

IT 002 – SOBRETENSÕES EM SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA.

Prof. José Pissolato Filho

Campinas, agosto 2022

Linhas de Regime Estacionário Senoidal

Introdução

O estudo de linha de transmissão em regime permanente senoidal é muito importante por várias razões. A existência de uma quantidade imensa de linhas de potência que operam em 60Hz ou 50 Hz pelo mundo já seria uma razão bem forte para tal estudo.

Há, na verdade, uma razão principal para o estudo de linhas de transmissão em regime permanente senoidal. Graças aos estudos de Fourier, Laplace e outros, qualquer sinal real no tempo (*periódico ou não*) tem um espectro em frequência.

Solução Geral de tensão e Corrente na Linha em Regime Permanente Senoidal

Foram vistas as equações diferenciais válidas numa linha genérica:

Equação 5

$$\left[R + L \frac{\partial}{\partial t} \right] i(x,t) = - \frac{\partial}{\partial x} e(x,t)$$

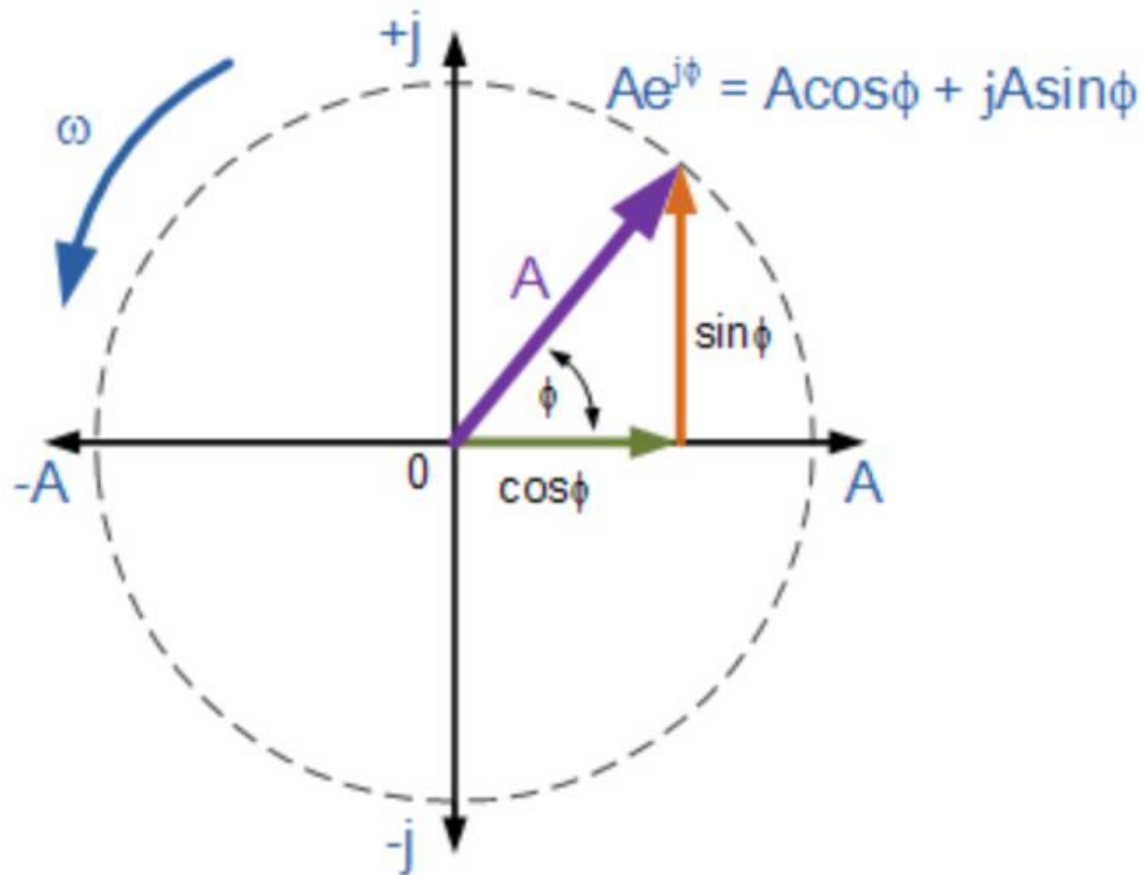
Equação 7

$$\left[G + C \frac{\partial}{\partial t} \right] e(x,t) = - \frac{\partial}{\partial x} i(x,t)$$

$$\frac{\partial e}{\partial x} = - Ri - L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = - Ge - C \frac{\partial e}{\partial t} \quad (\text{A.2})$$

FASORES GIRANTES



Euler's identity: $e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta$

Nas equações anteriores a tensão “e”, bem como a corrente “i” são funções de “x” e de “t”.

