

Linhas de Regime Estacionário Senoidal

Seção infinitesimal de uma linha de transmissão, onde no
delta x o tempo não varia.... equações de circuito.

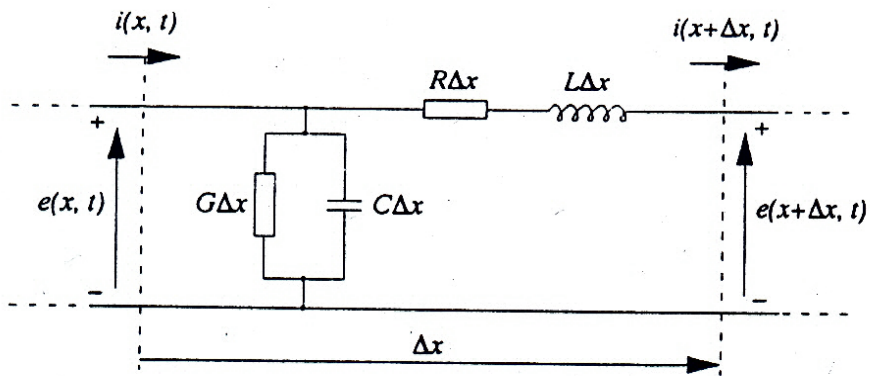
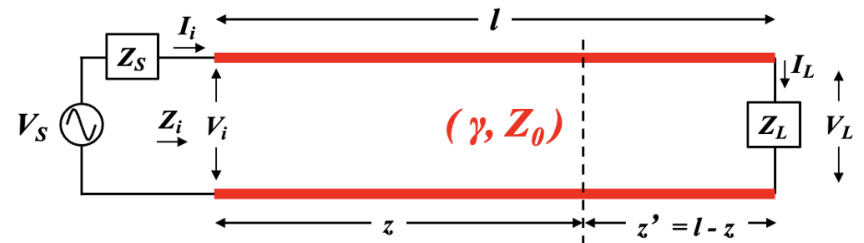


Fig.1 - Linha de transmissão uniforme.



$$\left[R + L \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[i(x,t) - \cancel{G \Delta x e(x,t)} - \cancel{C \Delta x \frac{\partial}{\partial t} e(x,t)} \right] = - \frac{e(x + \Delta x, t) - e(x, t)}{\Delta x}$$



UNICAMP

O modelo assumido fica mais próximo da situação real à medida que Δx tende a zero. Aplicando o limite na eq.(4), para $\Delta x \rightarrow 0$, tem-se:

$$\boxed{\left[R + L \frac{\partial}{\partial t} \right] i(x,t) = - \frac{\partial}{\partial x} e(x,t)} \quad (5)$$

É importante observar que o 2º membro de (4) dá origem ao negativo da derivada parcial da tensão $e(x,t)$ na linha em relação a x .

O MODELO ESTÁ CORRETO!!

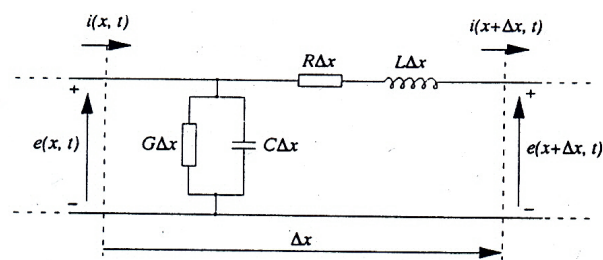


Fig.1 - Linha de transmissão uniforme.

Reescrevendo a eq.(3) numa forma mais apropriada e dividindo por Δx , obtém-se:

$$i(x + \Delta x, t) = i(x, t) - G\Delta x \cdot e(x, t) - C\Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial t} e(x, t)$$

$$\left[G + C \frac{\partial}{\partial t} \right] e(x, t) = - \frac{i(x + \Delta x, t) - i(x, t)}{\Delta x} \quad (6)$$

Fazendo o limite da equação (6) quando $\Delta x \rightarrow 0$, tem-se:

$$\boxed{\left[G + C \frac{\partial}{\partial t} \right] e(x, t) = - \frac{\partial}{\partial x} i(x, t)} \quad (7)$$

A equação (5)

$$\left[R + L \frac{\partial}{\partial t} \right] i(x,t) = - \frac{\partial}{\partial x} e(x,t)$$

indica que **há queda de tensão** com a distância x na linha pela passagem da corrente nos elementos R e L em série na linha.

A equação (7).

$$\left[G + C \frac{\partial}{\partial t} \right] e(x,t) = - \frac{\partial}{\partial x} i(x,t)$$

mostra que **há queda de corrente** com a distância x na linha devido à existência de tensão nos elementos paralelos (de fuga) da linha, ou seja G e C . São correntes que retornam antes do sinal chegar no fim da linha.

Linha não dissipativa **ideal ou sem perdas**

Nessa condição temos: $R = G = 0$

Neste caso, as eqs. (11) e (12) se simplificam para:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e(x, t) = LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} e(x, t) \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} i(x, t) = LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} i(x, t) \quad (14)$$

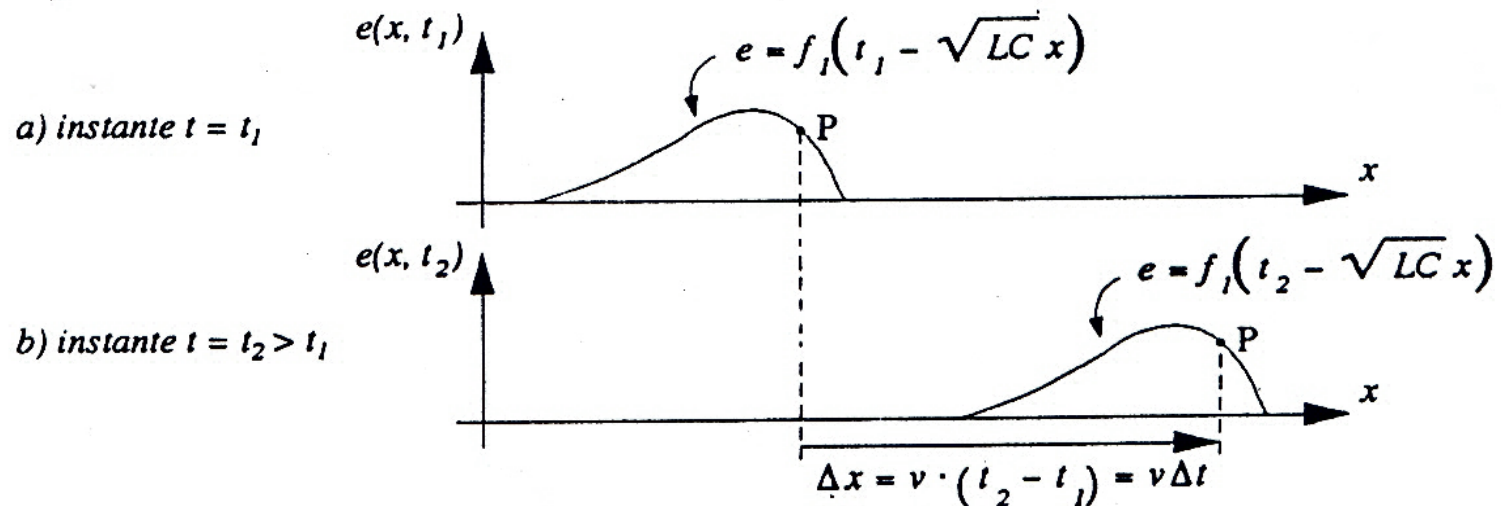
Linha não dissipativa ideal ou sem perdas

Verifiquemos que uma solução para a eq. (13) é:

$$e(x, t) = f_1(t - \sqrt{LC} x) \quad (15)$$

Onde f_1 é qualquer função unívoca do argumento $(t - \sqrt{LC} x)$
Além disso f_1 tem dimensão de tensão (dada em volts, no sistema internacional).

Para efeito de visualização do fenômeno de onda, suponha um caso genérico para f_1 , como diagramado abaixo:



onde $v = 1/\sqrt{LC} =$ velocidade de propagação da onda
 Perturbação de tensão viajando na linha ideal.



UNICAMP

Linha não dissipativa ideal ou sem perdas

Suponha que haja um observador montado na onda, no ponto marcado P. Ele deve ver a perturbação (onda) parada. O argumento $t - \sqrt{LC}x$ permanece constante para ele, ou seja:

$$t - \sqrt{LC}x = K \quad (20)$$

Fazendo-se a derivada em relação ao tempo da eq.(20) tem-se:

$$1 - \sqrt{LC} \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = v = 1 / \sqrt{LC} \text{ [m / s]}$$

(21)

velocidade de propagação da onda



UNICAMP

Linha não dissipativa ideal ou sem perdas

Como num problema de causa e efeito observa-se que associada à onda de tensão expressa na eq. (15), deve existir uma correspondente **onda de corrente**. Tentemos uma correspondente onda de corrente para a direita como sendo:

$$i(x, t) = \frac{f_1(t - \sqrt{LC} x)}{Z_0} \quad (22)$$

onde Z_0 deve ser determinada.



UNICAMP

Linha não dissipativa ideal ou sem perdas

Substituindo (22) na eq. (5) (com $R = 0$) tem-se: $\boxed{\left[R + L \frac{\partial}{\partial t} \right] i(x,t) = - \frac{\partial}{\partial x} e(x,t)}$

$$L \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{f_1(t - \sqrt{LC} x)}{Z_0} \right] = - \frac{\partial}{\partial x} f_1(t - \sqrt{LC} x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{L}{Z_0} f_1'(t - \sqrt{LC} x) = \sqrt{LC} f_1'(t - \sqrt{LC} x) \quad (23)$$

$$Z_0 = L / \sqrt{LC}$$

Linha não dissipativa ideal ou sem perdas

Para que (23) seja verdadeira, é necessário que a constante arbitrada Z_0 verifique a relação: $L/Z_0 = \sqrt{LC}$ ou $Z_0 = L/\sqrt{LC}$

Ou seja,
$$Z_0 = R_0 = \sqrt{L/C} \quad [\Omega] \quad (24)$$

A grandeza Z_0 é conhecida como a impedância característica da linha sem perdas, e é dada em Ω quando L é dado em H/m, e C em F/m. Para a linha sem perdas, como se nota de (24), Z_0 é um número puramente real, ou seja, $Z_0 = R_0$, pois L e C são sempre números reais positivos. Desta forma a expressão (22) é de fato a solução de corrente associada à solução de tensão expressa na eq.(15).

Reflexões na linha sem perda. Coeficientes de reflexão de tensão e de corrente

manipulando as relações , tem-se:

$$\frac{e_c^+ + e_c^-}{\frac{e_c^+}{Z_0} - \frac{e_c^-}{Z_0}} = R_c$$

Dividindo o numerador e o denominador por e_c^+ e reorganizando os termos, obtém-se :

$$\frac{e_c^-}{e_c^+} = \frac{R_c - Z_0}{R_c + Z_0}$$



UNICAMP

Reflexões na linha sem perda. Coeficientes de reflexão de tensão e de corrente

A relação e_c^- / e_c^+ é conhecida como coeficiente de reflexão de tensão Γ_c na posição da carga, ou seja:

$$\Gamma_c = \frac{e_c^-}{e_c^+} = \frac{R_c - Z_0}{R_c + Z_0} \quad (36)$$

Na eq. (36) nota-se que o único valor de R_c que evita as reflexões é $R_c = Z_0 = R_0 [\Omega]$. Neste caso, $\Gamma_c = 0$ e $e_c^- = \Gamma_c \cdot e_c^+ = 0$

$\Gamma_c = 0$ linha casada

$\Gamma_c = 1$ linha aberta

$\Gamma_c = -1$ linha em curto

Linhas de Regime Estacionário Senoidal

Introdução

O estudo de linha de transmissão em regime permanente senoidal é muito importante por várias razões. A existência de uma quantidade imensa de linhas de potência que operam em 60Hz ou 50 Hz pelo mundo já seria uma razão bem forte para tal estudo.

Há, na verdade, uma razão principal para o estudo de linhas de transmissão em regime permanente senoidal. Graças aos estudos de Fourier, Laplace e outros, qualquer sinal real no tempo (*periódico ou não*) tem um espectro em frequência.



UNICAMP

Os **sinais periódicos** são melhor tratados com o auxílio da **Série de Fourier**. Uma função periódica é decomposta num tom da frequência fundamental, bem como numa série infinita de tons senoidais harmônicos (*múltiplos inteiros da fundamental*) com suas respectivas amplitudes e fases.

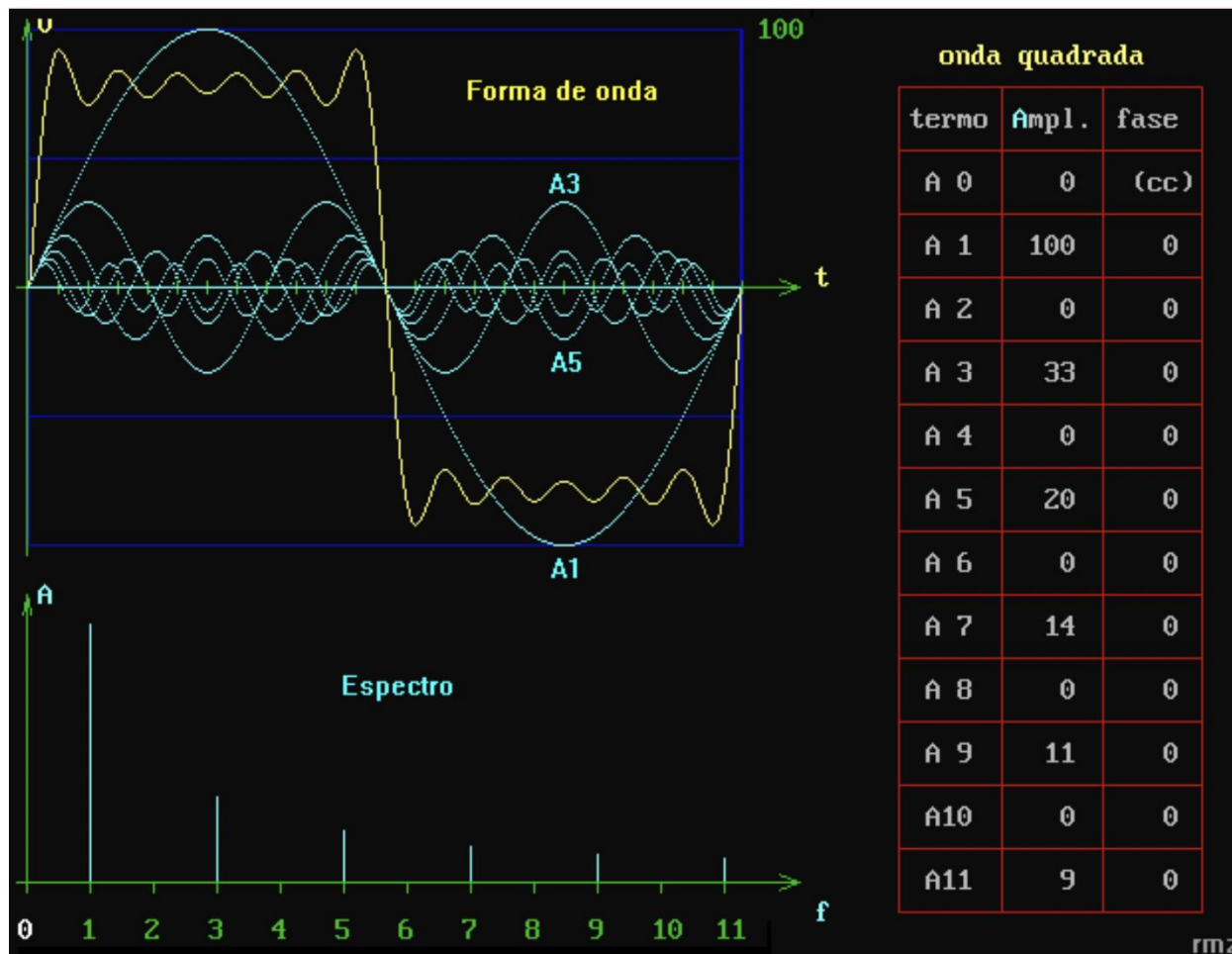
Este fato dá origem ao chamado espectro de linhas ou de raias. Há dois espectros de maior interesse: o de amplitude e o de fase. Os sinais **não periódicos**, por outro lado, são melhor tratados através da Integral ou **Transformada de Fourier**.

A diferença básica neste caso é que os espectros de amplitude e de fase são agora cheios ou contínuos, e não mais só de raias, como no caso dos sinais periódicos.

