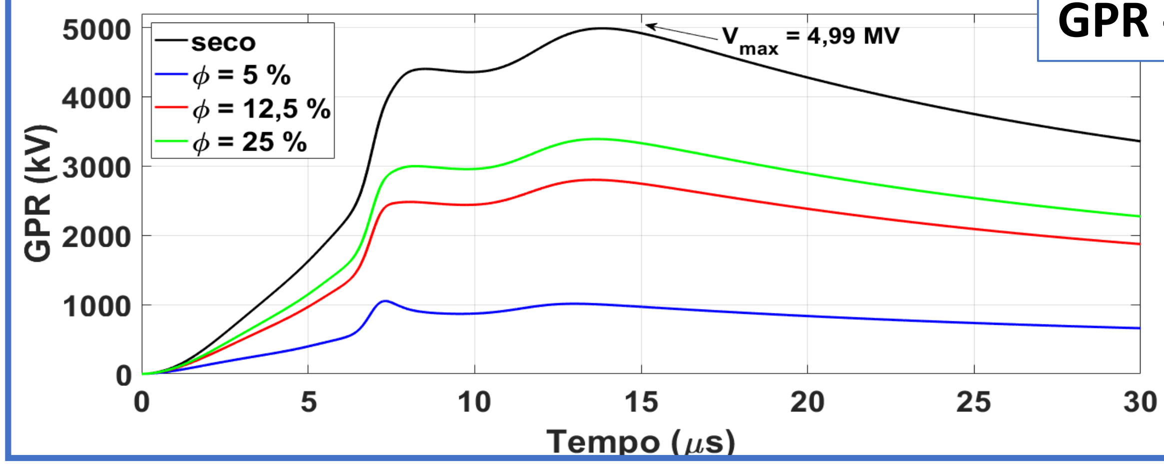
Estudo de Caso: Porosidade e umidade

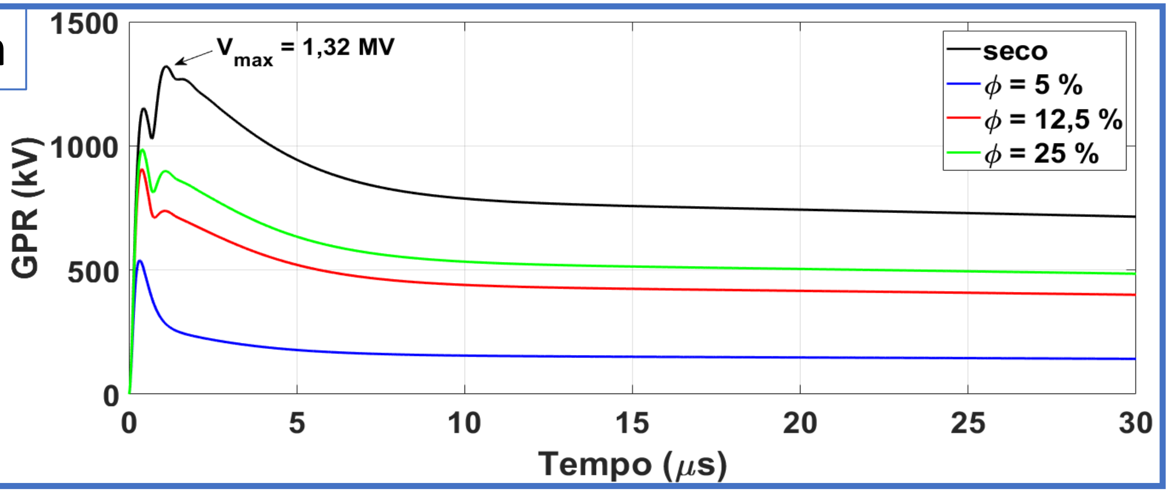
Impedância (Zh) - 30 m





GPR - 30 m





Estudo de Caso: Porosidade e umidade

- Maior teor de umidade leva à menores impedâncias e GPRS
- Baixo teor de porosidade apresentou maior variação em relação ao modelo de solo seco

	Primeira descarga de retorno			
ℓ	Seco	$\phi = 25\%$	$\phi = 12,5\%$	$\phi = 5\%$
3 m	36,27	24,64 (32%)	20,34 (44%)	7,24 (80%)
30 m	4,99	3,39 (32%)	2,80 (44%)	1,05 (79%)
	Descarga de retorno subsequente			
ℓ	Seco	$\phi = 25\%$	$\phi = 12,5\%$	$\phi = 5\%$
3 m	9,47	6,51 (31%)	5,40 (43%)	1,93 (80%)
30 m	1,32	0,99 (25%)	0,91 (31%)	0,54 (59%)

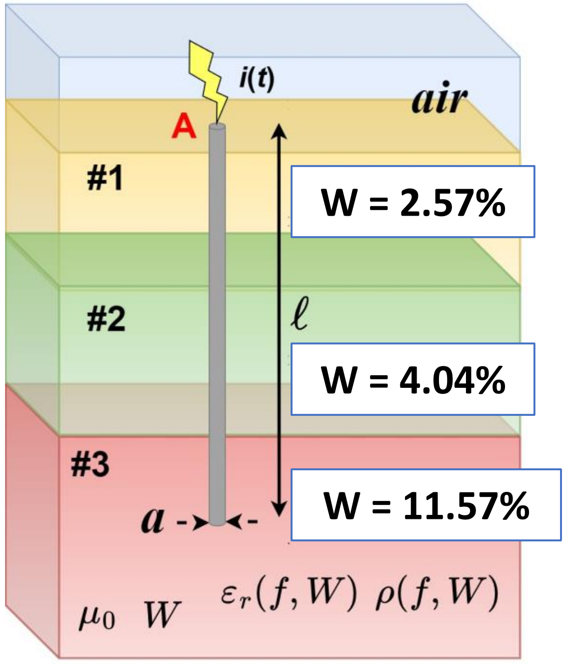
Conclusões: Impedância Harmônica

- A impedância das hastes verticais apresentaram um comportamento resistivo nas baixas frequências (entre 100 Hz até a frequência característica).
- Acima dessa frequência, a magnitude da impedância do SA é alterada de modo significativo, devido à parte reativa ser mais pronunciada sendo indutiva ou capacitiva dependendo do intervalo de frequência, parâmetros do solo e parâmetros geométricos do eletrodo.
- A resistência estática é reduzida com o aumento do teor de umidade, porém ela aumenta com o aumento da porcentagem de porosidade.

Conclusões: GPR

- Os GPR obtidos para parâmetros constantes apresentam valor de pico superior aos calculados com os variáveis com as propriedades físicas (efeito da frequência, teor de umidade, porosidade).
- Portela, Longmire-Smith apresentaram uma maior variação δ em relação aos demais modelos.
- Solos mais resistivos resultaram em resultaram em picos de GPR e δ maiores.
- Os resultados para a descarga subsequente tiveram uma maior variação percentual em relação ao modelo constante do que a variação encontrada para a primeira descarga de retorno, devido ao seu maior espectro de frequência.