No regime estacionário senoidal as tensões e correntes são, como já visto em teoria de circuitos C.A., **as projeções de vetores ou fasores girantes**, ou seja:

$$e = \text{Re}[E \cdot \exp(j\omega t)] \quad (\text{A.3})$$

$$i = \text{Re}[I \cdot \exp(j\omega t)] \quad (\text{A.4})$$

⇒ Nas equações (A.3) e (A.4), E e I são as amplitudes da tensão e da corrente, respectivamente. Isto pode ser visualizado lembrando as identidades de Euler, e aplicando nas eqs. (A.3) e (A.4). Assim,

$$e = \operatorname{Re}\left[E \cdot \cos \omega t + jE \cdot \operatorname{sen} \omega t\right] = E \cdot \cos \omega t \quad (\text{A.5})$$

$$i = \operatorname{Re}\left[I \cdot \cos \omega t + jI \cdot \operatorname{sen} \omega t\right] = I \cdot \cos \omega t \quad (\text{A.6})$$

⇒ Nas equações (A.3) e (A.4), as quantidades entre parênteses são conhecidas como fasores girantes.

⇒ As quantidades conhecidas apenas como fasores são as quantidades (*reais ou complexas*) que se obtém dos fasores quando se faz $t = 0$, isto é, quando se omite a dependência temporal.

⇒ A omissão do termo $e^{j\omega t}$ é geralmente feita na teoria de circuitos alternados senoidais. Sendo assim, se o fasor tensão num ponto qualquer do circuito for obtido como sendo o número complexo $E = E_0 \angle \theta_0$, a correspondente onda de tensão real no domínio do tempo é obtida, fazendo:

$$E = \text{Re}[E \cdot \exp(j\omega t)] = E_0 \cos(\omega t + \theta_0) \quad (\text{A.7})$$

⇒ Ao invés do fasor amplitude, muitas vezes, se fala no fasor amplitude eficaz. Neste caso, deve-se lembrar que:

$$\text{Fasor eficaz} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\text{fasor amplitude}) \quad (\text{A.8})$$

⇒ Um dos aspectos mais interessantes da análise de Fourier reside no fato de que se soubermos a resposta de amplitude e de fase para "*todos*" os tons senoidais no intervalo das frequências "*de interesse*", ou seja, na banda de frequência do sinal de entrada, saberemos também como é a forma do sinal "*transiente*" da resposta temporal numa linha real.

Das equações (A.1) e (A.2) nota-se que há derivadas dos fasores de tensão e corrente tanto em relação a x como a t . Vamos colocar estas duas equações citadas numa forma mais adequada ao tratamento fasorial.

Substituindo os fasores girantes de (A.3) e de (A.4) e (A.2), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} [E \cdot \exp(j\omega t)] = -RI \exp(j\omega t) - j\omega LI \exp(j\omega t) \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [I \cdot \exp(j\omega t)] = -GE \exp(j\omega t) - j\omega CE \exp(j\omega t) \quad (\text{A.10})$$

⇒ Omitindo a dependência temporal, as equações (A.9) e (A.10) podem ser escritas com **derivadas totais**:

$$\frac{dE}{dx} = - (R + j\omega L) \cdot I \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{dI}{dx} = - (G + j\omega C) \cdot E \quad (\text{A.12})$$

⇒ Define-se:

Impedância série da linha por unidade de comprimento

$$Z = R + j\omega L \quad (\text{A.13})$$

Admitância paralela da linha por unidade de comprimento

$$Y = G + j\omega C \quad (\text{A.14})$$

⇒ Pertanto:

$$\frac{dE}{dx} = - ZI \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{dI}{dx} = - YE \quad (\text{A.16})$$

⇒ Vamos obter uma equação diferencial que contenha só a tensão fasorial E . Fazendo $d(\text{eq. A.15}) / dx$, tem-se:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} = -Z \frac{dI}{dx} \quad (\text{A.17})$$

⇒ Substituindo (A.16) em (A.17), tem-se:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} = (ZY)E \quad (\text{A.18})$$

⇒ Tentemos uma solução de E para a equação (A.18). Deve ser uma função que, diferenciada duas vezes, reproduza a função original multiplicada por (ZY) . Então, uma solução possível é:

$$E = C_1 \exp \left[-\sqrt{ZY} x \right] \quad (\text{A.19})$$

⇒ Onde C_1 é uma constante que tem a dimensão de tensão (*volts*). Entretanto, é necessário completar a solução de E com a possibilidade de haver reflexões na linha, de volta ao gerador. Vamos incluir:

$$E = C_2 \exp \left[\sqrt{ZY} x \right] \quad (\text{A.20})$$

Portanto, a solução geral é do tipo:

$$E = C_1 \exp\left[-\sqrt{ZY} x\right] + C_2 \exp\left[\sqrt{ZY} x\right] \quad (\text{A.21})$$

Substituindo (A.21) em (A.15) pode-se achar a correspondente solução da corrente I , ou seja:

$$I = \frac{1}{\sqrt{Z/Y}} \left\{ C_1 \cdot \exp\left[-\sqrt{ZY} x\right] - C_2 \exp\left[\sqrt{ZY} x\right] \right\} \quad (\text{A.22})$$

A grandeza (*complexa em geral*) $(Z/Y)^{1/2}$ é a impedância característica Z_0 da linha real, ou seja,

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad [\Omega] \quad (\text{A.23})$$

Observe que Z_0 é dada em $[\Omega]$, e independente do comprimento da linha: Z_0 é função de R, L, G, C e da frequência $\omega = 2\pi f$.