No momento, o que deve ficar claro é o fato de que pode-se encarar **qualquer sinal real no tempo como tendo a sua contrapartida em frequência.**

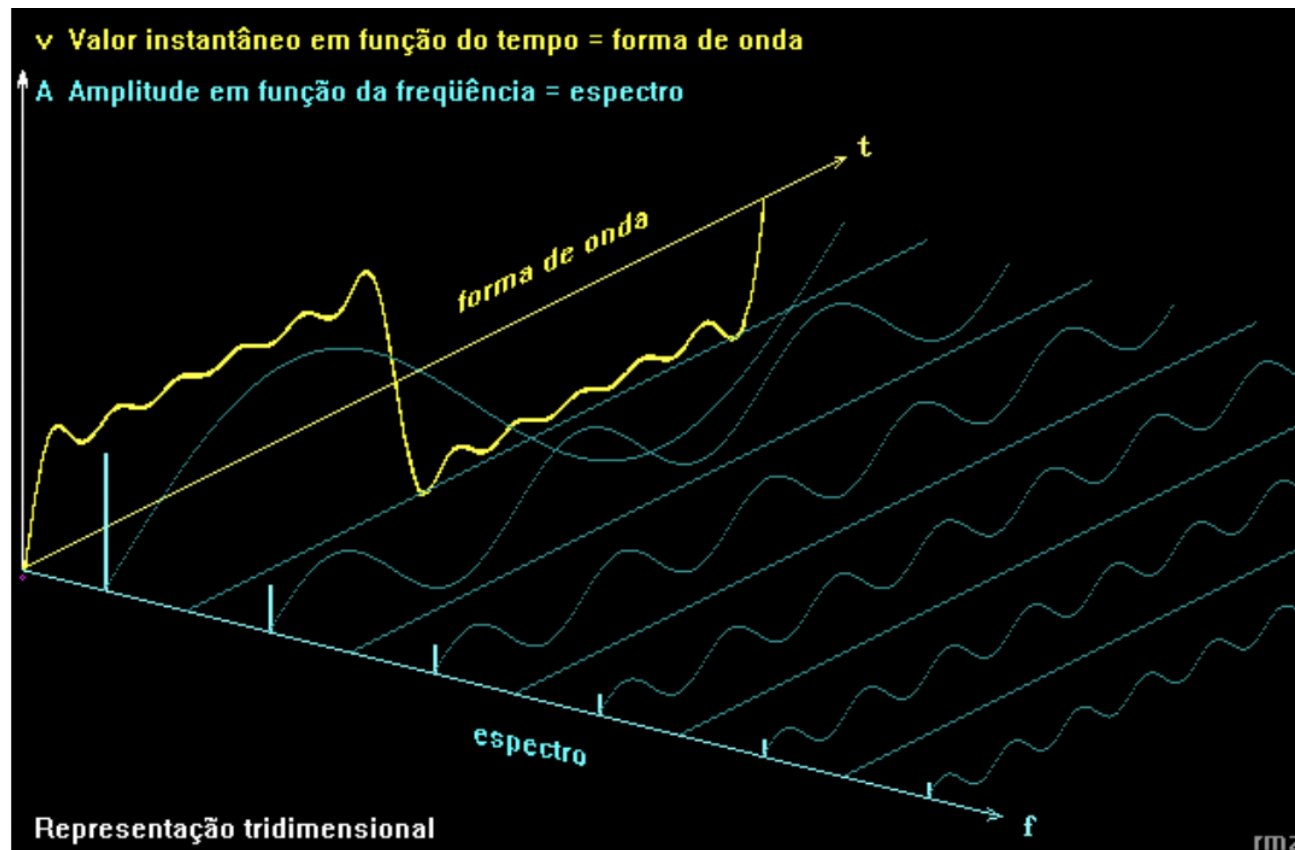
Qualquer sinal real pode ser encarado como sendo uma soma de infinitos tons senoidais eternos ($-\infty$ até $+\infty$) de certas amplitudes e fases. Esta soma deve reproduzir o valor da função (*do sinal*) para qualquer instante ($-\infty < t < \infty$).

A figura mostra um exemplo de como se forma uma onda complexa (no caso uma onda **quadrada simétrica**) e o seu respectivo espectro. A forma de onda resultante (em amarelo) é o somatório a todo instante dos termos (em azul) :



Relação entre forma de onda e espectro

Forma tridimensional em perspectiva para ser mais exato, para a onda quadrada da figura anterior



Solução Geral de tensão e Corrente na Linha em Regime Permanente Senoidal

Foram vistas as equações diferenciais válidas numa linha genérica:

$$\left[R + L \frac{\partial}{\partial t} \right] i(x,t) = - \frac{\partial}{\partial x} e(x,t)$$

Eq. 5

$$\frac{\partial e}{\partial x} = - Ri - L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

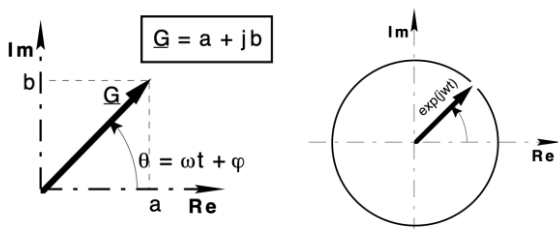
$$\left[G + C \frac{\partial}{\partial t} \right] e(x,t) = - \frac{\partial}{\partial x} i(x,t)$$

Eq. 7

$$\frac{\partial i}{\partial x} = - Ge - C \frac{\partial e}{\partial t} \quad (\text{A.2})$$

Nas equações anteriores a tensão “e”, bem como a corrente “i” são funções de “x” e de “t”.

No regime estacionário senoidal as tensões e correntes são, como já visto em teoria de circuitos C.A., as projeções de vetores ou **fases girantes**, ou seja:



$$e = \text{Re}[E \cdot \exp(j\omega t)] \quad (\text{A.3})$$

O fasor \underline{G} é o vetor girante $\underline{G} \cdot \exp(j(\omega t))$

$$i = \text{Re}[I \cdot \exp(j\omega t)] \quad (\text{A.4})$$

Nas equações (A.3) e (A.4), as quantidades entre parênteses são conhecidas como fases girantes.



UNICAMP

Nas equações (A.3) e (A.4), E e I são as amplitudes da tensão e da corrente, respectivamente. Isto pode ser visualizado lembrando as **identidades de Euler**, e aplicando nas eqs. (A.3) e (A.4). Assim,

$$e = \operatorname{Re}[E \cdot \cos \omega t + jE \cdot \operatorname{sen} \omega t] = E \cdot \cos \omega t \quad (\text{A.5})$$

$$i = \operatorname{Re}[I \cdot \cos \omega t + jI \cdot \operatorname{sen} \omega t] = I \cdot \cos \omega t \quad (\text{A.6})$$

As quantidades conhecidas apenas como fasores são as quantidades (*reais ou complexas*) que se obtém dos fasores quando se faz $t = 0$, isto é, quando se omite a dependência temporal.

A omissão do termo $e^{j\omega t}$ é geralmente feita na teoria de circuitos alternados senoidais. Sendo assim, se o fasor tensão num ponto qualquer do circuito for obtido como sendo o número complexo $E = E_0 \angle \theta_0$, a correspondente onda de tensão real no domínio do tempo é obtida, fazendo:

$$E = \text{Re}[E \cdot \exp(j\omega t)] = E_0 \cos(\omega t + \theta_0) \quad (\text{A.7})$$

Ao invés do fasor amplitude, muitas vezes, se fala no fasor amplitude eficaz. Neste caso, deve-se lembrar que:

$$\text{Fasor eficaz} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\text{fasor amplitude}) \quad (\text{A.8})$$

Um dos aspectos mais interessantes da análise de Fourier reside no fato de que se soubermos a resposta de amplitude e de fase para "*todos*" os tons senoidais no intervalo das frequências "*de interesse*", ou seja, na banda de frequência do sinal de entrada, saberemos também como é a forma do sinal "*transiente*" da resposta temporal numa linha real.

$$\frac{\partial e}{\partial x} = -Ri - L \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$e = \text{Re}[E \cdot \exp(j\omega t)]$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -Ge - C \frac{\partial e}{\partial t}$$

$$i = \text{Re}[I \cdot \exp(j\omega t)]$$



UNICAMP

Das equações (A.1) e (A.2) nota-se que há derivadas dos fasores de tensão e corrente tanto em relação a x como a t . Vamos colocar estas duas equações citadas numa forma mais adequada ao tratamento fasorial.

Substituindo os fasores girantes de (A.3) e de (A.4) e (A.2), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} [E \cdot \exp(j\omega t)] = -RI \exp(j\omega t) - j\omega LI \exp(j\omega t) \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [I \cdot \exp(j\omega t)] = -GE \exp(j\omega t) - j\omega CE \exp(j\omega t) \quad (\text{A.10})$$

Omitindo a dependência temporal, as equações (A.9) e (A.10) podem ser escritas com derivadas totais:

$$\frac{dE}{dx} = - (R + j\omega L) \cdot I \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{dI}{dx} = - (G + j\omega C) \cdot E \quad (\text{A.12})$$

Define-se:

Impedância série da linha por unidade de comprimento

$$Z = R + j\omega L \quad (\text{A.13})$$

Admitância paralela da linha por unidade de comprimento

$$Y = G + j\omega C \quad (\text{A.14})$$

Portanto:

$$\frac{dE}{dx} = - ZI \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{dI}{dx} = - YE \quad (\text{A.16})$$



UNICAMP

Vamos obter uma equação diferencial que contenha só a tensão fasorial E . Fazendo $d(\text{eq. A.15}) / dx$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dx} &= -ZI \\ \frac{dI}{dx} &= -YE \end{aligned} \quad \frac{d^2 E}{dx^2} = -Z \frac{dI}{dx} \quad (\text{A.17})$$

Substituindo (A.16) em (A.17), tem-se:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} = (ZY)E \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{d^2 E}{dx^2} = (ZY)E$$



Tentemos uma solução de E para a equação (A.18).

Deve ser uma função que, diferenciada duas vezes, reproduza a função original multiplicada por (ZY) .

uma solução possível é:

$$E = C_1 \exp \left[-\sqrt{ZY} x \right] \quad (\text{A.19})$$

Onde C_1 é uma constante que tem a dimensão de tensão (*volts*). Entretanto, é necessário completar a solução de E com a possibilidade de haver reflexões na linha, de volta ao gerador. Vamos incluir:

$$E = C_2 \exp \left[\sqrt{ZY} x \right] \quad (\text{A.20})$$

Portanto, a solução geral é do tipo:

$$E = C_1 \exp\left[-\sqrt{ZY} x\right] + C_2 \exp\left[\sqrt{ZY} x\right] \quad (\text{A.21})$$

Substituindo (A.21) em (A.15) pode-se achar a correspondente solução da corrente I , ou seja:

$$I = \frac{1}{\sqrt{Z/Y}} \left\{ C_1 \cdot \exp\left[-\sqrt{ZY} x\right] - C_2 \exp\left[\sqrt{ZY} x\right] \right\} \quad (\text{A.22})$$



UNICAMP

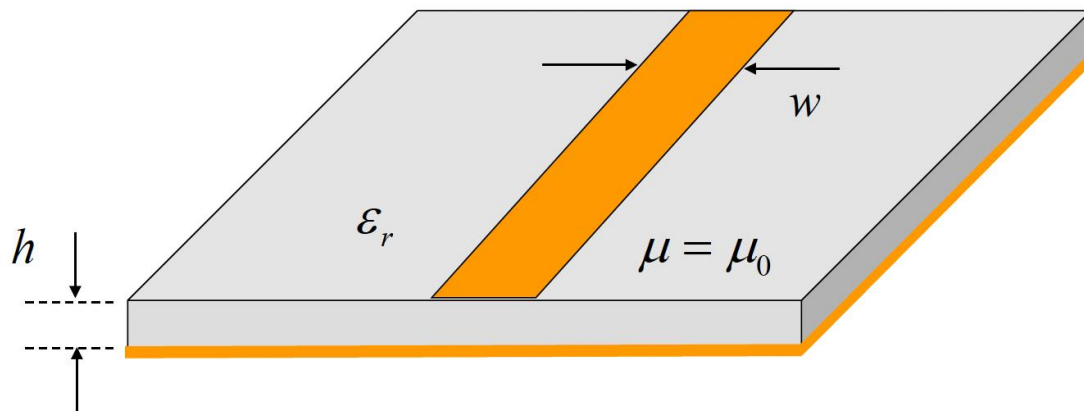
A grandeza (*complexa em geral*) $(Z/Y)^{1/2}$ é a impedância característica Z_0 da linha real, ou seja,

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad [\Omega]$$

(A.23)

Observe que Z_0 é dada em $[\Omega]$, e independente do comprimento da linha: Z_0 é função de R, L, G, C e da frequência $\omega = 2\pi f$.

Lembrete: Para linha sem dissipação (*ideal*) $R=G=0$ e $Z_0 = R_0 = (L/C)^{1/2}$ (*real puro*).



Parallel-plate formulas:

$$C \approx \epsilon_0 \epsilon_r \frac{w}{h}, \quad w \gg h$$

$$L \approx \mu_0 \frac{h}{w}, \quad w \gg h$$

$$\text{Recall: } LC = \mu\epsilon = \frac{1}{c_d^2}$$

$$Z_0 \approx \eta_0 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{h}{w}, \quad w \gg h$$

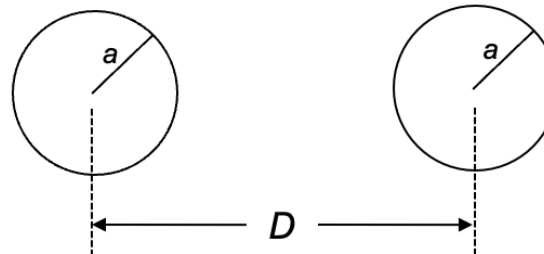
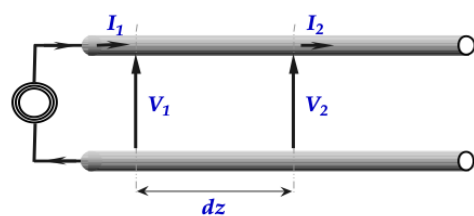
independente do
comprimento da linha

$$LC = \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r = \mu\epsilon$$

Speed of light in dielectric medium:

$$c_d = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

$$c \equiv 2.99792458 \times 10^8 \text{ [m/s]}$$



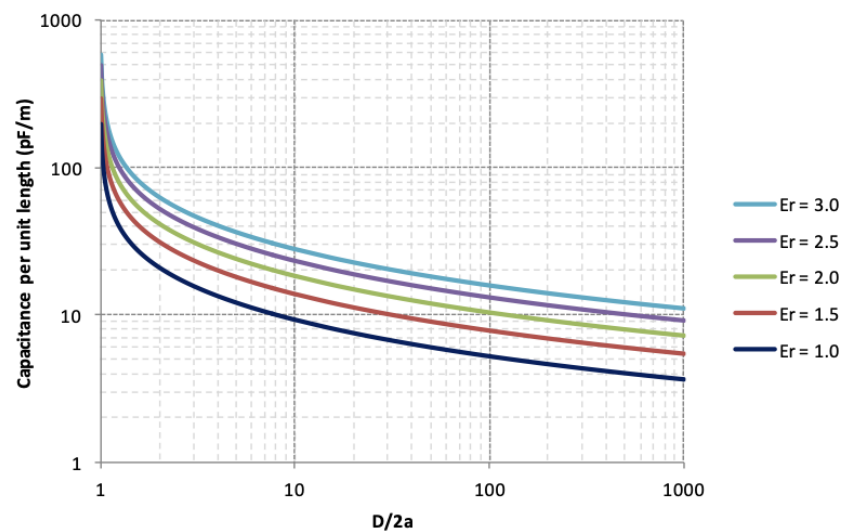
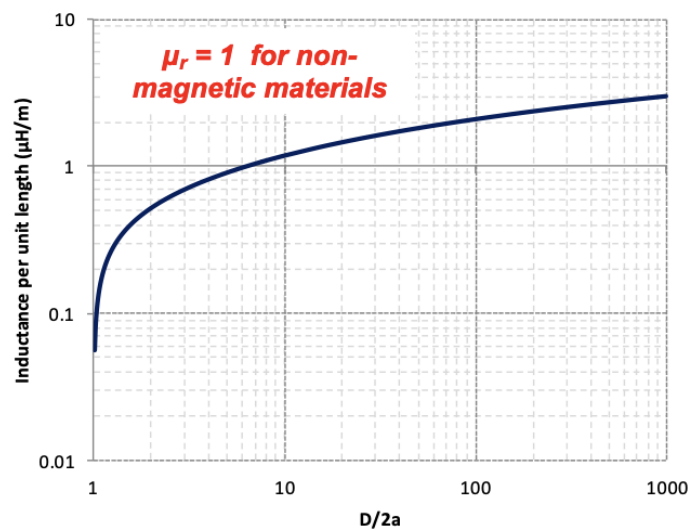
Inductance per unit length:

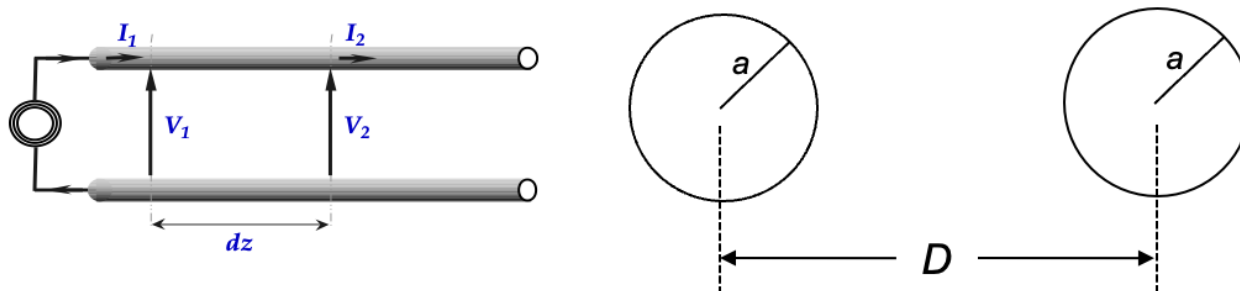
$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_r \mu_0}{\pi} \cdot \ln \left[\left(\frac{D}{2a} \right) + \sqrt{\left(\frac{D}{2a} \right)^2 - 1} \right]$$

Capacitance per unit length:

$$\frac{C}{l} = \frac{\pi \epsilon_r \epsilon_0}{\ln \left[\left(\frac{D}{2a} \right) + \sqrt{\left(\frac{D}{2a} \right)^2 - 1} \right]}$$

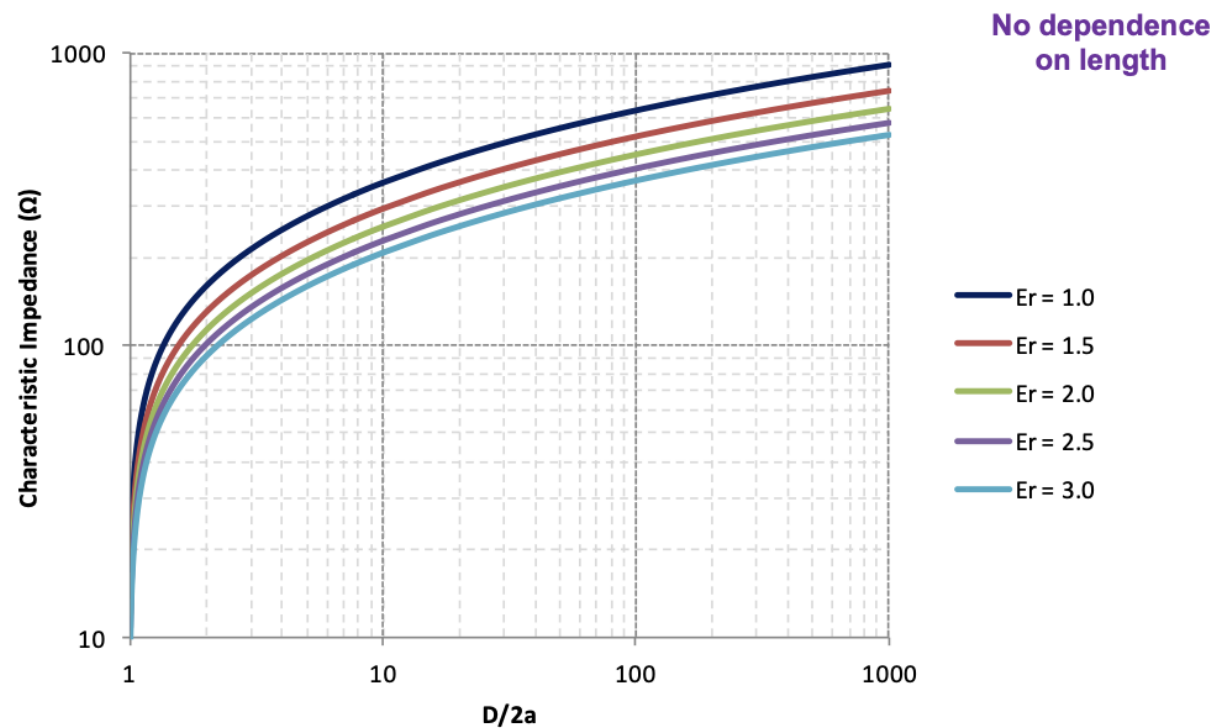
$D/2a$
dependence



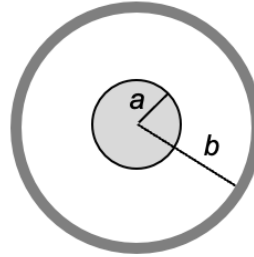


$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 120 \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \cdot \ln \left[\left(\frac{D}{2a} \right) + \sqrt{\left(\frac{D}{2a} \right)^2 - 1} \right]$$

← **D/2a dependence**



CABO COAXIAL



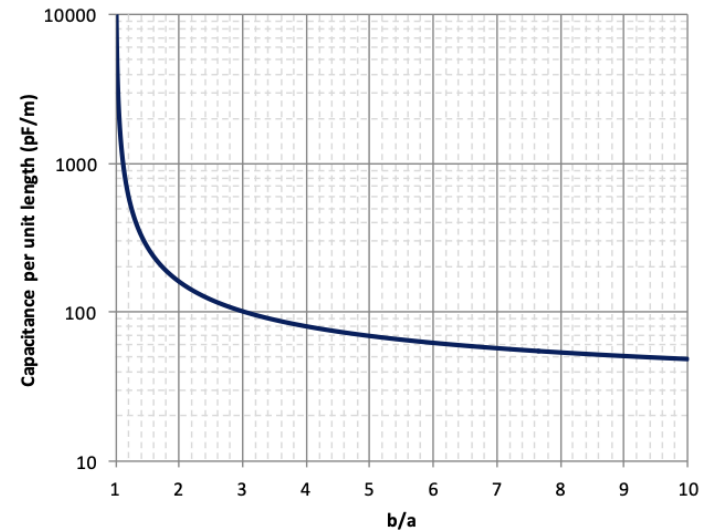
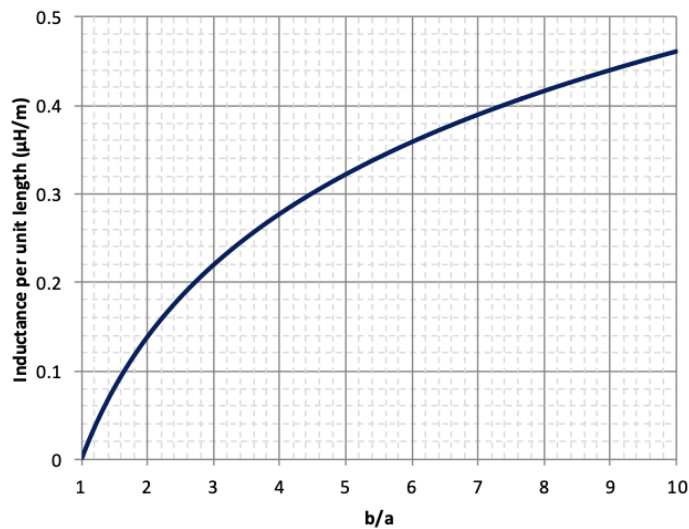
Inductance per unit length (H/m):

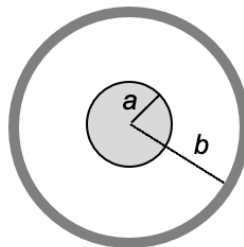
$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_r \mu_0}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\begin{aligned}\mu_r &= 1 \\ \epsilon_r &= 2 \\ \text{(typ.)}\end{aligned}$$

Capacitance per unit length (F/m):

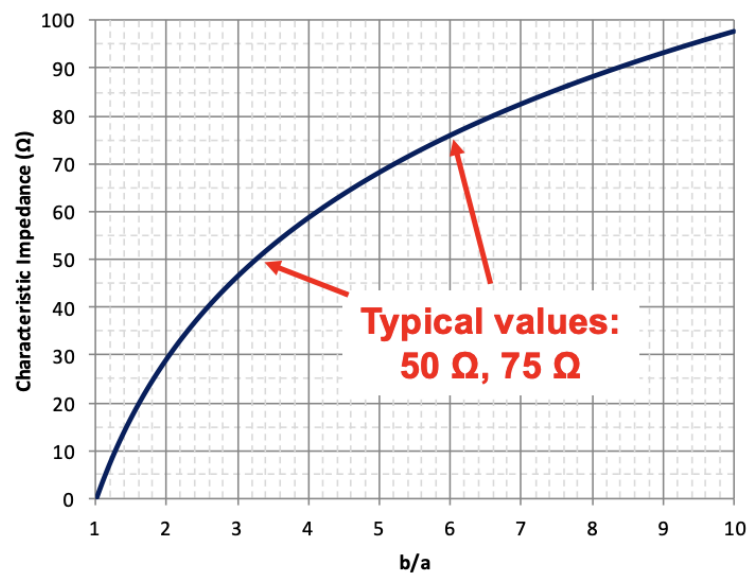
$$\frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon_r\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$





Characteristic impedance (Ω):

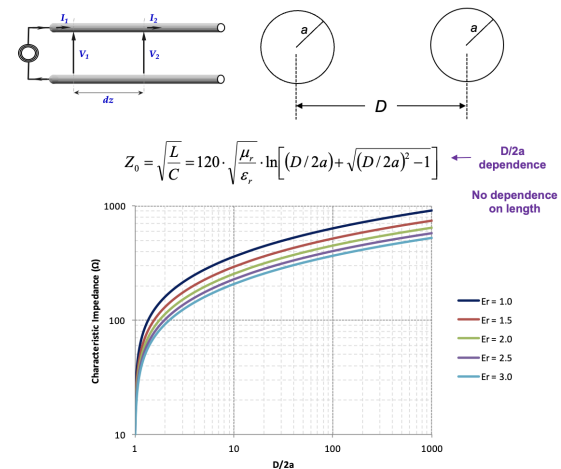
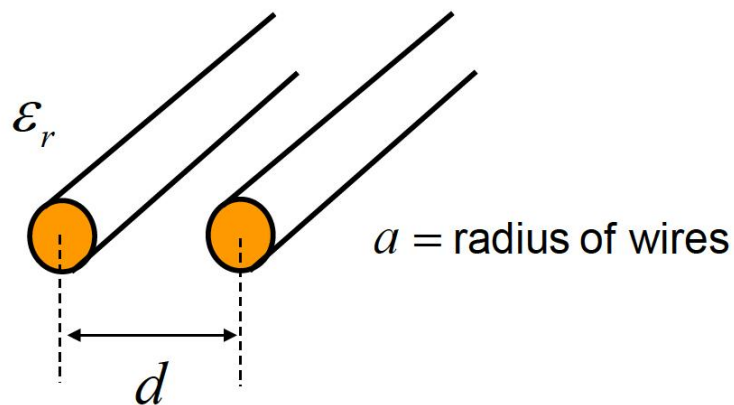
$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 60 \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



$\mu_r = 1$
 $\epsilon_r = 2$
(typ.)



UNICAMP



$$C = \frac{\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\cosh^{-1} \left(\frac{d}{2a} \right)} \quad [\text{F/m}]$$

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \cosh^{-1} \left(\frac{d}{2a} \right) \quad [\text{H/m}]$$

$$Z_0 = \frac{1}{\pi} \eta_0 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \cosh^{-1} \left(\frac{d}{2a} \right) \quad [\Omega]$$

$$Z_0 \approx \frac{1}{\pi} \eta_0 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left(\frac{d}{a} \right) \quad [\Omega]$$

$a \ll d$

$$E = C_1 \exp[-\sqrt{ZY} x] + C_2 \exp[\sqrt{ZY} x]$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{Z/Y}} \{C_1 \cdot \exp[-\sqrt{ZY} x] - C_2 \exp[\sqrt{ZY} x]\}$$



UNICAMP

observando as equações (A.21) e (A.22), nota-se que a grandeza γ é responsável pela propagação. Assim, define-se:

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta$$

(A.24)

onde:

γ = const. de propagação complexa ou função de propagação.

α = const. de atenuação da linha dada em [nep/m]

β = const. de desvio de fase da linha dada em [rad/m].

SEM REFLEXÃO

Linha infinita, **velocidade de fase e comprimento de onda**

É instrutivo neste ponto, analisar como ficam as soluções obtidas na secção anterior para o caso de uma linha de transmissão de comprimento infinito, ($\ell = \infty$). A Fig. A.1 ilustra esta situação.

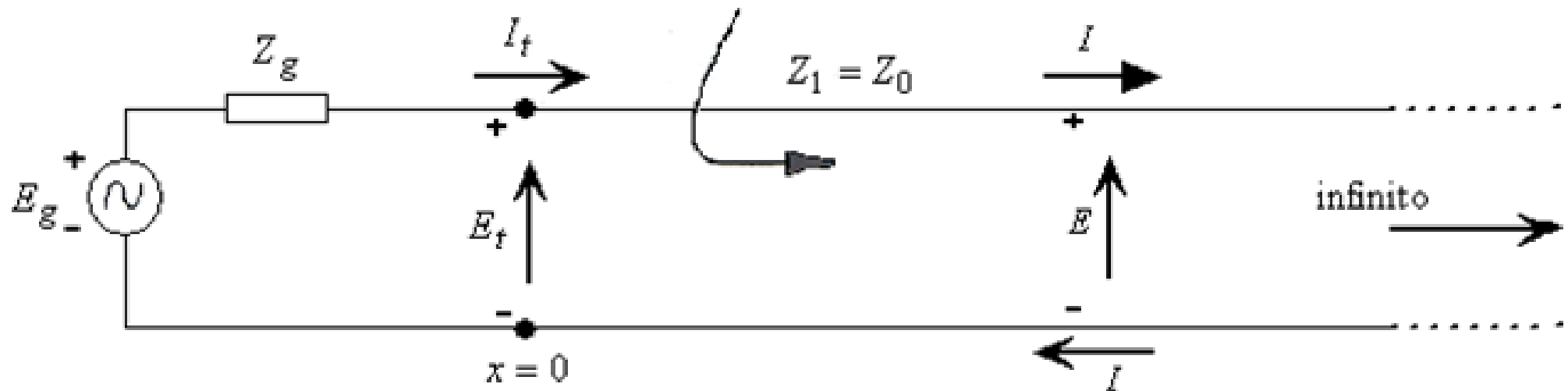


Figura A.1 – **Linha Infinita.**

Nesta Figura, E_t e I_t são os fasores tensão e corrente na posição (no lado da transmissão), E e I são os fasores tensão e corrente num ponto qualquer, a uma distância x do gerador.

Como o termo de propagação γ envolve a atenuação α da linha, que é uma quantidade positiva, é natural esperar que as soluções de tensão (ver eq.(A.21) e de corrente (ver eq. (A.22) tenham $C_2 = 0$.

A existência do 2º. termo nas equações citadas faria com que este termo tendesse a infinito, à medida que $x \rightarrow \infty$. Isto seria impossível do ponto de vista de energia, uma vez que a linha real dissipa energia de fato. Portanto C_2 deve ser zero.

$$E = C_1 \exp[-\sqrt{ZY} x] + C_2 \exp[\sqrt{ZY} x]$$



A solução de tensão na linha é então:



$$E = C_1 \exp[-\sqrt{ZY} x] \quad (A.25)$$

→ (Propagação para a direita)

Calculemos C_1 a partir de uma condição de contorno. Para $x = 0$, tem-se $E = E_t$ (*tensão na boca da linha*). Então a eq. (A.25). Pode ser escrita como a seguir:



UNICAMP

Para $x = 0$

$$E_t = C_1 \exp[0] = C_1$$

(A.26)

$$E = E_t \exp[-\sqrt{ZY} x] = E_t \exp[-\gamma x]$$

(A.27)

$$E = E_t \exp[-(\alpha + j\beta)x]$$

(A.28)

$$E = E_t \exp[-\alpha x] \exp[-j\beta x] = E_t \exp[-\alpha x] \angle^{-\beta x}$$

(A.29)

De (A.29), nota-se que a fase de referência **(fase zero)** é colocada na **tensão de entrada**. E_t é real e é a amplitude de pico da onda $\cos \omega t$. Se, por outro lado, a referência de fase for em E_g , E_t seria complexa indicando alguma fase diferente de zero, dado que Z_g e/ou Z_0 são complexas em geral.

$$I = \frac{1}{\sqrt{Z/Y}} \{C_1 \cdot \exp[-\sqrt{ZY} x] - C_2 \exp[\sqrt{ZY} x]\}$$



UNICAMP

A solução de corrente é obtida de maneira análoga da eq. (A.22), fazendo também $C_1 = E_t$ e $C_2 = 0$. Obtém-se então:

$$I = \frac{E_t}{Z_0} \exp[-\alpha x] \exp[-j\beta x] \quad (\text{A.30})$$

Assim, se E_t é real (fase zero na tensão de entrada) tem-se:

$$I = \frac{E_t}{|Z_0|} \exp[-\alpha x] \exp[-j\beta x - j\theta_0] \quad (\text{A.31})$$



UNICAMP

É importante, neste momento, lembrar que a eq. (A.29) dá a tensão na forma fasorial. Para achar a onda no tempo multiplica por $e^{j\omega t}$:

$$e(x, t) = \text{Re}[E_t \exp(-\alpha x) \exp(-j\beta x) \exp(j\omega t)] \quad (\text{A.36})$$

$$e(x, t) = E_t \exp(-\alpha x) \cos(\omega t - \beta x) \quad (\text{A.37})$$

Da eq. (A.37), nota-se que em cada ponto x qualquer da linha, há uma oscilação senoidal (*ou cossenoidal*) de tensão com uma amplitude, e com atraso de fase dado em radianos. Pode-se notar também que se $\alpha \neq 0$ (*linha real*) a amplitude de oscilação cai com a distância x do gerador, de uma maneira exponencial.