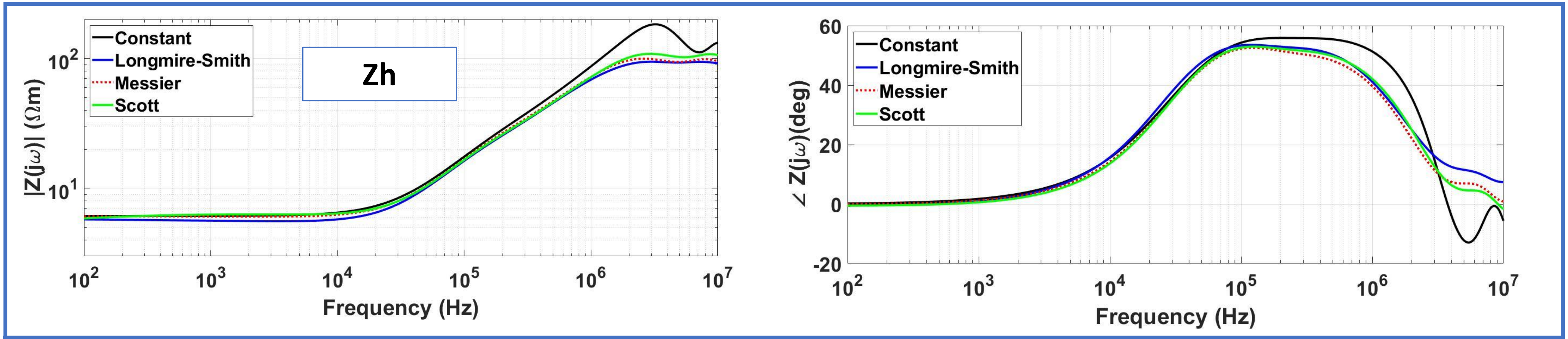
Estudo de Caso: Torres Transmissão

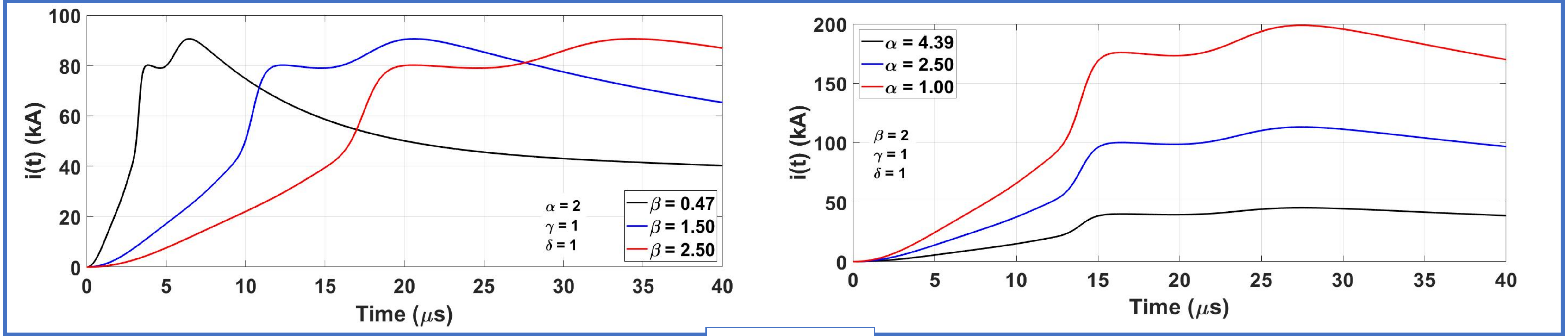


(a)