UNICAMP

Note finalmente que, se $\alpha = 0$ (*linha ideal*) a amplitude da oscilação não cai mais com x (é constante, e vale E_t); há apenas um atraso de fase proporcional à distância x do gerador ($-\beta x$).

$$e(x, t) = E_t \exp(-\alpha x) \cos(\omega t - \beta x)$$



A forma de (A.37) é reconhecida como sendo a equação de uma onda progressiva (x e t *aparecem conjuntamente no argumento do cosseno*). A ideia de uma onda senoidal progressiva é melhor visualizada se usarmos a **ideia do observador montado na onda**. O argumento é então uma constante, ou seja :

$$\omega t - \beta x = K$$

(A.38)



Nota-se que (A.37) descreve uma perturbação senoidal que *viaja* para a direita (*sentido de x crescente*), uma vez que se t aumenta (ver eq. A.38), x tem que aumentar, para manter a constante K . A velocidade desta perturbação é obtida de (A.38), diferenciando em relação ao tempo, ou seja:

$$\omega t - \beta x = K \quad \omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0 \quad (\text{A.39})$$

$$v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \quad (\text{A.40})$$



A equação (A.40) define a velocidade de fase v_f da perturbação senoidal.

Se a linha não tem perdas ($R = G = 0$) a função de propagação γ (ver eq. A.24) fornece:

$$\gamma = \sqrt{(j\omega L)(j\omega C)} = j\omega\sqrt{LC} = \alpha + j\beta \quad (\text{A.41})$$

Portanto:

$$\alpha = 0 \quad \beta = \omega\sqrt{LC} \quad (\text{A.42})$$

VALORES MAIS PRECISOS

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{(\epsilon' \mu' - \epsilon'' \mu'')}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon' \mu'' + \epsilon'' \mu'}{\epsilon' \mu' - \epsilon'' \mu''} \right)^2} - 1 \right)}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega \sqrt{\frac{(\epsilon' \mu' - \epsilon'' \mu'')}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon' \mu'' + \epsilon'' \mu'}{\epsilon' \mu' - \epsilon'' \mu''} \right)^2} + 1 \right)}$$

where,

$\omega = 2\pi f$ = angular frequency of the signal in [rad/sec]

ϵ' = real part of the complex permittivity ($\underline{\epsilon} = \epsilon' - j\epsilon''$) in [F/m]

ϵ'' = imaginary part of the complex permittivity ($\underline{\epsilon} = \epsilon' - j\epsilon''$) in [F/m]

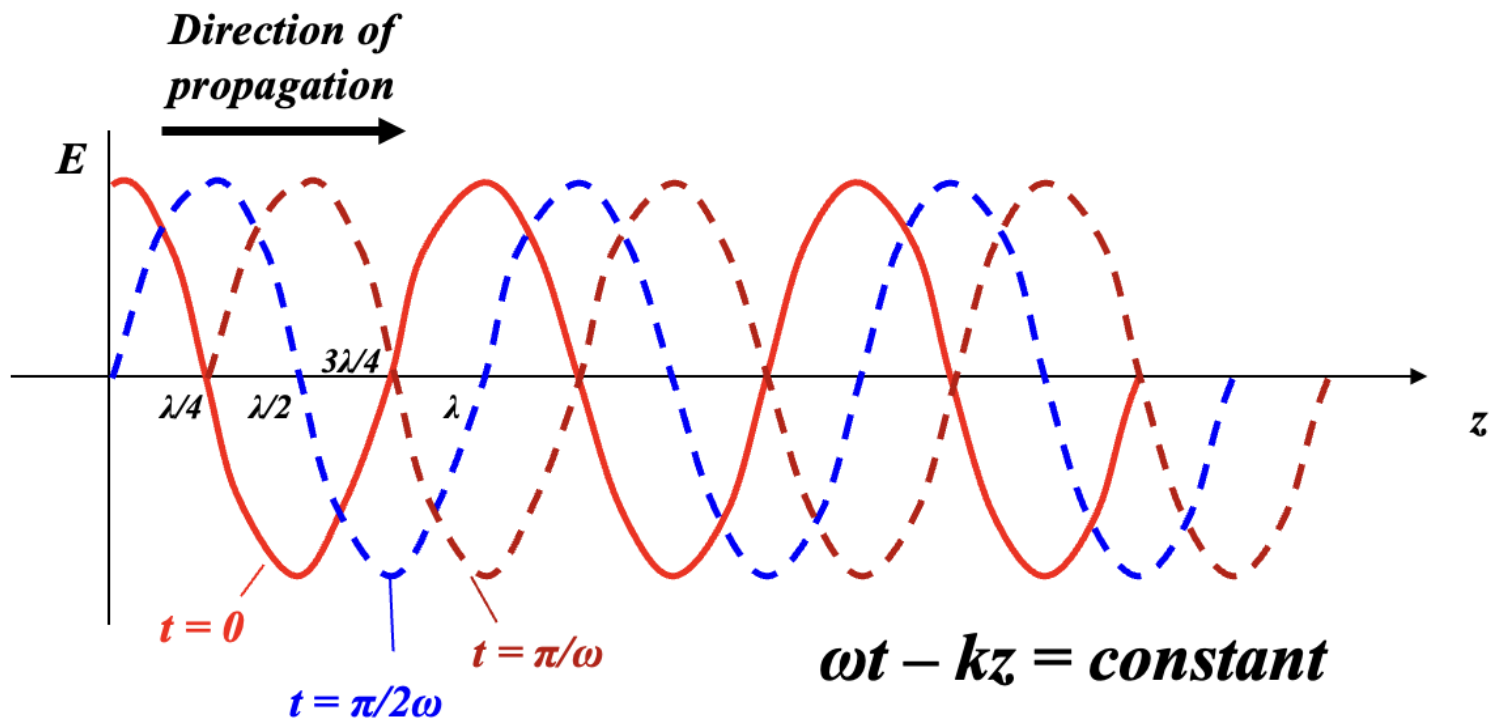
μ' = real part of the complex permeability ($\underline{\mu} = \mu' - j\mu''$) in [H/m]

μ'' = imaginary part of the complex permeability ($\underline{\mu} = \mu' - j\mu''$) in [H/m]



UNICAMP

$$E(z, t) = \text{Re}[E_0 e^{j(\omega t - kz)}] = E_0 \cos(\omega t - kz)$$



Velocity of propagation:

$$u = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Wavelength:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{u}{f}$$



UNICAMP

Assim, substituindo o valor obtido para β de (A.42) em (A.40), obtém-se:

$$v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\alpha = 0 \quad \beta = \omega\sqrt{LC}$$

$$v_f = \frac{\omega}{\omega\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad [\text{m/s}]$$

$$\alpha = 0 \quad \beta = \omega\sqrt{LC}$$

(A.43)

Assim, conclui-se que para **linha ideal** a velocidade de fase é independente da frequência (ver (A.43)). Isto é uma consequência de que, na linha ideal, **β é diretamente proporcional à frequência** (ver (A.42)).

Para uma linha real, de modo geral não é diretamente proporcional à frequência. Por consequência, a **velocidade da fase não é uma constante**. Este fato é o responsável pelo fenômeno da dispersão em linhas.

DISCUSSÃO



As várias **componentes senoidais** (*pense no espectro de um pulso injetado na linha*) viajarão com velocidades de fase **diferentes**. Algumas chegarão antes das outras. A composição de todas elas na saída da linha não mais conformará o mesmo pulso injetado na entrada, e **ele estará então distorcido** (*ou espalhado no tempo*). Este tipo de distorção é causado pela não linearidade da constante de desvio da fase. É a chamada **distorção de fase**.

Um outro tipo de distorção é a chamada **distorção de amplitude**. Esta aparece devido ao fato de que a constante de atenuação não é, de fato, constante com a frequência. O valor de α é obtido através da relação (A.24), é **aproximadamente igual a raiz quadrada da frequência**.



UNICAMP

O fato de α variar com a frequência faz com que as várias componentes senoidais do pulso já referido anteriormente sofram atenuações diferentes. Deste modo, elas também não podem mais conformar o pulso que foi injetado na entrada da linha. Assim, ele aparece distorcido na saída. É então o caso de **distorção de amplitude.**

$$I = \frac{E_t}{Z_0} \exp[-\alpha x] \exp[-j\beta x]$$

Para a corrente dada em (A.30), valem idênticas considerações àquelas já feitas para a tensão. É preciso apenas notar que, se Z_0 for real, E e I estão em fase para qualquer ponto x da linha. Se Z_0 não é real então, a corrente I está atrasada de um ângulo θ_0 em relação à tensão no mesmo ponto x da linha (ver eq. A.32).

$$I = \frac{E_t}{|Z_0|} \exp[-\alpha x] \underline{(\beta x + \theta_0)}$$



UNICAMP

Vamos definir agora o comprimento de onda λ como a menor distância entre dois pontos de mesma fase, ou seja:

$$\beta x \Big|_{x = \lambda} = \beta \lambda = 2\pi \text{ radianos} \quad (\text{A.44})$$

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \text{ ou } \beta = \frac{2\pi}{\lambda}} \quad (\text{A.45})$$



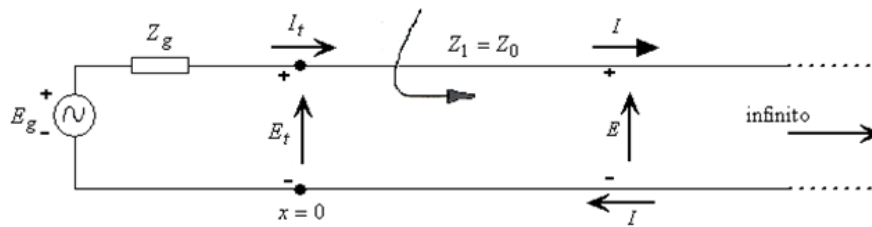
UNICAMP

⇒ Das relações (A.45) e (A.40), obtém-se várias identidades de interesse

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} v f = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T}} v f = \frac{v f}{f} = T v f$$

(A.46)

Onde **f** é a frequência cíclica dada em Hz, **T [s]** é o período da oscilação.



Linha finita bem terminada

Note que, na Fig. A.1, se a linha for seccionada num valor $x = \ell$ [m] mas, ao mesmo tempo, providenciarmos uma impedância de carga $Z_c = Z_0$ para terminar a linha de comprimento ℓ , as soluções já obtidas para E e I para $0 \leq x \leq \ell$ na secção anterior devem se conservar.

Linha finita bem terminada

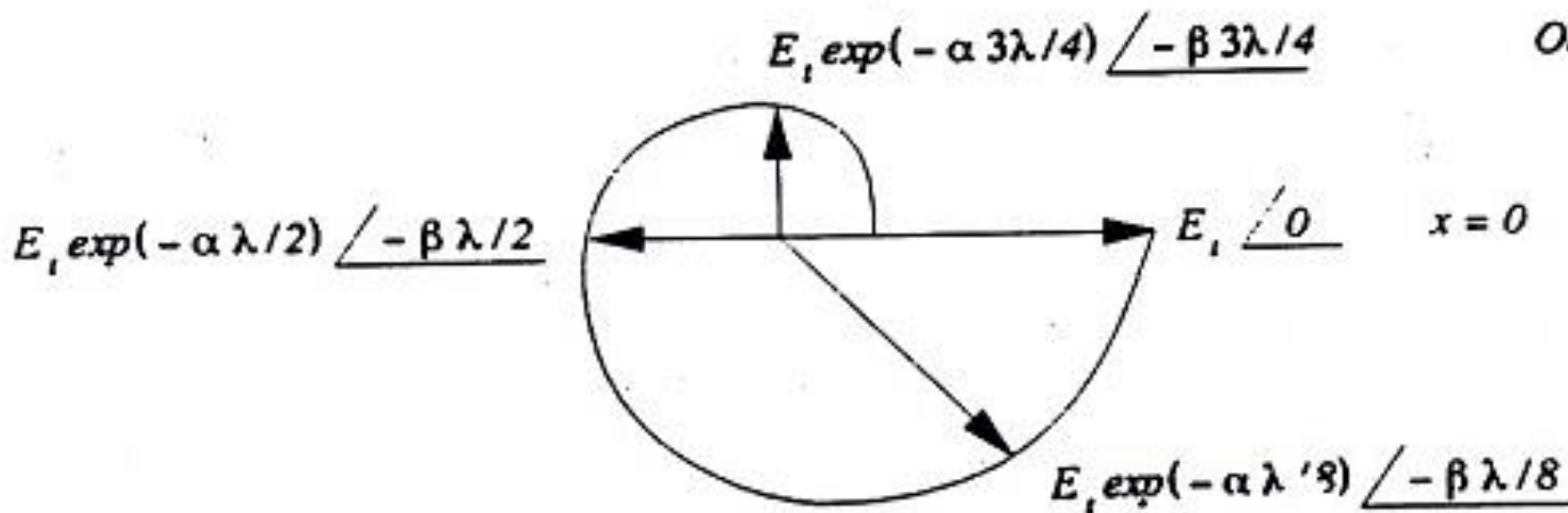
⇒ Isto se explica pelo fato de que os fasores E e I estão relacionados na linha através de $E/I = Z_0$, para qualquer x . Esta relação continua válida também em $x = \ell$, por construção. Assim

o trecho de linha de comprimento ℓ não pode “*perceber*” que a linha foi seccionada.

⇒ As soluções dos fasores E e I numa linha finita terminada com impedância de carga $Z_c = Z_0 [\Omega]$ são então aquelas já obtidas nas eqs. (A.29) e (A.30). A Fig. A.2 ilustra a posição dos fasores de tensão na linha, em um comprimento de onda.



UNICAMP



Obs.: Referência de fase em $x = 0$.

Fig. A. 2 – Fasores de tensão para $x = 0$ (no eixo real), $x = \lambda/8$, $x = \lambda/2$ e $x = 3\lambda/4$.

⇒ Note que a ponta dos fasores descreve uma espiral logarítmica decrescente à medida que se aumenta x , devido ao termo de atenuação $\exp(-\alpha x)$.

⇒ As distribuições de tensão ao longo da linha, para vários instantes sucessivos, podem ser visualizadas na Fig. A.3.

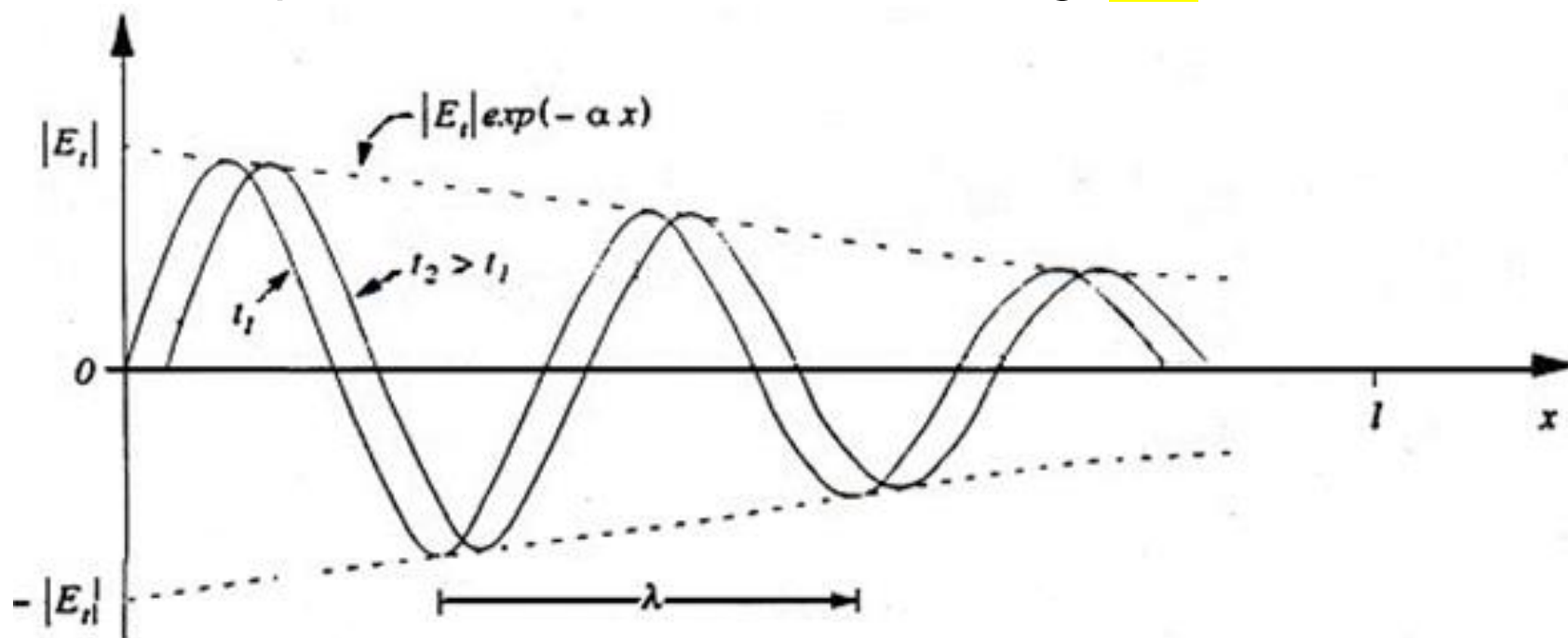
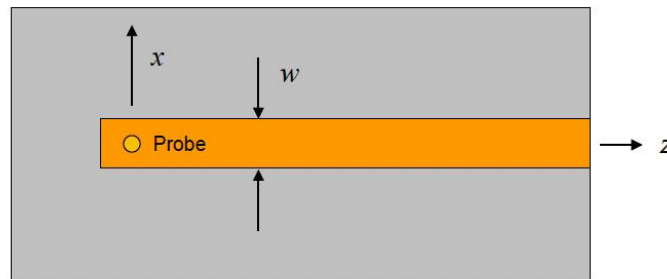


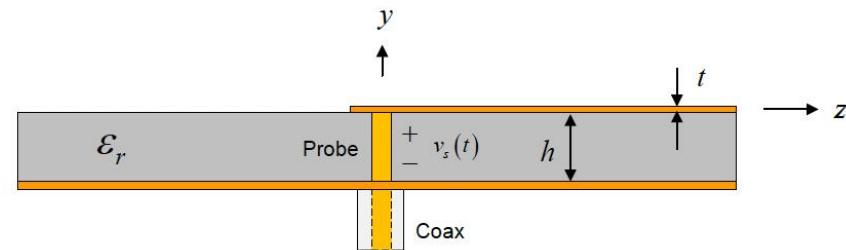
Fig. A.3.-Instantâneos de tensão na linha real terminada com $Z_c = Z_0$

⇒ Note da Fig. A.3 que as amplitudes das oscilações senoidais na linha decrescem de um modo exponencial, devido à presença do termo de atenuação na solução de (A.29). → $E = E_t \exp[-\alpha x] \exp[-j\beta x] = E_t \exp[-\alpha x] \angle^{-\beta x}$

Propagation on a microstrip line



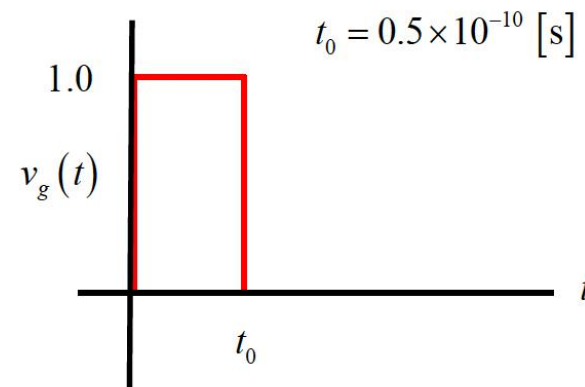
TOP VIEW



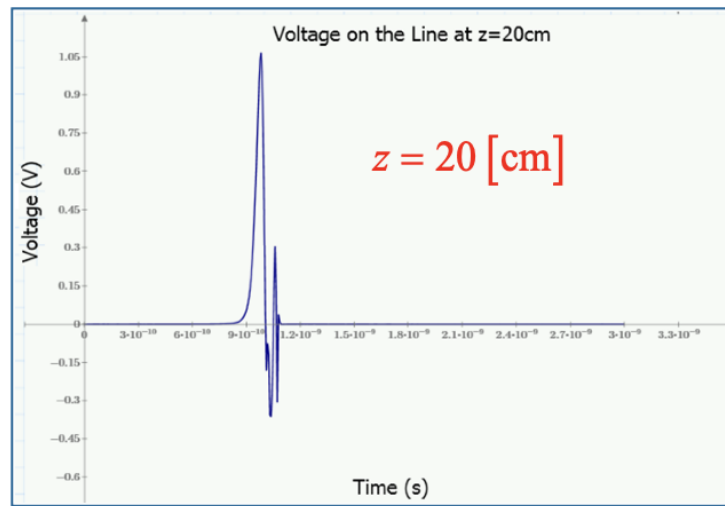
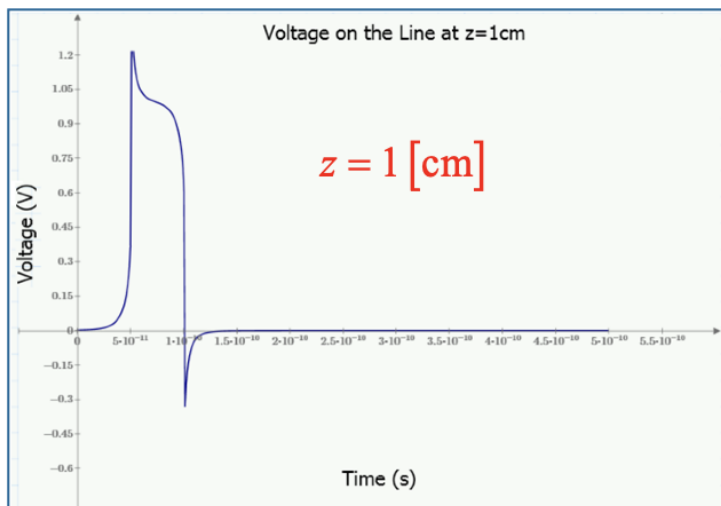
SIDE VIEW

$\epsilon_r = 2.33$
 $\tan \delta = 0.001$
 $h = 0.787 \text{ [mm]} \text{ (31 mils)}$
 $w = 2.35 \text{ [mm]}$
 $t = 0.0175 \text{ [mm]} \text{ ("half oz" copper cladding)}$
 $\sigma_m = 3.0 \times 10^7 \text{ [S/m]}$

Input signal:



Example: Propagation on a microstrip line



$$\epsilon_r = 2.33$$

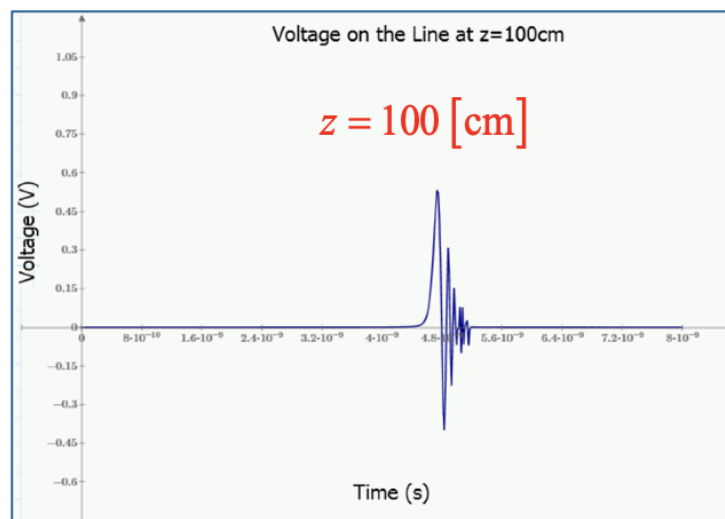
$$\tan \delta = 0.001$$

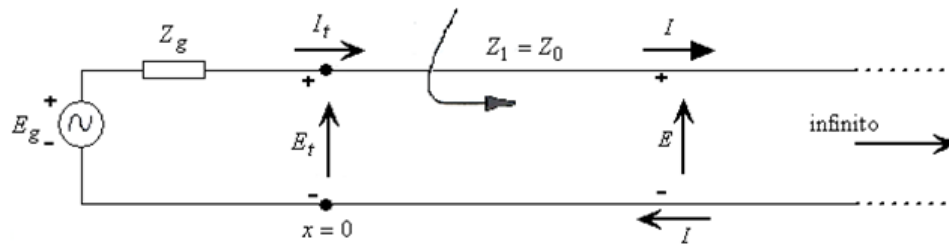
$$h = 0.787 \text{ [mm]} \text{ (31 mils)}$$

$$w = 2.35 \text{ [mm]}$$

$$t = 0.0175 \text{ [mm]} \text{ ("half oz" copper cladding)}$$

$$\sigma_m = 3.0 \times 10^7 \text{ [S/m]}$$





Reflexões na Linha e coeficiente de reflexão medido a partir da carga:

$$E = E^{+} + E^{-} \quad (\text{A.47})$$

onde o fasor E total é a soma do fasor incidente E^{+} e do fasor refletido E^{-} .

$$I = I^{+} + I^{-} \quad (\text{A.48})$$

A corrente é também da mesma forma.

$$E = C_1 \exp[-\sqrt{ZY} x] + C_2 \exp[\sqrt{ZY} x]$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{Z/Y}} \{C_1 \cdot \exp[-\sqrt{ZY} x] - C_2 \exp[\sqrt{ZY} x]\}$$

A comparação de (A.47) e (A.48) com as eqs. (A.21) e (A.22) mostra que :

$$I^+ = \frac{E^+}{Z_0} \quad (\text{A.49})$$

$$I^- = \frac{-E^-}{Z_0} \quad (\text{A.50})$$

A determinação das constantes (*que têm dimensão de tensão*) nas soluções já obtidas nas eqs. (A.21) e (A.22) pode ser feita de várias maneiras. É útil, por exemplo, expressar as quantidades em função das grandezas terminais (ver Fig. A.4).

$$E = C_1 \exp[-\sqrt{ZY} x] + C_2 \exp[\sqrt{ZY} x]$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{Z/Y}} \{C_1 \cdot \exp[-\sqrt{ZY} x] - C_2 \exp[\sqrt{ZY} x]\}$$



INICAMP

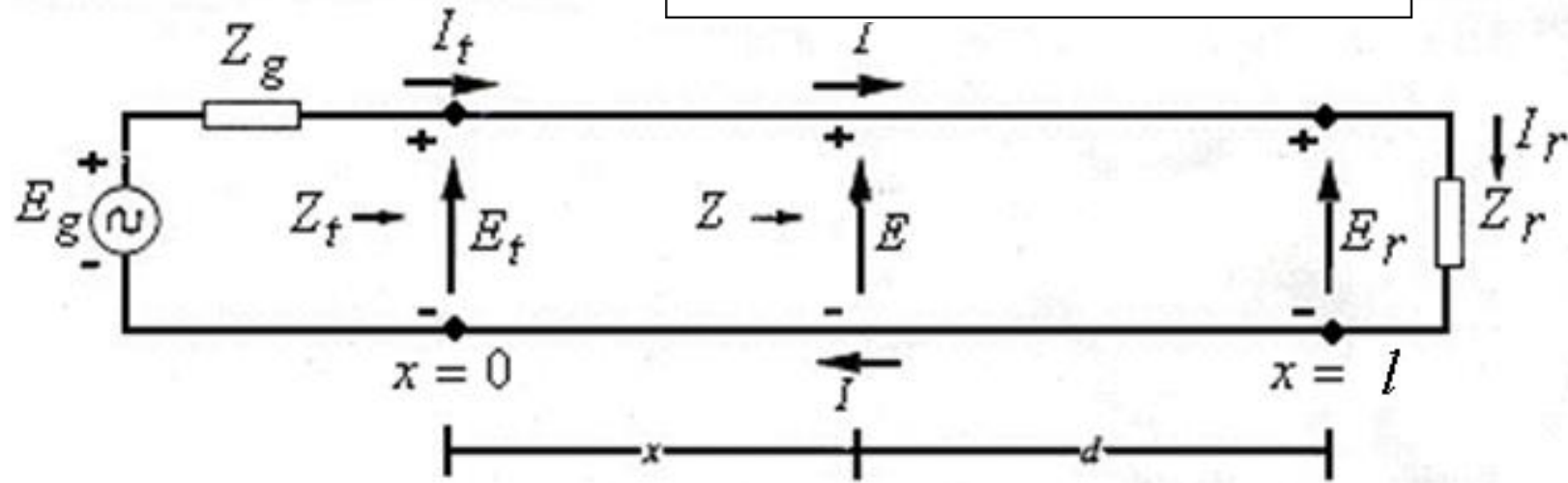


Fig. A.4 – Diagrama contendo a notação usada.

Vamos substituir $E = I_r Z_r$ e $I = I_r$ em $x = l$ nas eqs. (A.21) e (A.22).
Obtém-se então :

$$I_r Z_r = C_1 \exp(-\gamma l) + C_2 \exp(\gamma l) \quad (\text{A.51})$$

$$I_r Z_0 = C_1 \exp(-\gamma l) - C_2 \exp(\gamma l) \quad (\text{A.52})$$

Somando (A.51) e (A.52), obtém-se C_1 dado por :

$$C_1 = \frac{I_r}{2} (Z_r + Z_0) \exp(\gamma \ell) \quad (\text{A.53})$$

(A.21)

Subtraindo (A.52) e (A.51), obtém-se C_2 dado por :

$$C_2 = \frac{I_r}{2} (Z_r - Z_0) \exp(-\gamma \ell) \quad (\text{A.54})$$

$E = C_1 \exp[-\sqrt{ZY} x] + C_2 \exp[\sqrt{ZY} x]$

$I = \frac{1}{\sqrt{Z/Y}} \{C_1 \cdot \exp[-\sqrt{ZY} x] - C_2 \exp[\sqrt{ZY} x]\}$

Assim, substituindo estes valores em (A.21) e (A.22), E e I , respectivamente, obtém-se :

$$E = \frac{I_r}{2} \{ (Z_r + Z_0) \exp[\gamma(\ell - x)] + (Z_r - Z_0) \exp[\gamma(x - \ell)] \} \quad (\text{A.55})$$

$$I = \frac{I_r}{2Z_0} \{ (Z_r + Z_0) \exp[\gamma(\ell - x)] - (Z_r - Z_0) \exp[\gamma(x - \ell)] \} \quad (\text{A.56})$$



UNICAMP

Se quisermos referir a distância a partir da carga, pode-se usar a relação $d = \ell - x$ (ver Fig. A.4), temos então :

$$E = \frac{I_r}{2} \{ (Z_r + Z_0) \exp(\gamma d) + (Z_r - Z_0) \exp(-\gamma d) \} \quad (\text{A.57})$$

$$I = \frac{I_r}{2Z_0} \{ (Z_r + Z_0) \exp(\gamma d) - (Z_r - Z_0) \exp(-\gamma d) \} \quad (\text{A.58})$$

A relação entre a onda de tensão refletida pela incidente resulta no coeficiente de reflexão de tensão, ou seja:

$$\Gamma = \frac{E^-}{E^+} = \frac{Z_r - Z_0}{Z_r + Z_0} \exp(-2\gamma d) \quad (\text{A.59})$$

$$\Gamma = \Gamma_r \exp(-2\alpha d) \exp(-j2\beta d) \quad (\text{A.60})$$

Sendo

$$\Gamma_r = (Z_r - Z_0) / (Z_r + Z_0) \quad (\text{A.61})$$

o coeficiente de reflexão de tensão na posição da carga ou recepção. Enquanto o **coeficiente de reflexão de corrente** é dado por:

$$\Gamma' = -\Gamma = \frac{Z_0 - Z_r}{Z_r + Z_0} \exp(-2\alpha d) \exp(-j2\beta d) \quad (\text{A.62})$$

$$E = \frac{I_r}{2} \{ (Z_r + Z_0) \exp(\gamma d) + (Z_r - Z_0) \exp(-\gamma d) \}$$

$$I = \frac{I_r}{2Z_0} \{ (Z_r + Z_0) \exp(\gamma d) - (Z_r - Z_0) \exp(-\gamma d) \}$$