l - 30 m

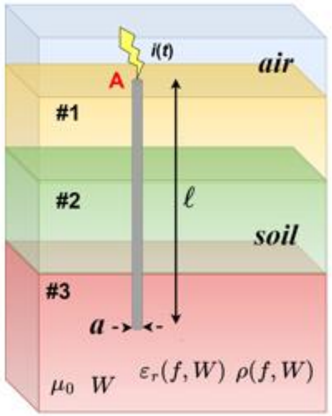
Estudo de Caso

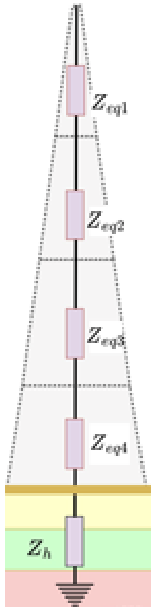




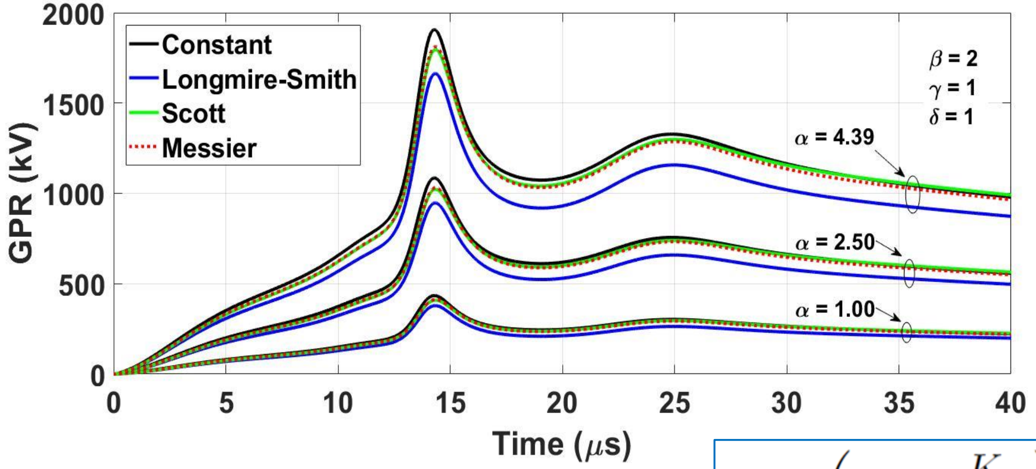
Correntes

Estudo de Caso

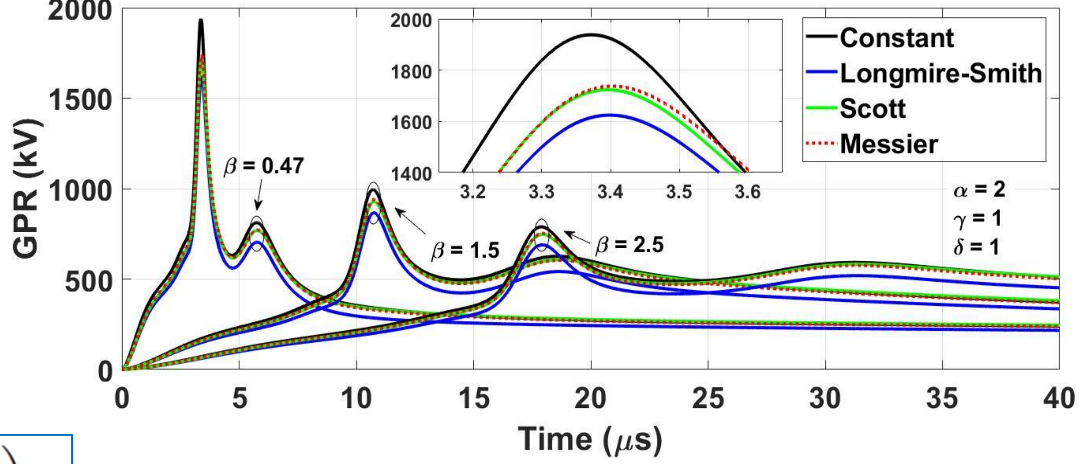




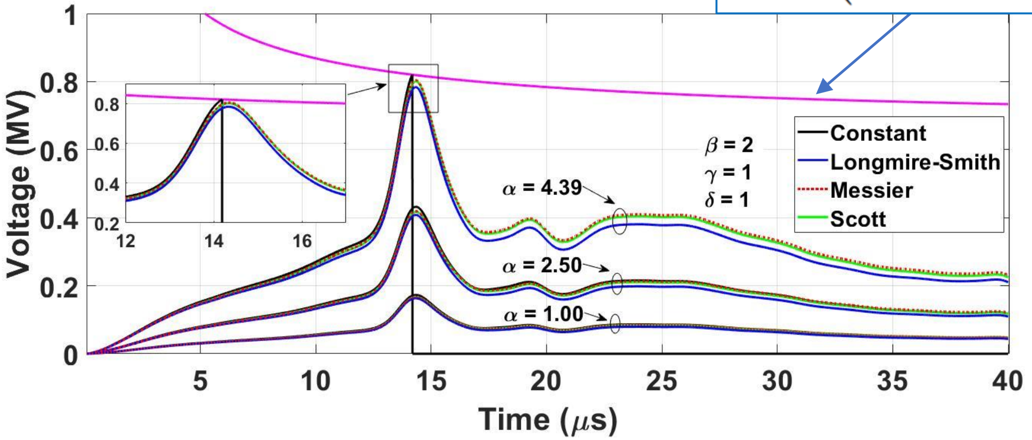
Primeira

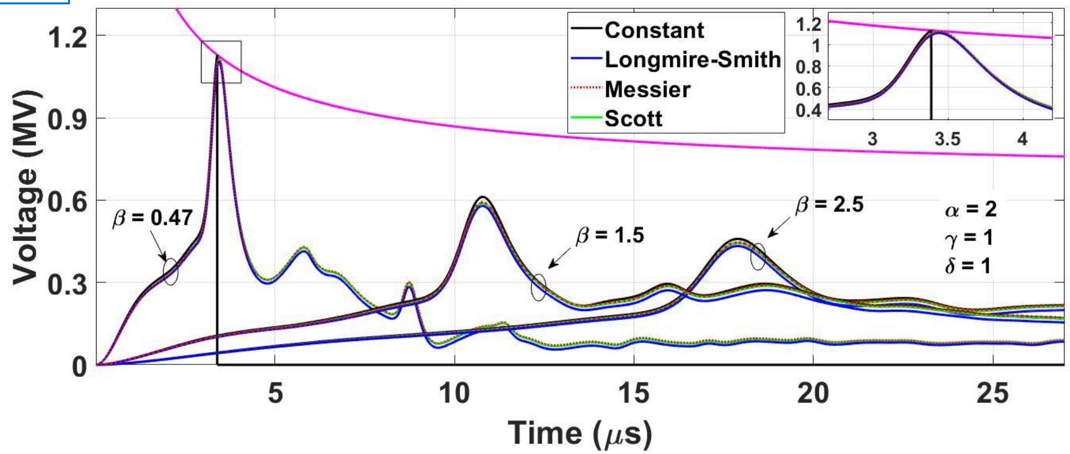


Subsequente



$$V_{\mathrm{F}} = \left(K_1 + \frac{K_2}{t^{0.75}}\right)\ell_s$$

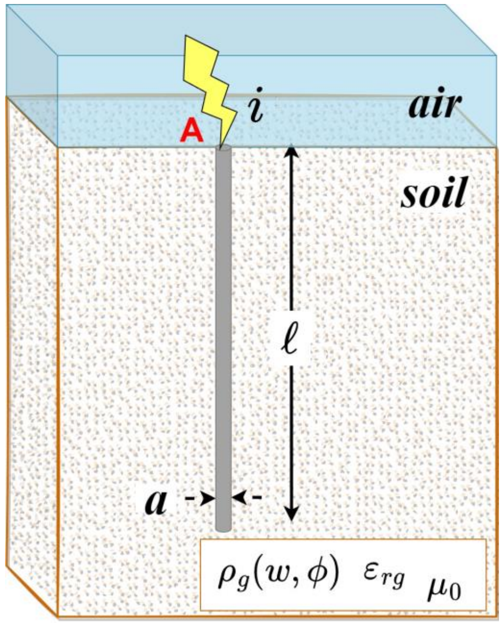


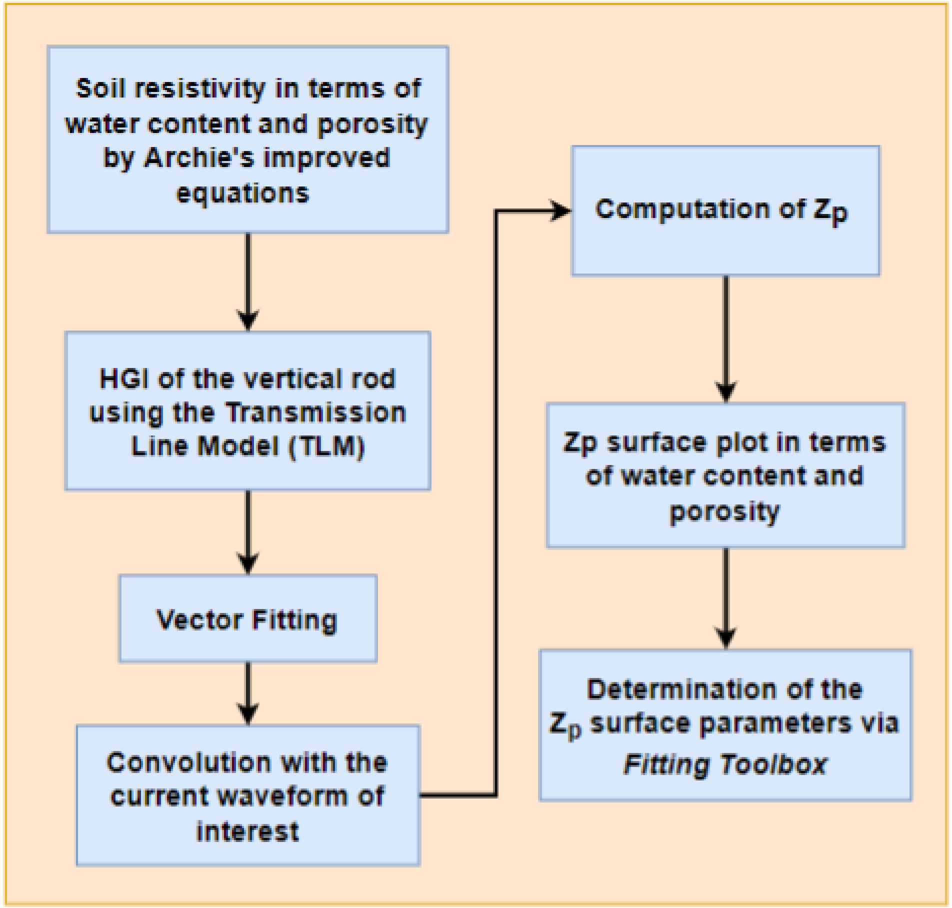


Estudo de Caso

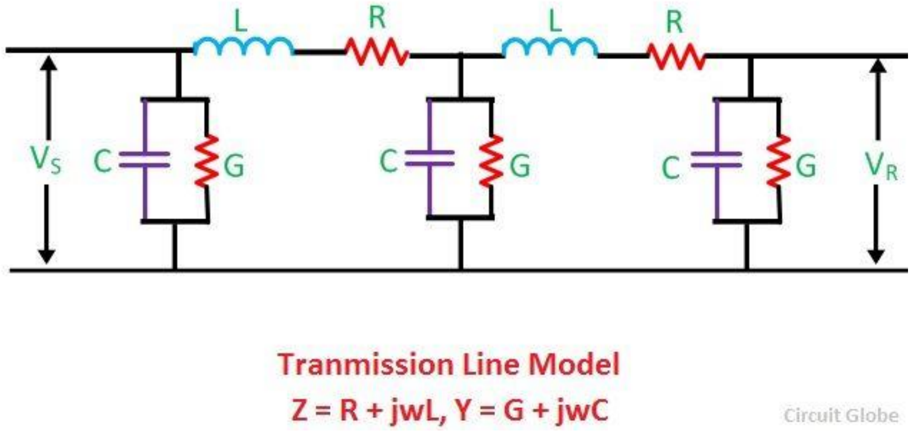
- Estimar rapidamente Zp de uma haste vertical?
- Parâmetros do solo em termos da porosidade e umidade (Archie), solo arenoso

$$Z_p = \frac{\max[v(t)]}{\max[i(t)]} = \frac{V_p}{I_p}$$





Estudo de Caso



$$L_v = \frac{\mu_g}{2\pi}\left[ln\left(\frac{2\ell}{a}\right) - 1\right]$$

$$R_v = \frac{\rho_c}{\pi a^2}$$

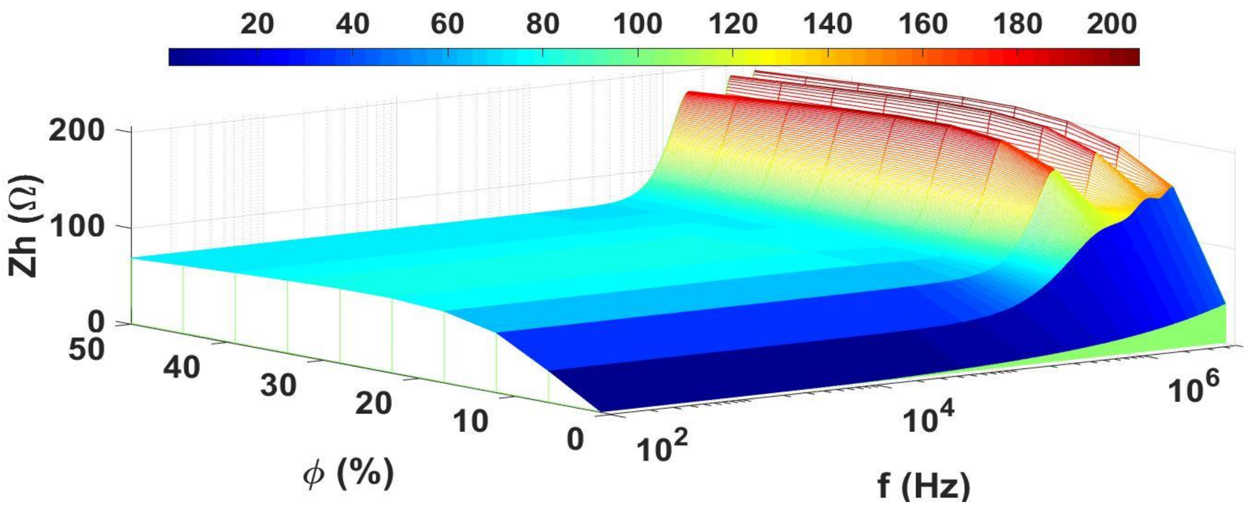
$$G_v = \frac{2\pi}{\rho_g}\left[ln\left(\frac{4\ell}{a}\right) - 1\right]^{-1}$$