Qualquer ponto da linha

A impedância complexa num ponto da linha é obtida da divisão do fasor total **E pelo total I** . assim, usando as eqs. (A.57) e (A.58), obtém-se:

$$Z = \frac{E}{I} = Z_0 \frac{(Z_r + Z_0) \exp \gamma d + (Z_r - Z_0) \exp(-\gamma d)}{(Z_r + Z_0) \exp \gamma d - (Z_r - Z_0) \exp(-\gamma d)} \quad (\text{A.63})$$

Ou então:

$$Z = Z_0 \cdot \frac{Z_r [\exp(\gamma d) + \exp(-\gamma d)] + Z_0 [\exp(\gamma d) - \exp(-\gamma d)]}{Z_0 [\exp(\gamma d) + \exp(-\gamma d)] + Z_r [\exp(\gamma d) - \exp(-\gamma d)]} \quad (\text{A.64})$$

a relação trigonométrica

$$\frac{\exp(\gamma d) - \exp(-\gamma d)}{\exp(\gamma d) + \exp(-\gamma d)} = \operatorname{tgh}(\gamma d) \quad (\text{A.65})$$

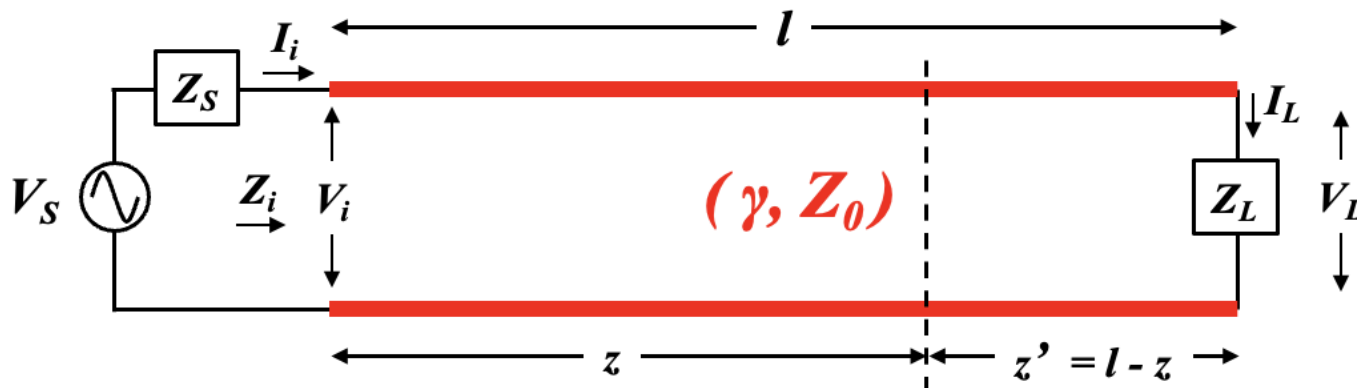
aplicada à (A.64), obtém-se:

$$Z = Z_0 \cdot \frac{Z_r[\exp(\gamma d) + \exp(-\gamma d)] + Z_0[\exp(\gamma d) - \exp(-\gamma d)]}{Z_0[\exp(\gamma d) + \exp(-\gamma d)] + Z_r[\exp(\gamma d) - \exp(-\gamma d)]}$$

$$Z = Z_0 \frac{Z_r + Z_0 \operatorname{tgh}(\gamma d)}{Z_0 + Z_r \operatorname{tgh}(\gamma d)} \quad (\text{A.66})$$

Se $Z_r = Z_0$ a impedância Z em qualquer ponto da linha é também igual a Z_0 .

LINHA SEM PERDAS



$$Z_i = Z(l) = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh(\gamma l)}{Z_0 + Z_L \tanh(\gamma l)}$$

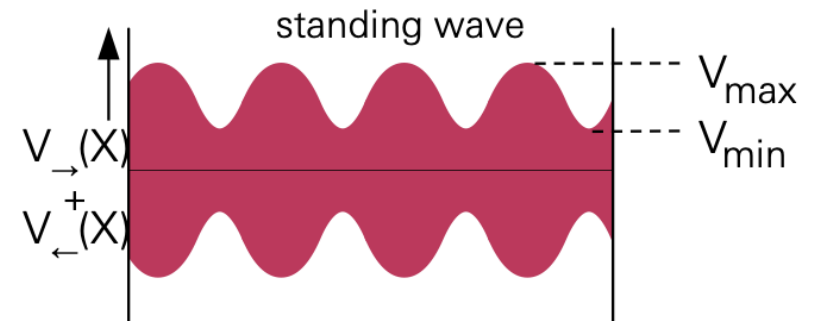
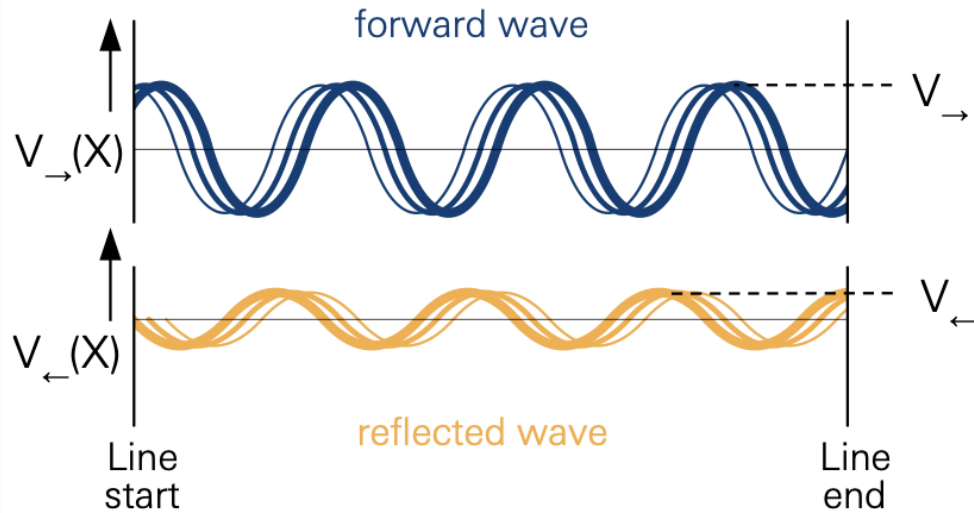
INPUT IMPEDANCE OF LOSSY TRANSMISSION LINE

INPUT IMPEDANCE OF LOSSLESS TRANSMISSION LINE:

$$Z_i = Z(l) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)}$$

$$Z = Z_0 \frac{Z_r + Z_0 \operatorname{tgh}(\gamma d)}{Z_0 + Z_r \operatorname{tgh}(\gamma d)}$$

onda estacionária



Relação de onda estacionária (ROE)

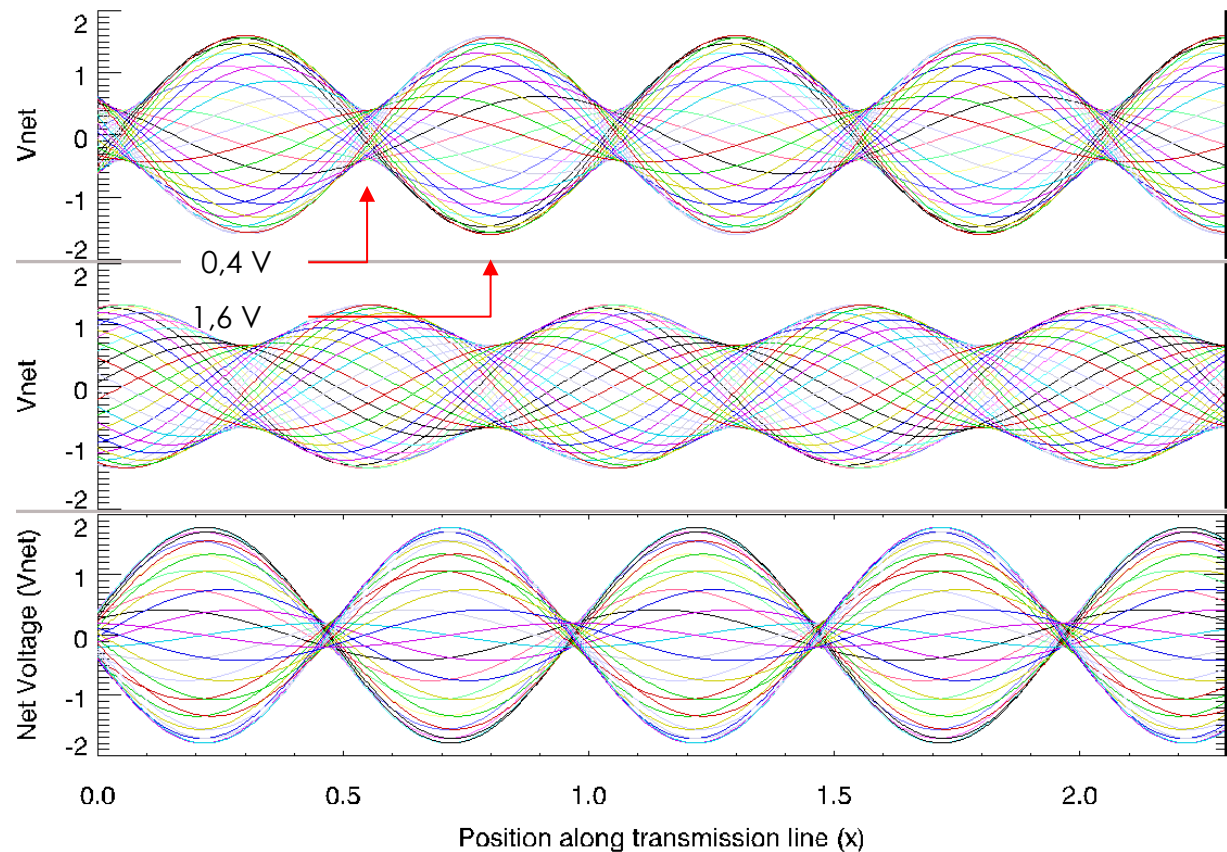
- Relação ou Razão de Onda Estacionária (SWR):

$$ROE = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|}$$
$$= \frac{V_{m\acute{a}x}}{V_{m\acute{i}n}}$$

**ROE
=4**

**ROE
=2**

**ROE
=9**

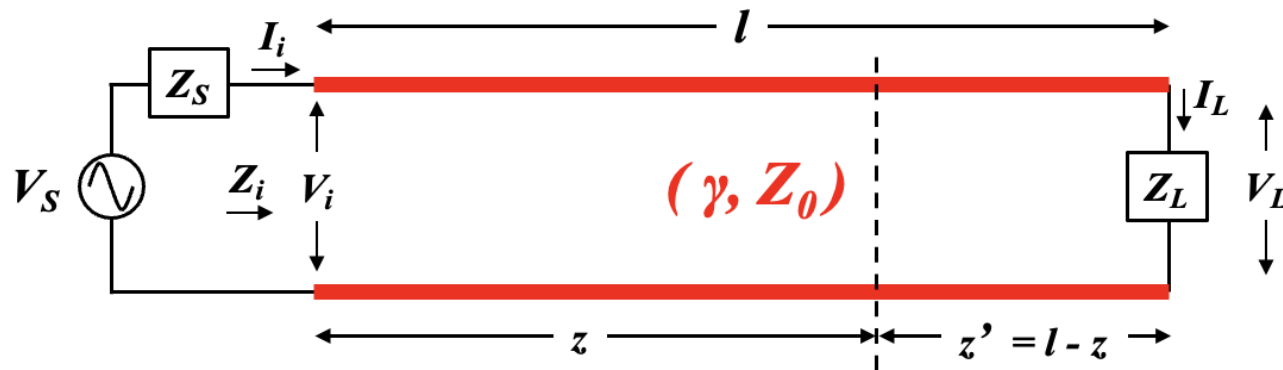


By Interferometrist - Own work, CC BY-SA 4.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=37025355>

LINHA CURTA



UNICAMP

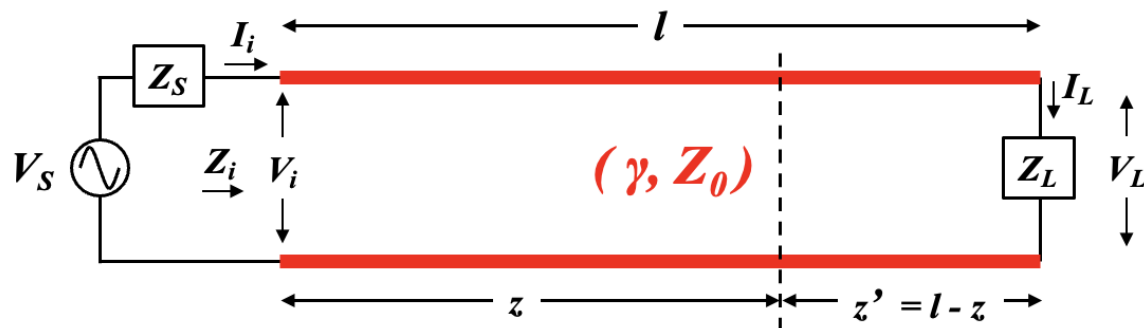


- For electrically short cables ($l < 0.1\lambda$):

- *Short-circuit termination* ($Z_L = 0$): $Z_{is} = R + j\omega L$

- *Open-circuit termination* ($Z_L = \infty$): $Z_{io} = \frac{1}{j\omega C}$

LINHA LONGA



- For electrically long cables ($l > 0.1\lambda$):

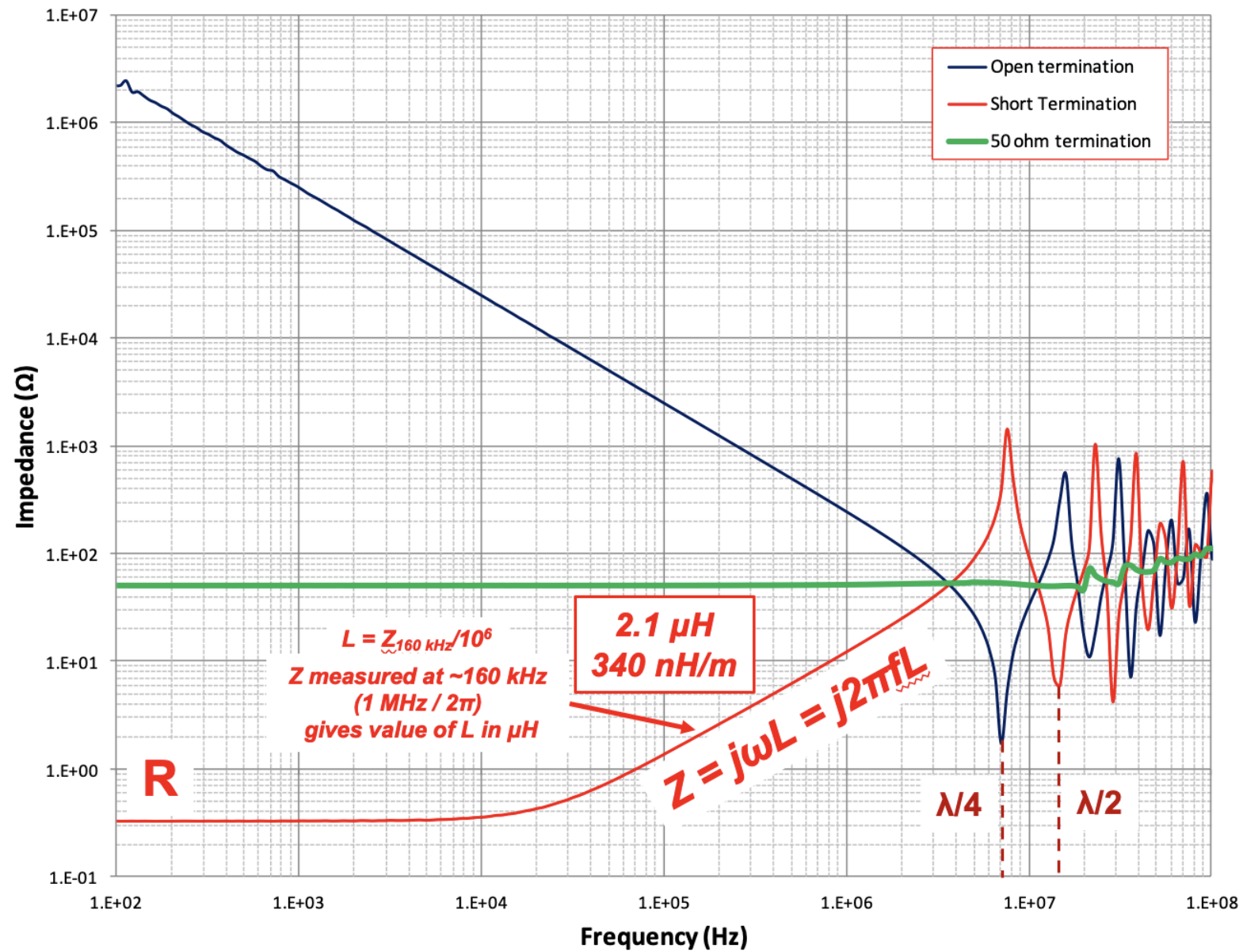
- **Characteristic impedance:** $Z_0 = \sqrt{Z_{io}Z_{is}} \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$