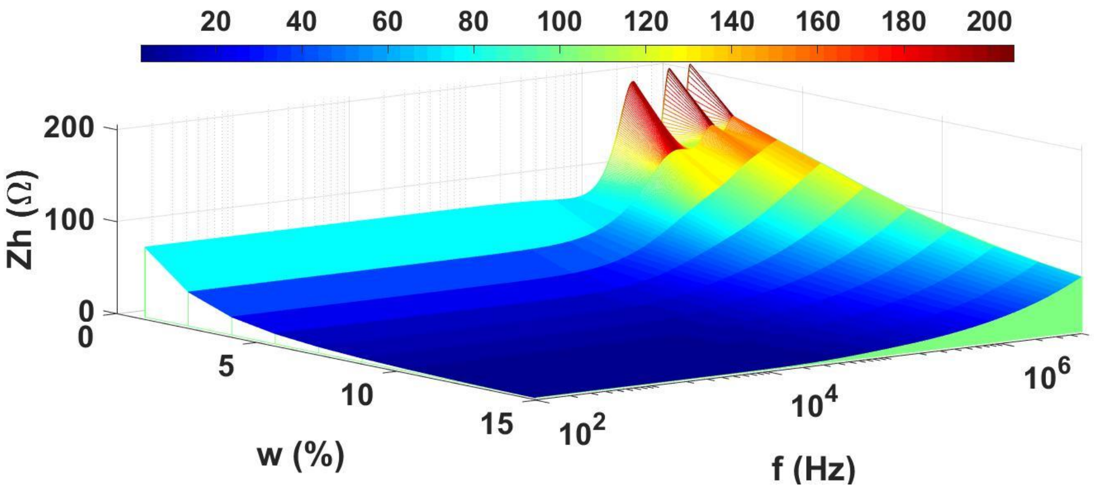
$$C_v = \varepsilon_g \rho_g G_v$$

$$Z_h(j\omega) = Z_C(j\omega)\coth(\gamma(j\omega)\ell),$$

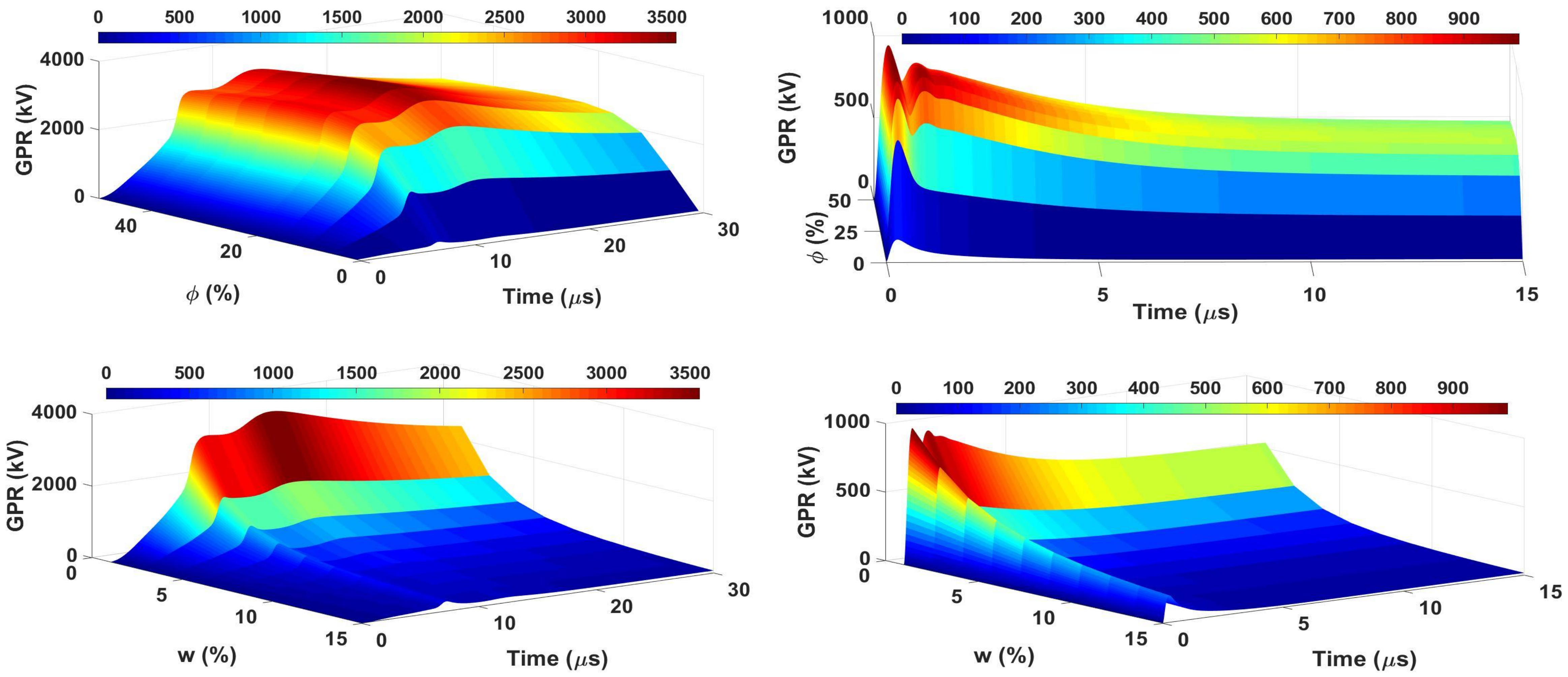
$$\gamma(j\omega) = \sqrt{(R_v + j\omega L_v)(G_v + j\omega C_v)},$$

$$Z_C(j\omega) = \sqrt{(R_v + j\omega L_v)/(G_v + j\omega C_v)},$$

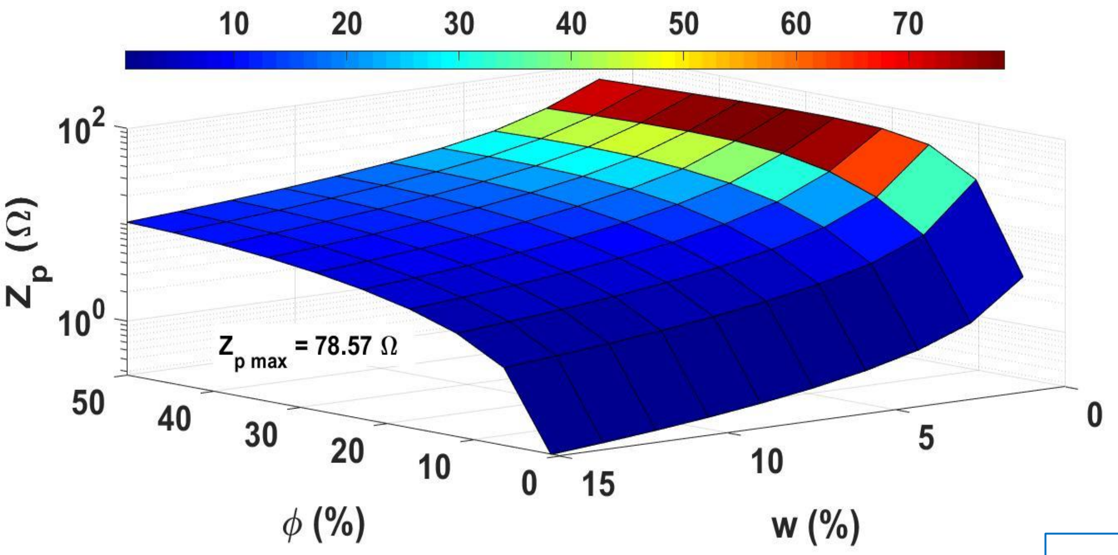


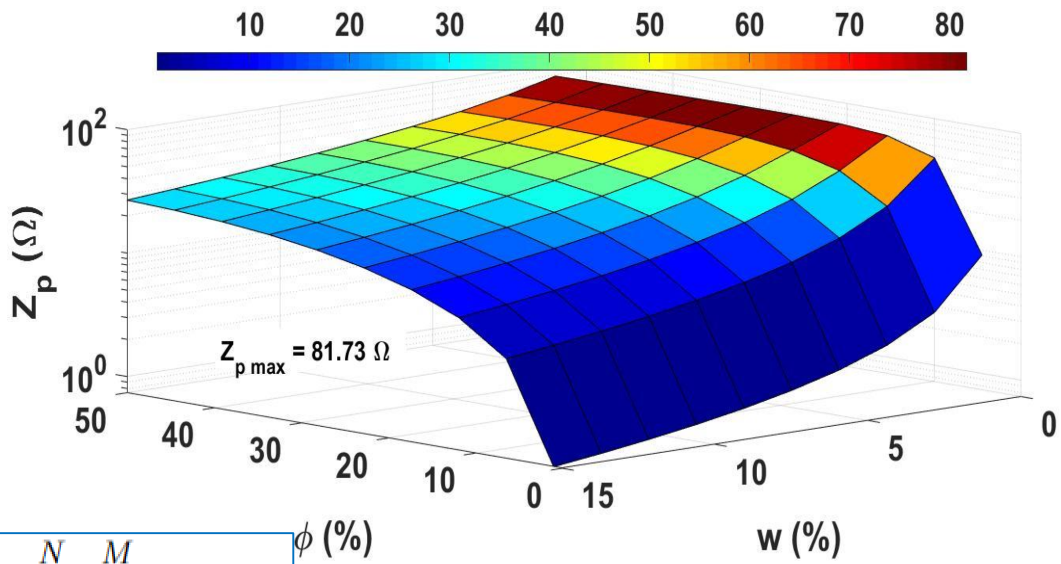


Estudo de Caso



Estudo de Caso



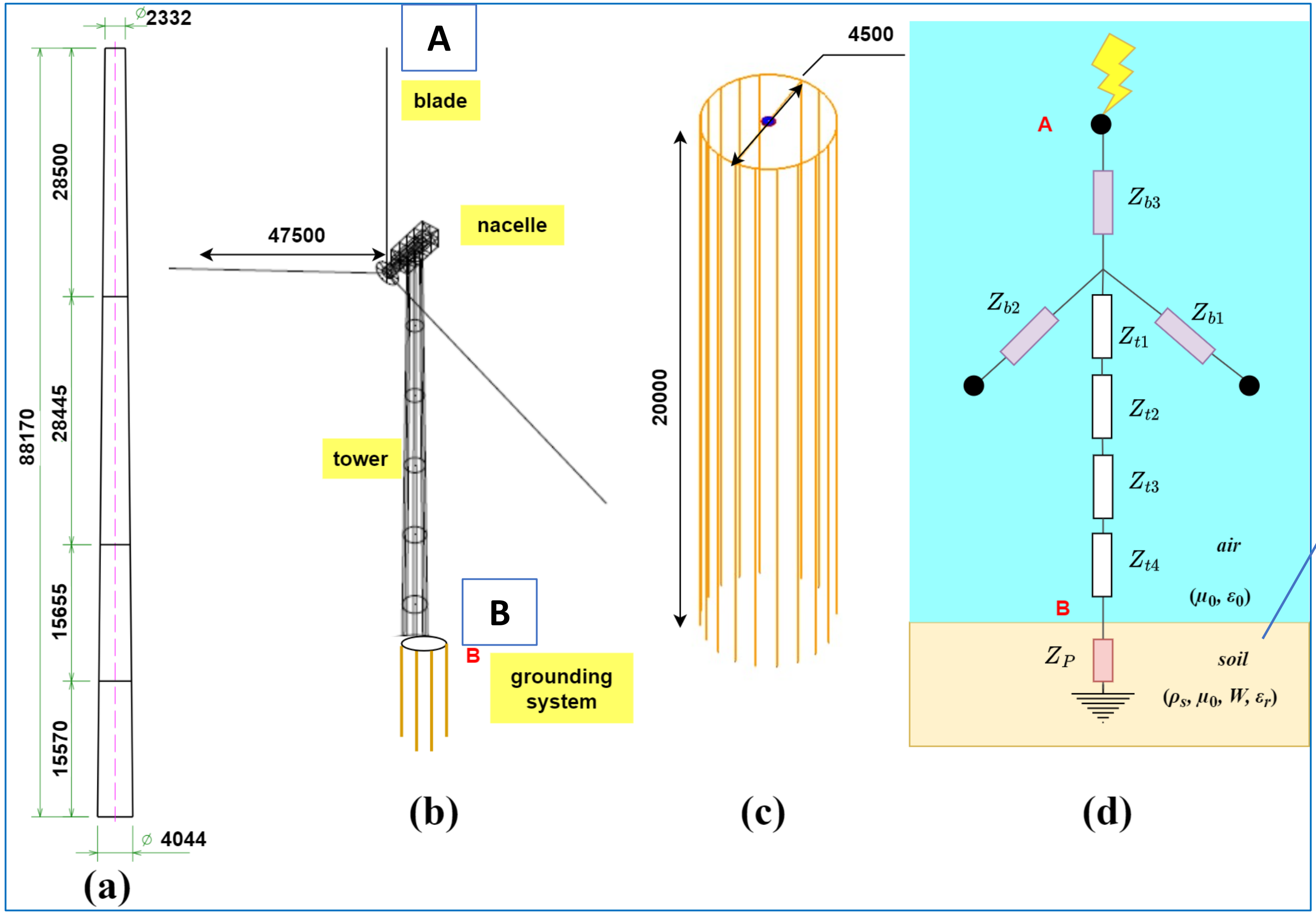


$$\boxed{Z_p = \frac{\max\left[v(t)\right]}{\max\left[i(t)\right]} = \frac{V_p}{I_p}}$$

$$\boxed{Z_P^{fit}(w,\phi) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} P_{ij} w^i \phi^j}$$

First return stroke - P_{ij}							Subsequent return stroke - P_{ij}						
i\j	0	1	2	3	4	5	i\j	0	1	2	3	4	5
0	-10.63	24.11	-1.114	-0.1012	0.0089	-1.76e-04	0	-13.68	38.65	-5.134	0.2982	-0.00787	8.16e-05
1	-2.726	-2.26	0.188	-0.0035	-4.26e-05	0	1	-2.636	-1.73	0.2553	-0.01177	1.494e-04	0
2	0.4266	0.05879	-0.0045	7.75e-05	0	0	2	0.2702	0.01419	-0.003124	1.015e-04	0	0
3	-0.0187	-0.00045	2.65e-05	0	0	0	3	-0.00852	2.41e-04	4.44e-06	0	0	0
4	3.32e-04	-6.9e-08	0	0	0	0	4	1.13e-04	-2.57e-06	0	0	0	0
5	-2.11e-06	0	0	0	0	0	5	-5.53e-07	0	0	0	0	0