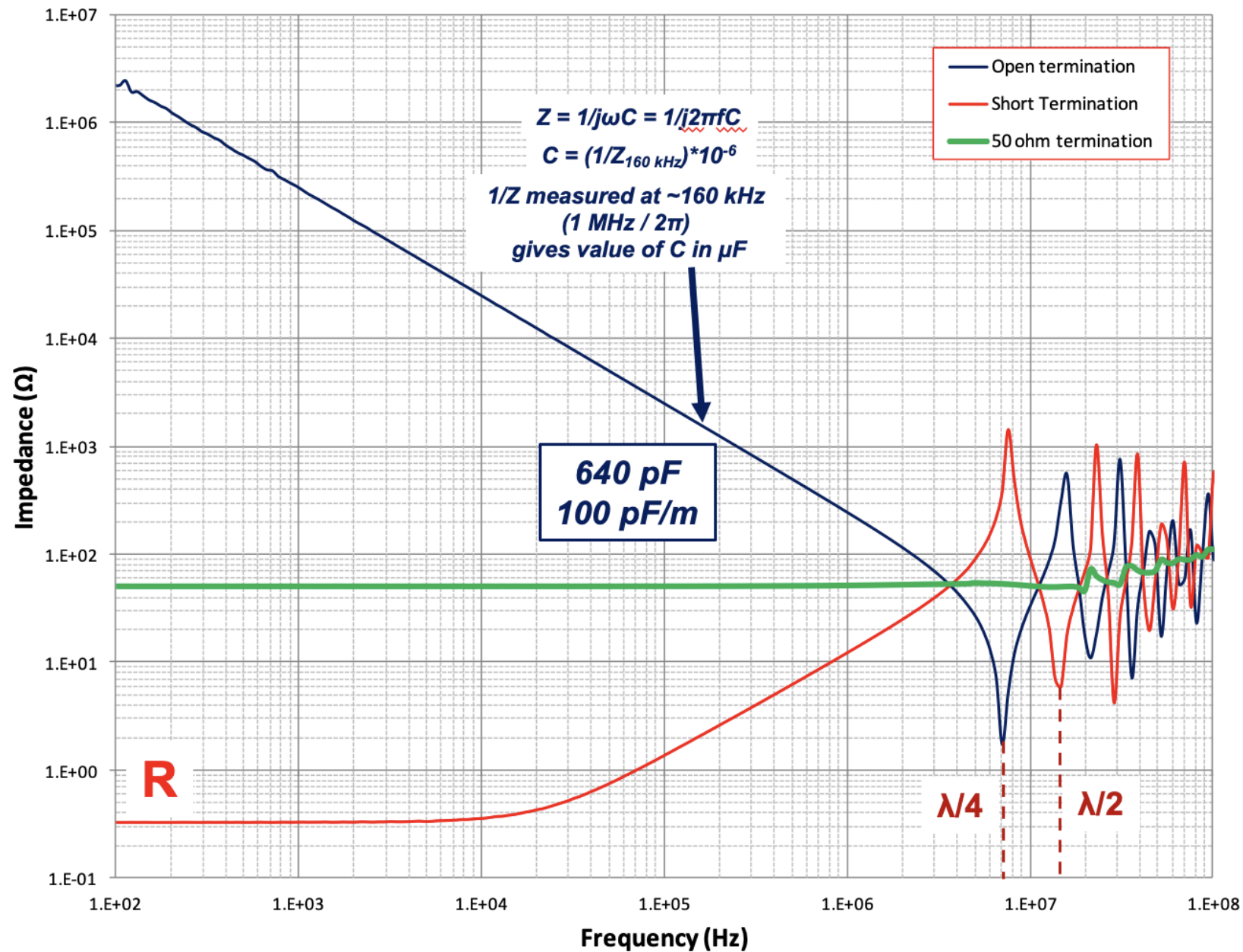
- $l = \lambda/4$: $Z_i = \frac{R_0^2}{Z_L}$ Short circuit termination measures as open-circuit
Open-circuit termination measures as short-circuit

- $l = \lambda/2$: $Z_i = Z_L$ Measured impedance equals load impedance

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)}$$

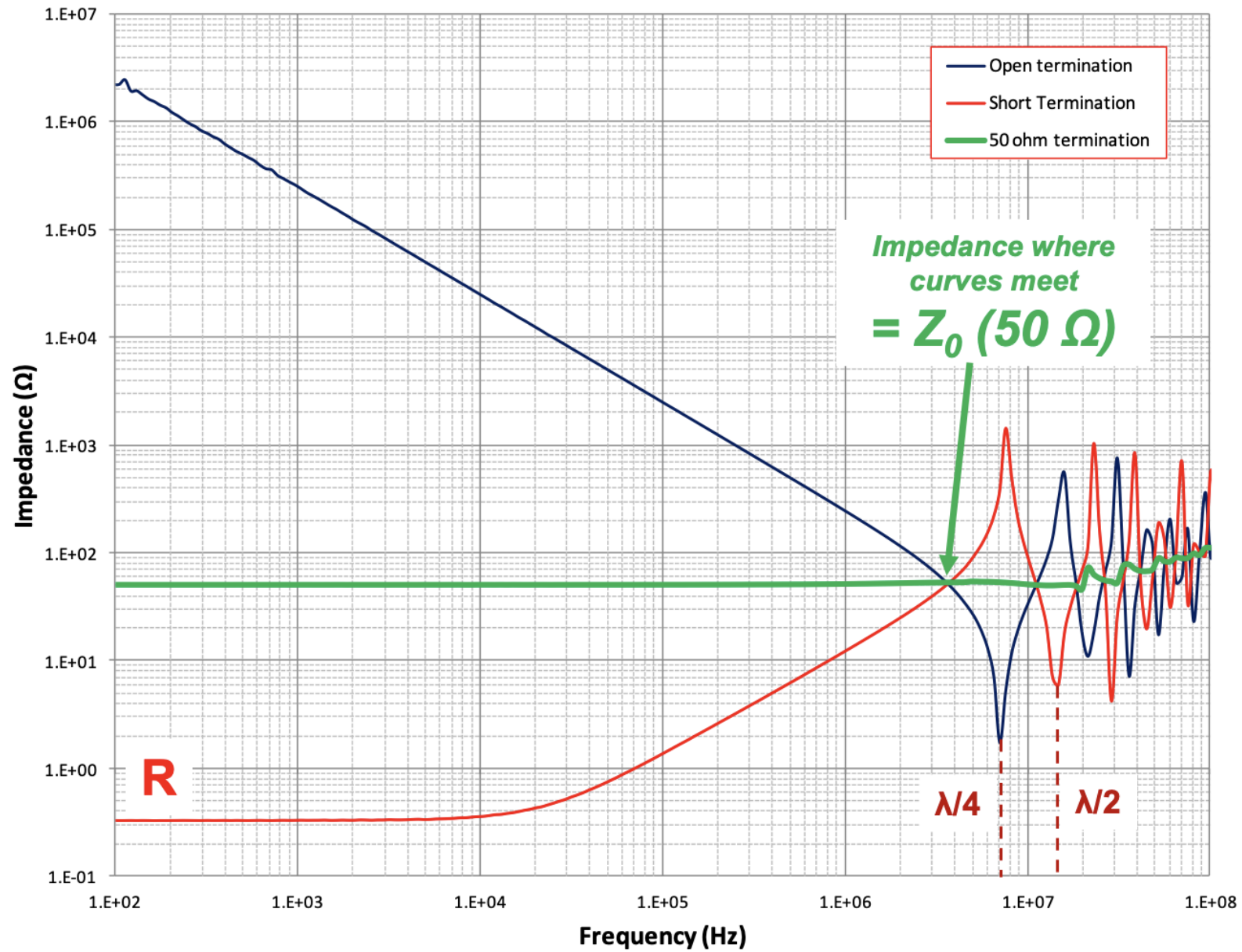
For a quarter-wavelength ($\frac{\lambda}{4}$) transmission line, $l = \frac{\lambda}{4}$, and $\beta l = \beta \frac{\lambda}{4} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$. Since $\tan(\frac{\pi}{2})$







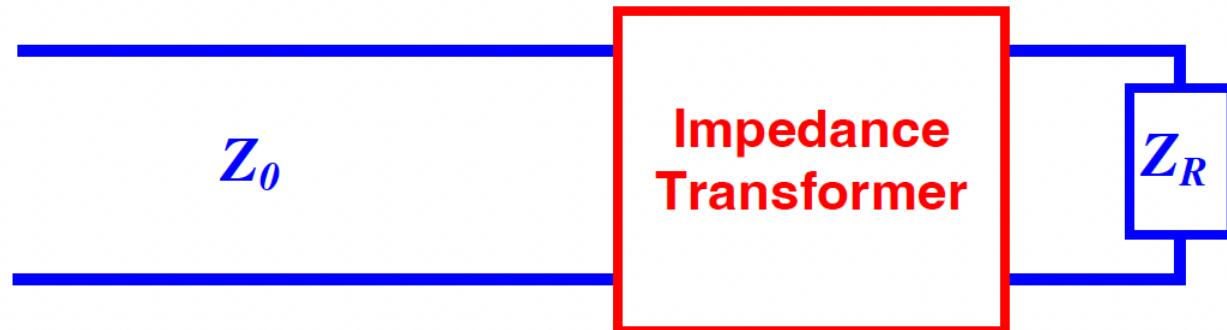
UNICAMP

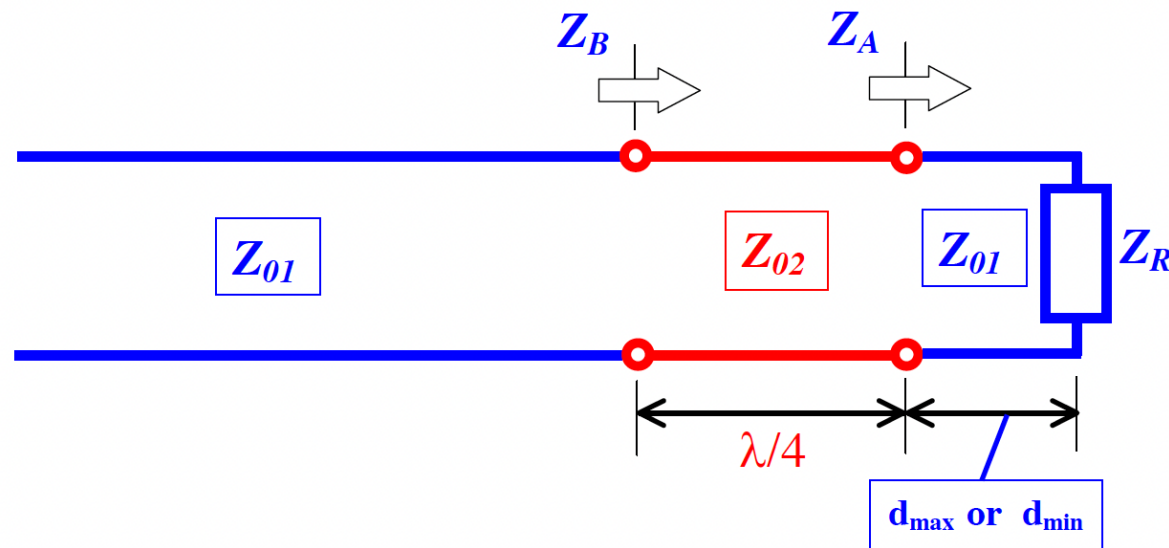


Casamento de Impedância. (linha sem perdas)

Várias técnicas podem ser usadas para eliminar reflexões quando a impedância característica da linha e a impedância da carga são incompatíveis.

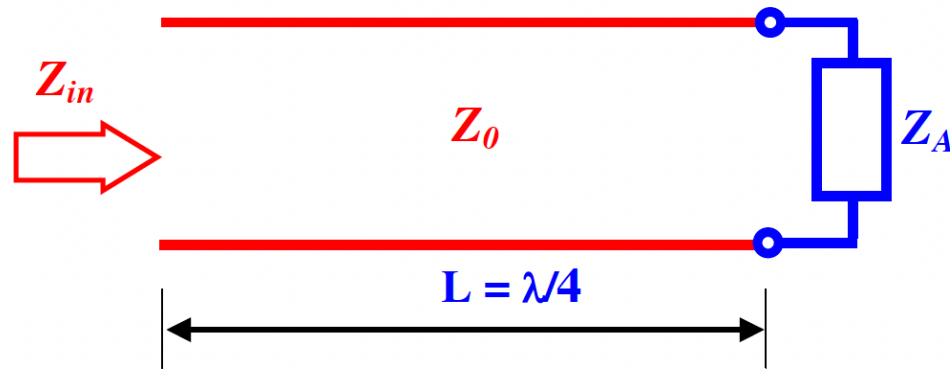
Técnicas de casamento de impedância podem ser projetadas para serem eficazes para uma frequência específica de operação (técnicas de banda estreita) ou para um determinado espectro de frequência (técnicas de banda larga). Um método de casamento de impedância envolve a inserção de um transformador de impedância entre a linha e a carga





O transformador de impedância é posicionado de modo que esteja conectado a uma impedância real Z_A . Isto é sempre possível se um local de padrão de onda estacionária de **tensão máxima ou mínima** é selecionado.

Consideramos a impedancia de uma linha $L=\lambda/4$



$$Z_{01} = Z_0$$

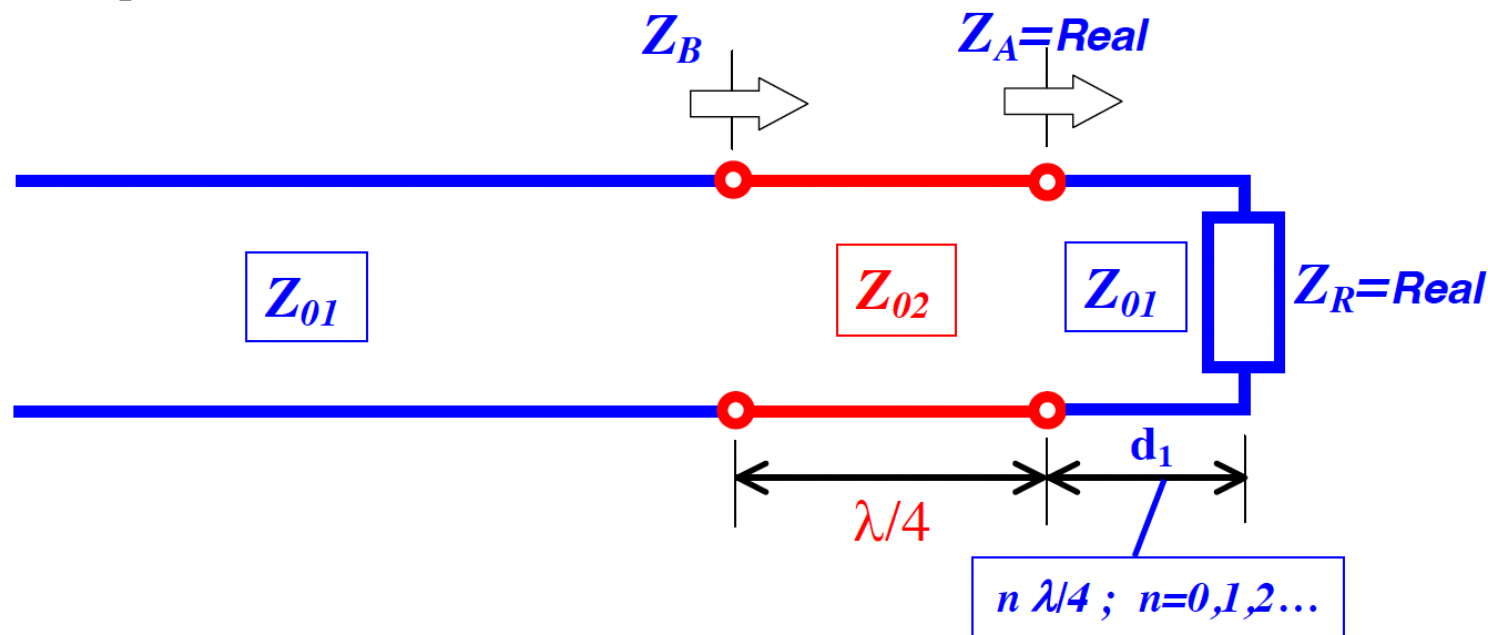
$$Z_A = Z_{01} \frac{1 + \Gamma(d)}{1 - \Gamma(d)} = Z_{01} \frac{1 - |\Gamma_R|}{1 + |\Gamma_R|}$$