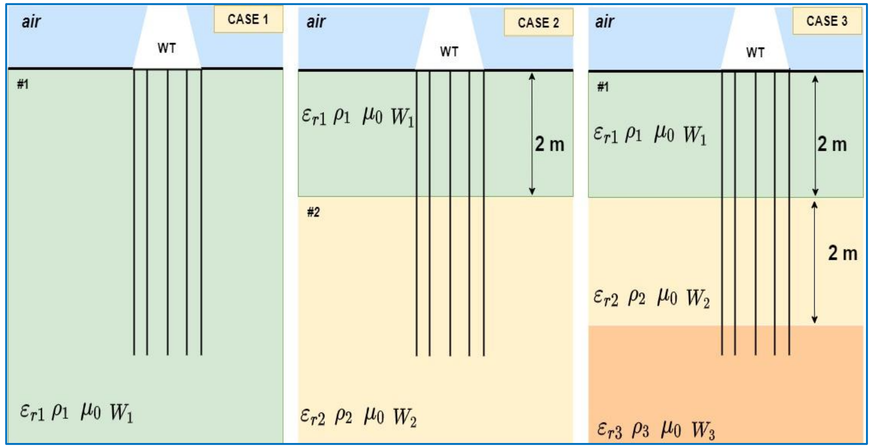
Estudo de Caso: Torre Eólica



CASO 1

CASO 2

CASO 3



W= 2,57%

W1= 2,57%

W2= 4,04%

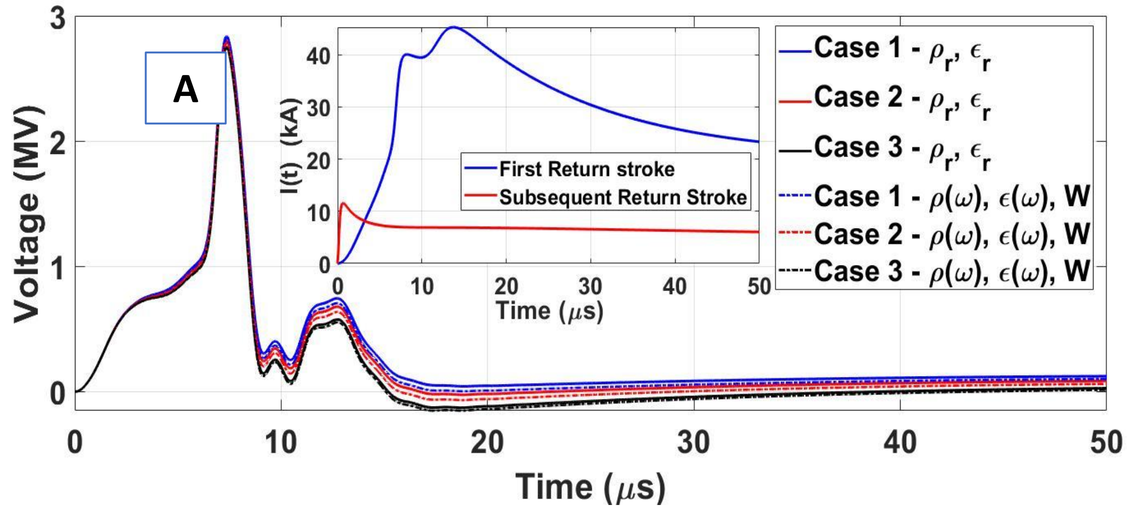
W1= 2,57%

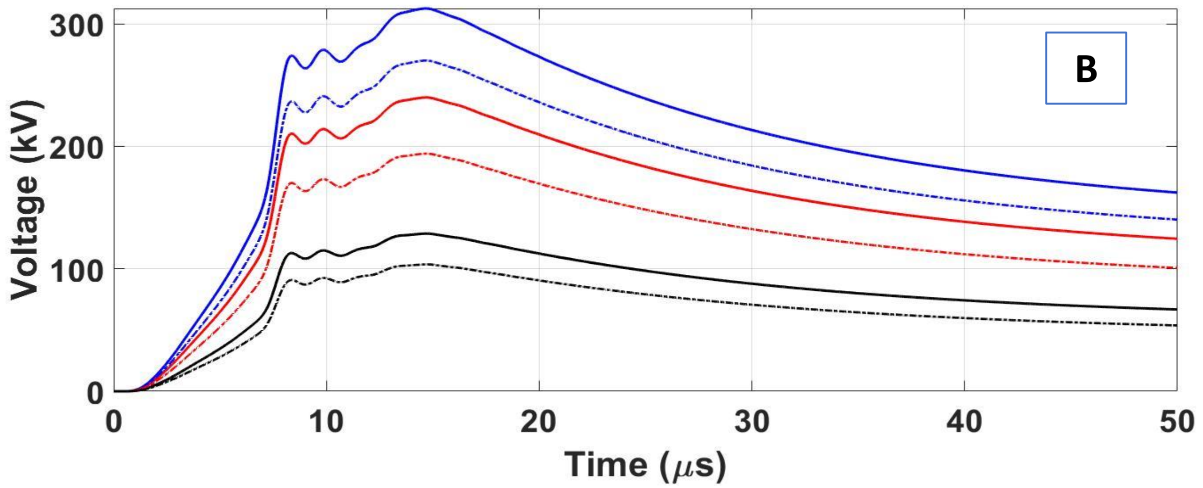
W2= 4,04%

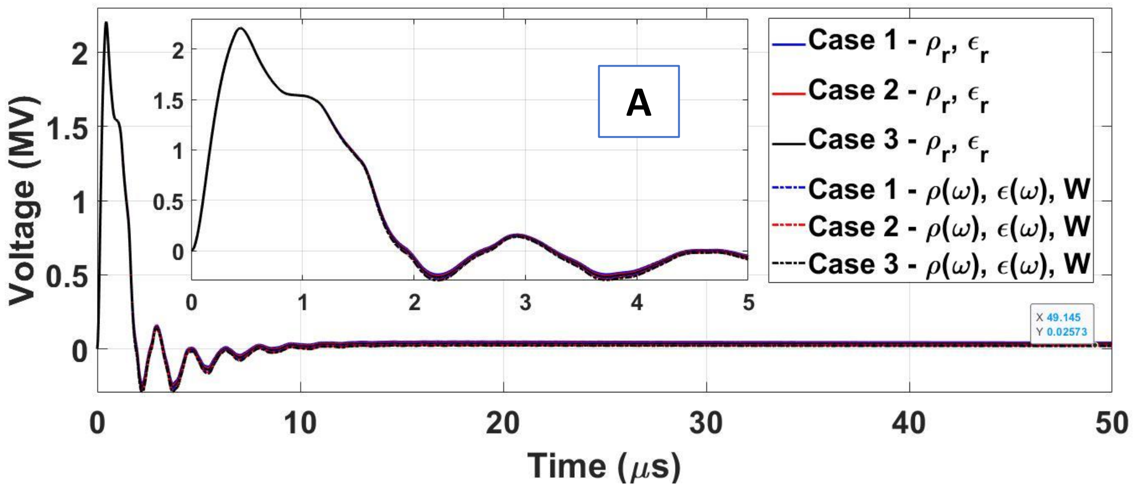
W2= 11,57%

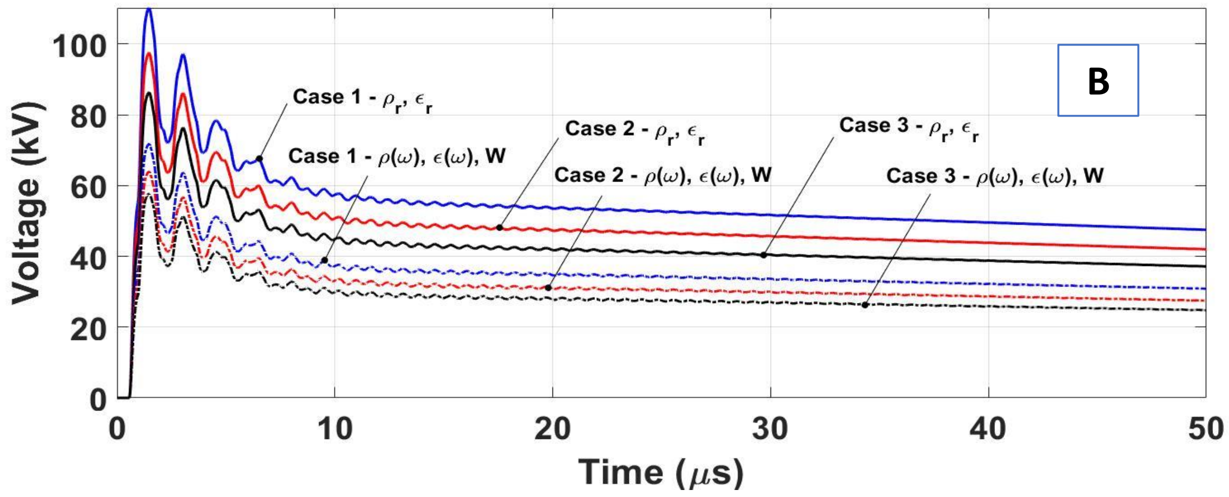
$$Z_p = \frac{\max[v(t)]}{\max[i(t)]} = \frac{V_p}{I_p}$$

Estudo de Caso

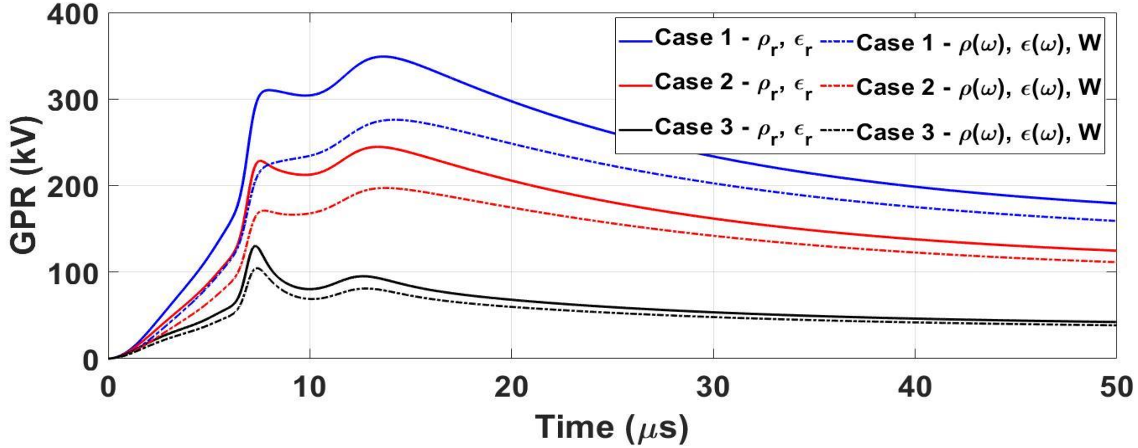


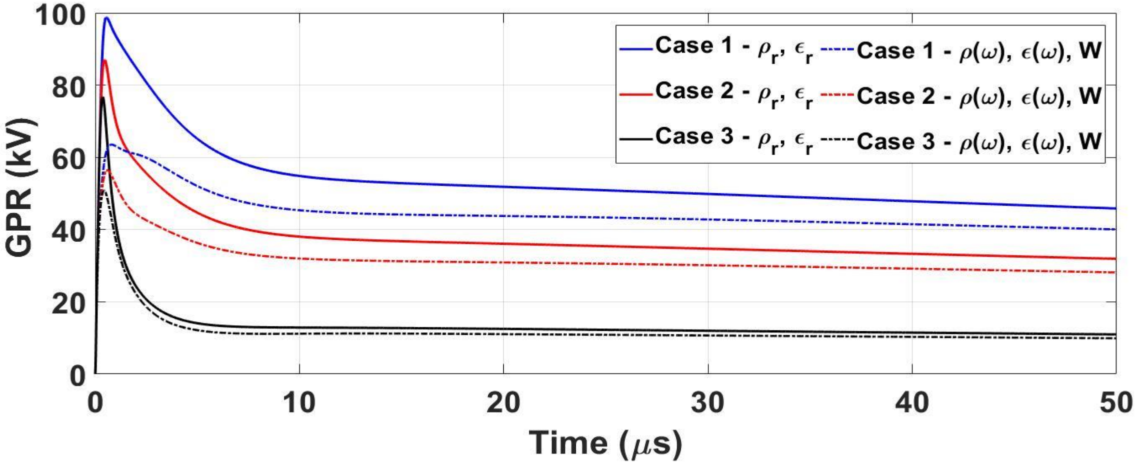






Estudo de Caso





	First Stroke			Subsequent Stroke		
Voltage seen from the point A- with wind turbine						
Case	FC soil	FD soil	Δ(%)	FC soil	FD soil	Δ (%)
1	2836.1	2817.5	0.66	2206.5	2206.5	0
2	2804.2	2784.1	0.72	2206.5	2206.5	0
3	2775.5	2744.4	1.12	2206.5	2206.5	0
Voltage seen from the point B- with wind turbine						
1	312.5	270.0	13.60	110.2	71.8	34.85
2	239.9	194.0	19.13	97.5	64.0	34.36
3	128.7	103.6	19.50	86.3	57.8	33.02
Voltage seem from point B-without wind turbine						
1	349.0	276.0	20.92	98.7	63.5	35.66
2	244.6	197.2	19.38	87.0	56.5	35.06
3	130.2	104.5	19.74	76.8	50.9	33.72