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)}$$

$$Z_{in} = \lim_{\tan(\beta L) \rightarrow \infty} Z_0 \frac{Z_A + jZ_0 \tan(\beta L)}{jZ_A \tan(\beta L) + Z_0}$$

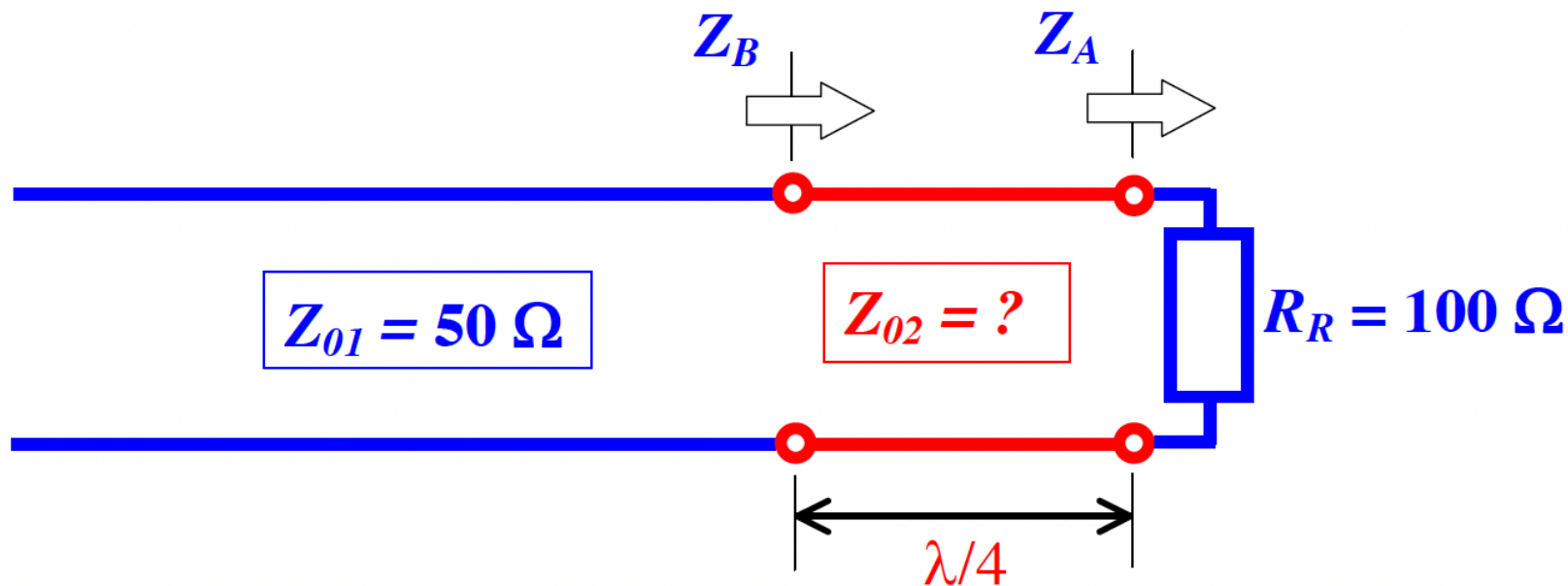
$$\rightarrow \frac{Z_0^2}{Z_A}$$

Observe que se a carga for real, o padrão de onda estacionária de tensão na carga é máxima quando $Z_R > Z_{01}$ ou mínima quando $Z_R < Z_{01}$. O transformador pode ser conectado diretamente no local da carga ou em uma distância da carga correspondente a um múltiplo de $\lambda/4$



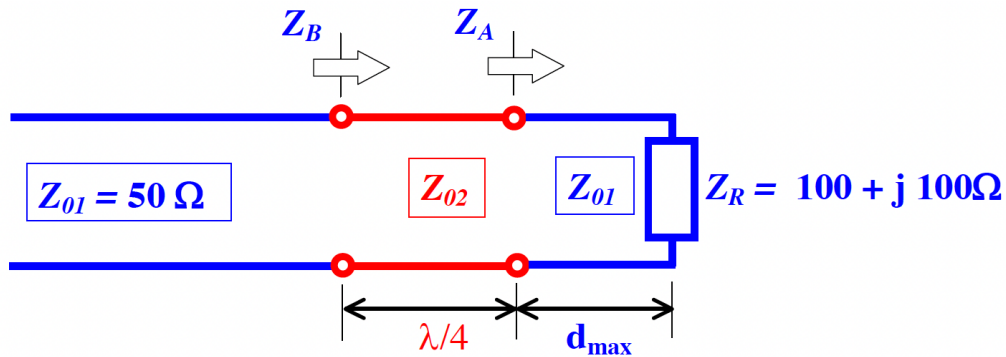
$$Z_{01} = \frac{Z_{02}^2}{Z_A} \quad \Rightarrow \quad Z_{02} = \sqrt{Z_{01} Z_A}$$

EXEMPLO – CARGA REAL



$$Z_B = \frac{Z_{02}^2}{R_R} = Z_{01} \Rightarrow Z_{02} = \sqrt{Z_{01} R_R} = \sqrt{50 \cdot 100} \approx 70.71 \, \Omega$$

IMPEDÂNCIA COMPLEXA



Transformador na máxima tensão

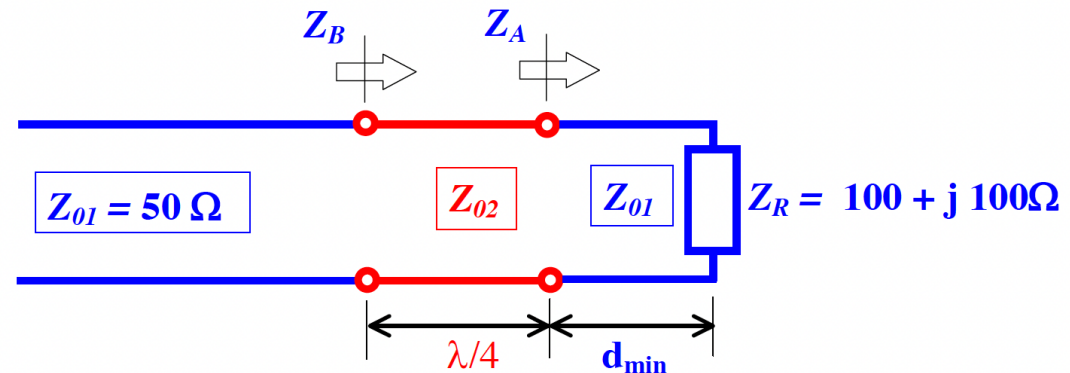
$$|\Gamma_R| = \left| \frac{100 + j100 - 50}{100 + j100 + 50} \right| \approx 0.62$$

$$Z_A = Z_0 \frac{1 + |\Gamma_R|}{1 - |\Gamma_R|} \approx 213.28 \Omega$$

$$Z_{02} = \sqrt{Z_{01} Z_A} = \sqrt{50 \cdot 213.28} = 103.27 \Omega$$

$$(Z_{02})^2 / Z_A = Z_{01}$$

Transformador na mínima tensão

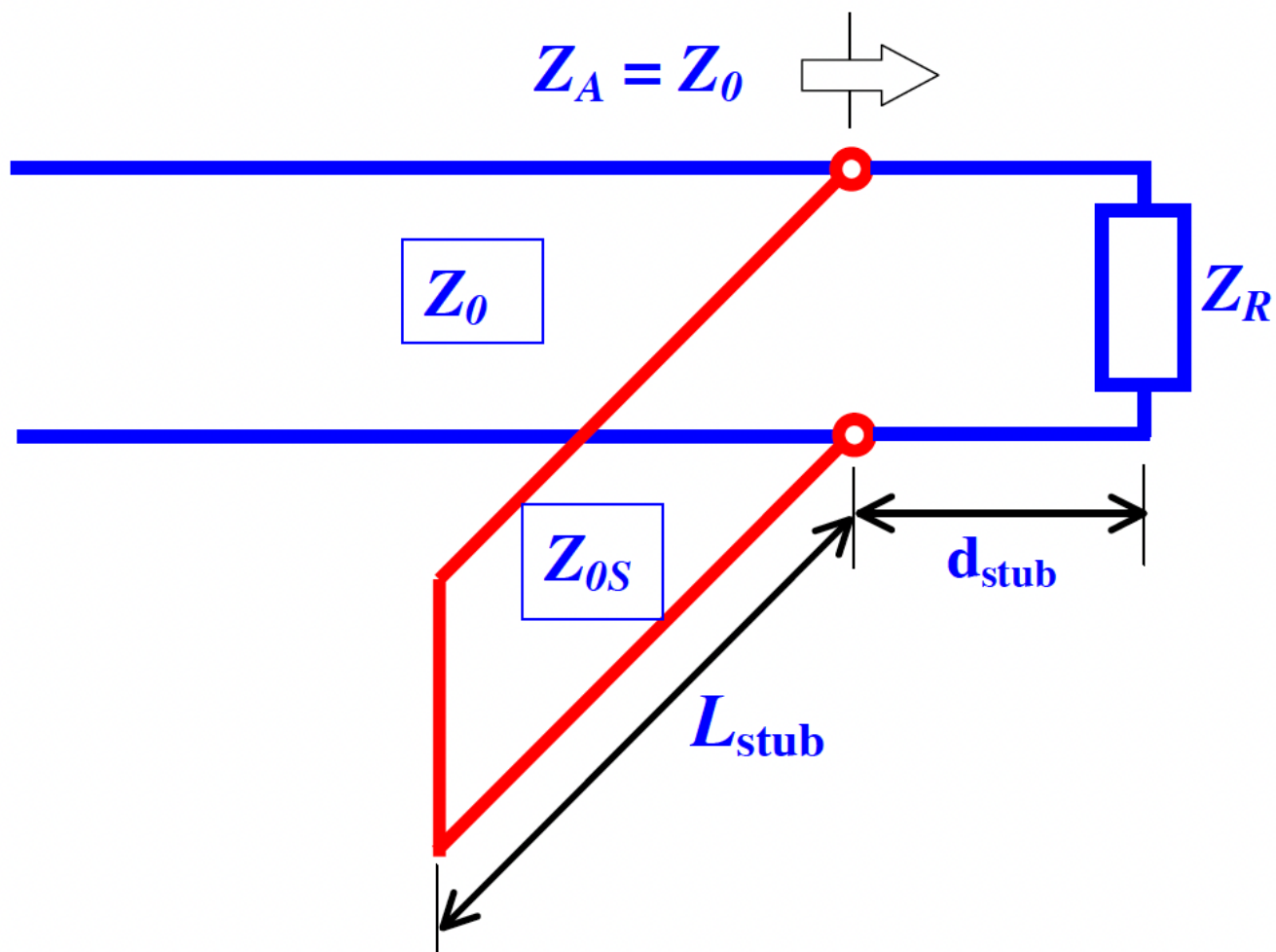


$$|\Gamma_R| = \left| \frac{100 + j100 - 50}{100 + j100 + 50} \right| \approx 0.62$$

$$Z_A = Z_0 \frac{1 - |\Gamma_R|}{1 + |\Gamma_R|} \approx 11.72 \Omega$$

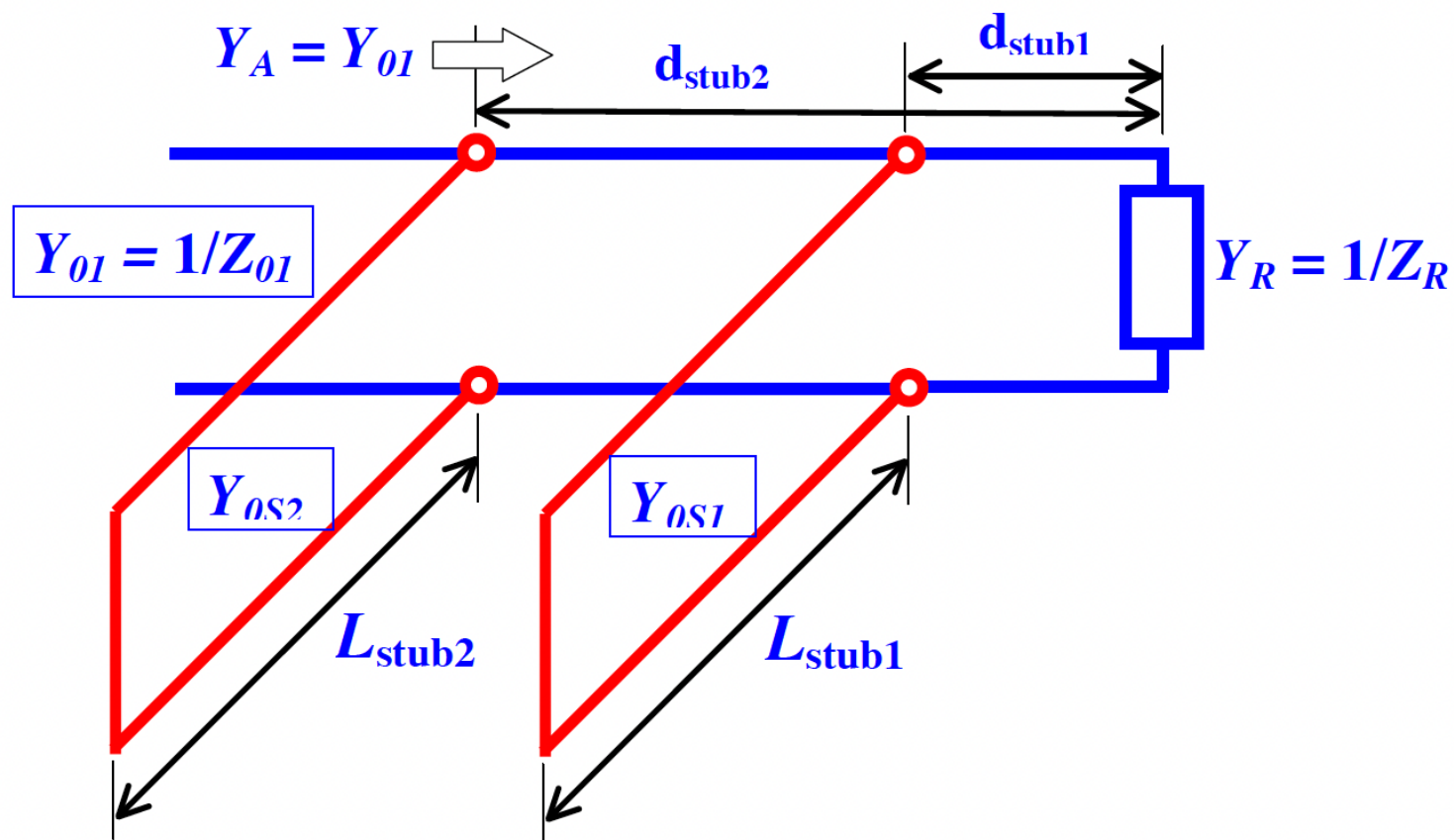
$$Z_{02} = \sqrt{Z_{01} Z_A} = \sqrt{50 \cdot 11.72} = 24.21 \Omega$$

STUB LINE





UNICAMP

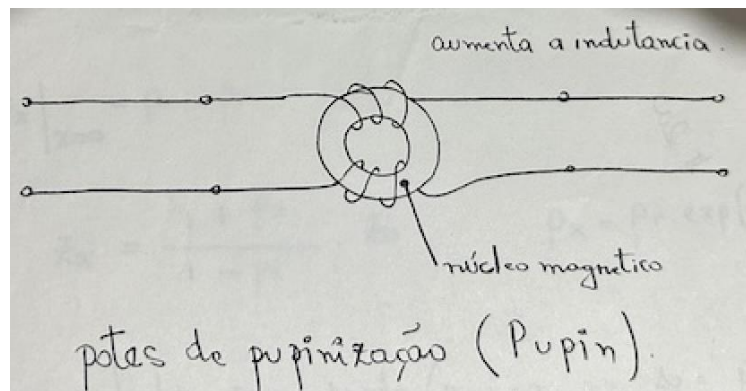


LINHAS SEM DISTORÇÃO

Condição de Heaviside

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$$

- a) Diminuir R – aumento da bitola – custo
- b) Diminuir C – aumentar a distancia dos condutores
- c) Aumentar G – aumenta a atenuação
- d) Aumentar L - Pupinização





UNICAMP