Obrigado!

w157573@dac.unicamp.br

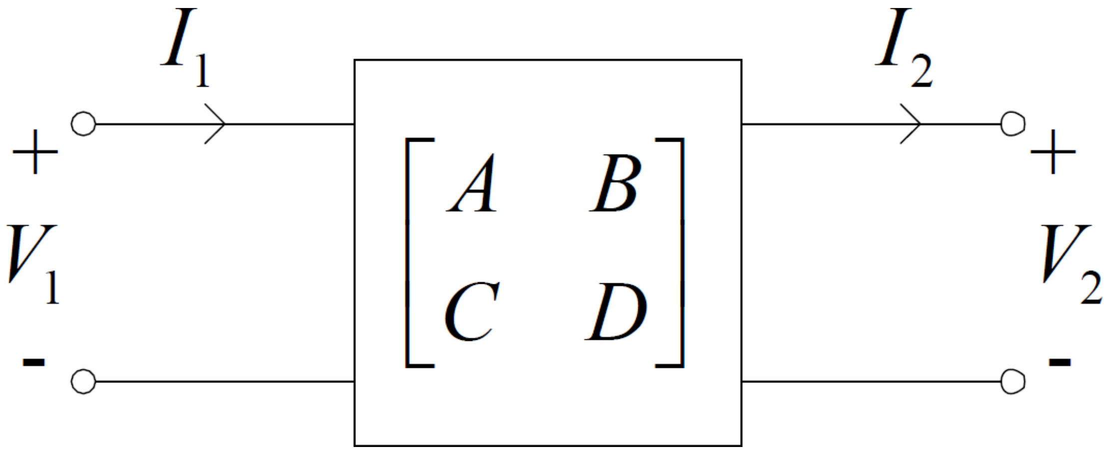
IT 006 – - Tópicos em Sistemas de Energia Elétrica III

AGOSTO 2023

Prof. Dr. José Pissolato Filho

Matriz ABCD

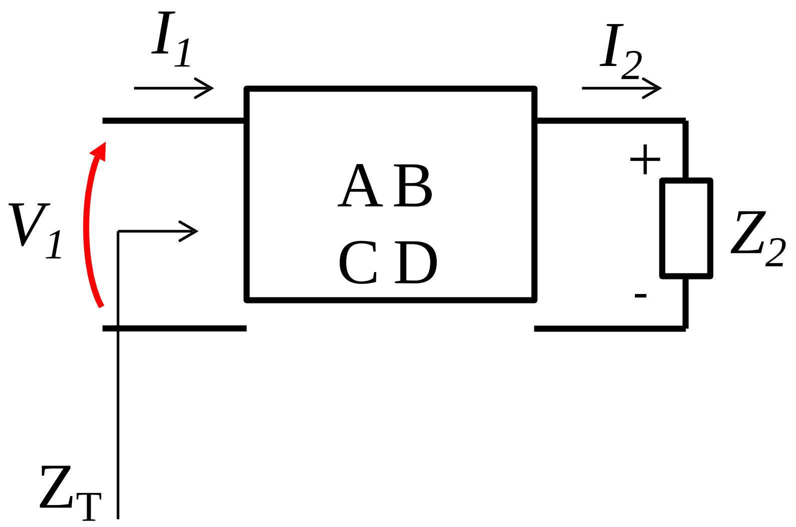
$\Rightarrow$ Matriz ABCD



$\Rightarrow$ **Matriz ABCD**

$$\boxed{\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}} \qquad (1)$$

$\Rightarrow$ Matriz ABCD



$\Rightarrow$ A partir da matriz anterior podemos extrair as seguintes relações:

$$V_1 = A.V_2 + B.I_2 \tag{2}$$

$$I_1 = C.V_2 + D.I_2 \tag{3}$$

$\Rightarrow$ Matriz ABCD

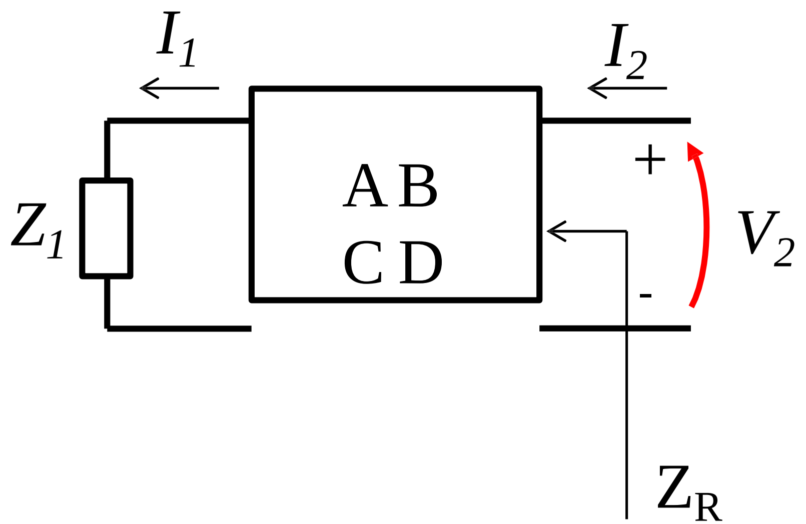
$\Rightarrow$ Dividindo (1) por (2) e posteriormente dividindo o resultado por I_2, temos:

$$\frac{\dfrac{V_1}{I_2} = A.\dfrac{V_2}{I_2} + B.\dfrac{I_2}{I_2}}{\dfrac{I_1}{I_2} = C.\dfrac{V_2}{I_2} + D.\dfrac{I_2}{I_2}}$$

$\Rightarrow$ Como resultado obtém-se:

$$\boxed{Z_T = \frac{A.Z_2 + B}{C.Z_2 + D}} \qquad (4)$$

$\Rightarrow$ Matriz ABCD



$\Rightarrow$ De forma análoga, podemos obter:

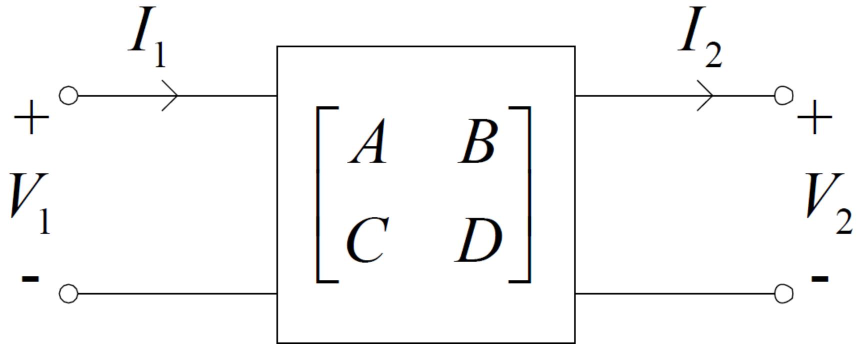
$$\boxed{Z_R = \frac{D.Z_1 + B}{C.Z_1 + A}} \qquad (5)$$

$\Rightarrow$ Matriz ABCD

$\Rightarrow$ Onde:

$$\boxed{\begin{aligned} A &= \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0}, \quad B = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{V_2=0} \\ C &= \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0}, \quad D = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_2=0} \end{aligned}} \tag{6}$$

$\Rightarrow$ Matriz ABCD



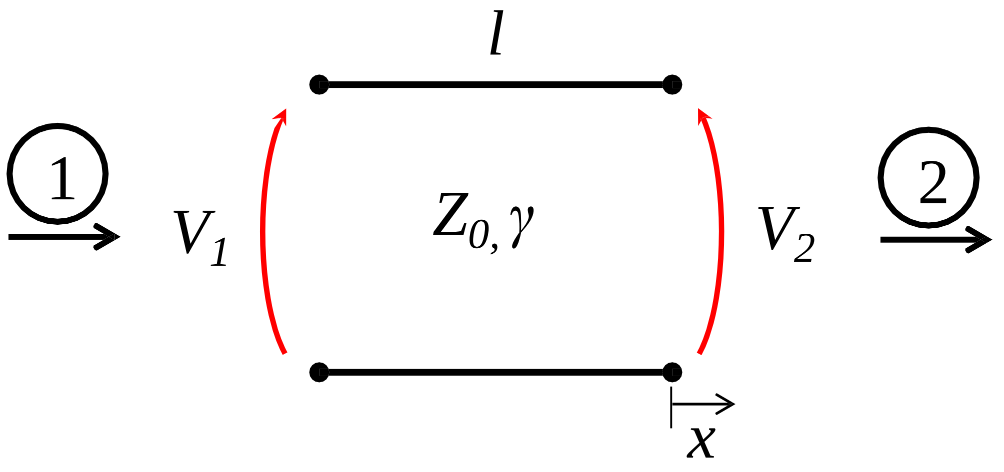
$$V_1 = Z_{11}.I_1 + Z_{12}.I_2$$

$$V_2 = Z_{21}.I_1 + Z_{22}.I_2$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \qquad \left\{ \begin{array}{c} (V) = (Z).(I) \\ \text{ou} \\ (I) = (Y).(V) \end{array} \right. \tag{7}$$

$\Rightarrow$ Matriz ABCD

$\Rightarrow$ Seção de comprimento *l* da linha:



$$V(x) = V^+ . e^{-\gamma x} + V^- . e^{\gamma x} \qquad (8)$$

$$I(x) = \frac{V^+}{Z_0} . e^{-\gamma x} - \frac{V^-}{Z_0} . e^{\gamma x} \qquad (9)$$

Onde:

$$\gamma = \alpha + j\beta \qquad (10)$$

⇒ Matriz ABCD

⇒ Avaliando os parâmetros a partir de x e fazendo $V(0) = V_2$ e $I(0) = I_2$ em (8) e (9) temos:

$$V^+ + V^- = V_2 \tag{11}$$

$$V^+ - V^- = I_2.Z_0 \tag{12}$$

⇒ Resolvendo o sistema, temos:

$$V^+ = \frac{1}{2}(V_2 + I_2.Z_0) \tag{13}$$

$$V^- = \frac{1}{2}(V_2 - I_2.Z_0) \tag{14}$$

⇒ Matriz ABCD

⇒ Substituindo (13) e (14) em (8) e (9)

$$V(x) = V_2.\left(\frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2}\right) + I_2.Z_0.\left(\frac{e^{-\gamma x} - e^{\gamma x}}{2}\right) \qquad (15)$$

$$I(x) = \frac{V_2}{Z_0}.\left(\frac{e^{-\gamma x} - e^{\gamma x}}{2}\right) + I_2.\left(\frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2}\right) \qquad (16)$$

⇒ Observando-se que:

$$\boxed{\cosh(x) = \frac{e^{-\gamma x} + e^{\gamma x}}{2}} \qquad \boxed{-\operatorname{senh}(x) = \frac{e^{-\gamma x} - e^{\gamma x}}{2}}$$

$\Rightarrow$ Matriz ABCD

$\Rightarrow$ Temos para um comprimento *l* (sentido carga-fonte):

$$V(-l) = V_1 = V_2.\cosh(\gamma l) + I_2.Z_0.senh(\gamma l) \tag{17}$$

$$I(-l) = I_1 = \frac{V_2}{Z_0}.senh(\gamma l) + I_2.\cosh(\gamma l) \tag{18}$$

$\Rightarrow$ Comparando com a matriz ABCD:

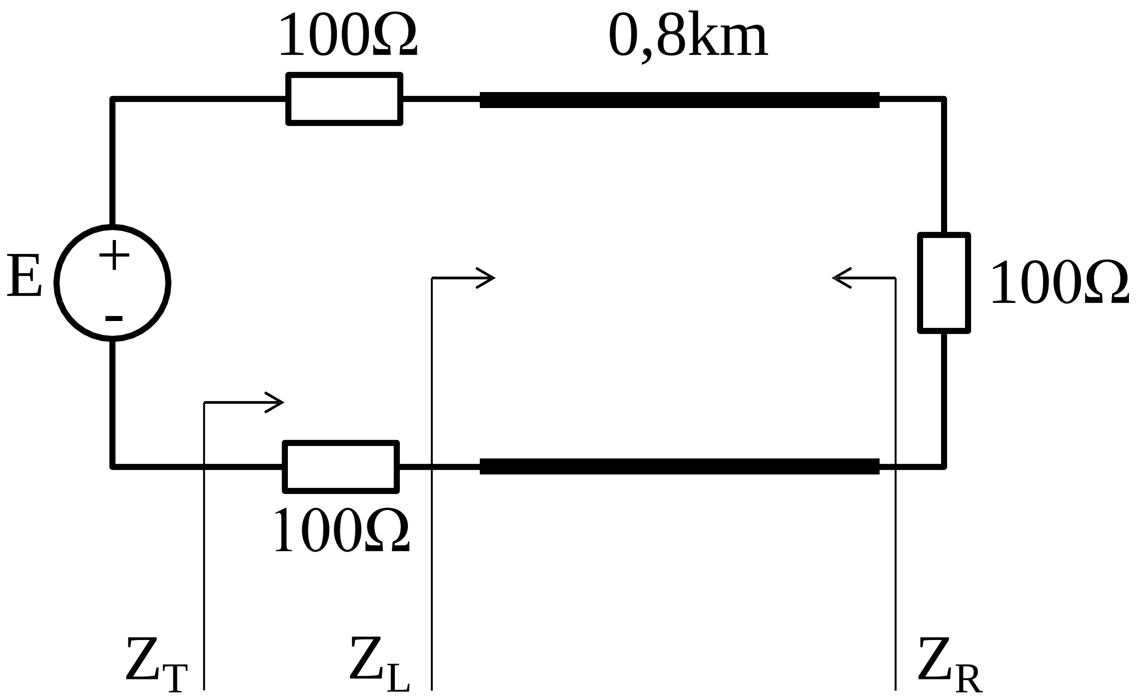
$$\boxed{\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}}$$

$\Rightarrow$ Matriz ABCD

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_0 . senh(\gamma l) \\ \frac{1}{Z_0} . senh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix}$$

⇒ Matriz ABCD

⇒Exemplo:



$\Rightarrow$ Matriz ABCD

$\Rightarrow$ Dados:

$\alpha = 0$
$\beta = 3$ dB/km
$Z_0 = 200\Omega$

a) Calcule a matriz ABCD entre a fonte e a carga.
b) Determine a impedância vista pela fonte.
c) Determine Z_R.
d) Determine Z_L.

$\Rightarrow$ Matriz ABCD

$$\gamma = \alpha + j\beta = j3$$

$$\gamma l = j3.0{,}8 = j2{,}4$$

$$A'' = D'' = \cosh(\gamma l) = \cosh(j2{,}4) = -0{,}7374$$

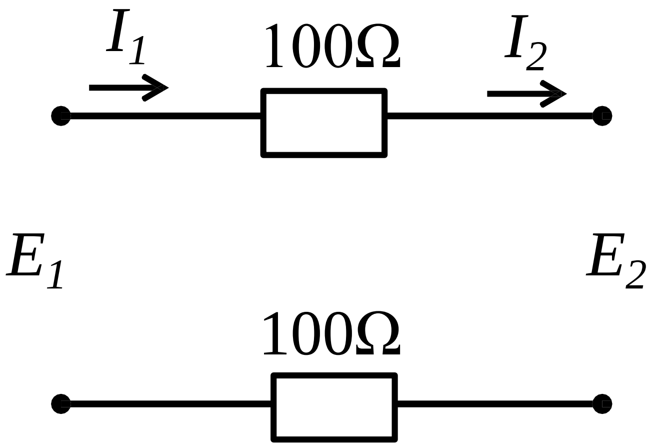
$$B'' = Z_0.senh(\gamma l) = 200.senh(j2{,}4) = j135{,}1$$

$$C'' = \frac{1}{Z_0}.senh(\gamma l) = \frac{1}{200}.senh(j2{,}4) = j3{,}377.10^{-3}$$

$\Rightarrow$ Matriz ABCD

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Encontrando a matriz ABCD entre a fonte e a linha.



$$E_1 = A'.E_2 + B'.I_2$$
$$I_1 = C'.E_2 + D'.I_2$$

$$E_1 = E_2 + 200.I_2$$
$$I_1 = 0.E_2 + I_2$$

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 200 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ **Matriz ABCD**

$\Rightarrow$ Matriz ABCD entre a fonte e a carga.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 200 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -0{,}7374 & j135{,}1 \\ j3{,}37.10^{-3} & -0{,}7374 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}7374 + j0{,}6755 & -147{,}5 + j135{,}1 \\ j3{,}37.10^{-3} & -0{,}7374 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow$ **Matriz ABCD**

$\Rightarrow$ Impedâncias Z_T, Z_R, Z_L.

$$Z_T = \frac{A.Z_2 + B}{C.Z_2 + D} = 369{,}9\angle - 17{,}89°$$

$$Z_R = \frac{D.Z_1 + B}{C.Z_1 + A} = 200\Omega$$

$$Z_L = \frac{A''.Z_2 + B''}{C''.Z_2 + D''} = 189{,}8\angle - 36{,}77°$$