Lembrete: Para linha sem dissipação (*ideal*) $R=G=0$ e $Z_0 = R_0 = (L/C)^{1/2}$ (*real puro*).

⇒ Por outro lado, observando as equações (A.21) e (A.22), nota-se que a grandeza γ é responsável pela propagação. Assim, define-se:

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \quad (\text{A.24})$$

onde:

γ = const. de propagação complexa ou função de propagação.

α = const. de atenuação da linha dada em [nep/m]

β = const. de desvio de fase da linha dada em [rad/m].

Linha infinita, velocidade de fase e comprimento de onda

⇒ É instrutivo neste ponto, analisar como ficam as soluções obtidas na secção anterior para o caso de uma linha de transmissão de comprimento infinito, ($\ell = \infty$). A Fig. A.1 ilustra esta situação.

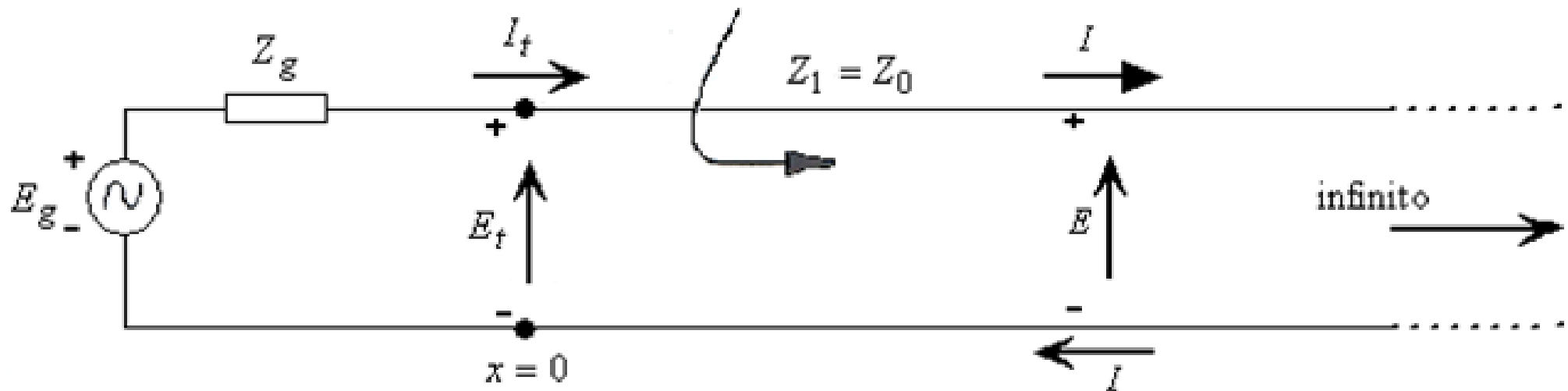


Figura A.1 – Linha Infinita.

- ⇒ Nesta Figura, E_t e I_t são os fasores tensão e corrente na posição *(no lado da transmissão)*, E e I são os fasores tensão e corrente num ponto qualquer, a uma distância x do gerador.
- ⇒ **Como o termo de propagação γ envolve a atenuação α da linha, que é uma quantidade positiva, é natural esperar que as soluções de tensão (ver eq.(A.21) e de corrente (ver eq. (A.22) tenham $C_2 = 0$.**
- ⇒ A existência do 2º. termo nas equações citadas faria com que este termo tendesse a infinito, à medida que $x \rightarrow \infty$. Isto seria impossível do ponto de vista de energia, uma vez que a linha real dissipa energia de fato. Portanto C_2 deve ser zero.

⇒ A solução de tensão na linha é então:

$$E = C_1 \exp \left[-\sqrt{ZY} x \right] \quad (\text{A.25})$$

→ (Propagação para a direita)

⇒ Calculemos C_1 a partir de uma condição de contorno. Para $x = 0$, tem-se $E = E_t$ (*tensão na boca da linha*). Então a eq. (A.25). Pode ser escrita como a seguir:

$$E_t = C_1 \exp[0] = C_1 \quad (\text{A.26})$$

$$E = E_t \exp\left[-\sqrt{ZY} x\right] = E_t \exp[-\gamma x] \quad (\text{A.27})$$

$$E = E_t \exp[-(\alpha + j\beta)x] \quad (\text{A.28})$$

$$E = E_t \exp[-\alpha x] \exp[-j\beta x] = E_t \exp[-\alpha x] \angle^{-\beta x} \quad (\text{A.29})$$

⇒ De (A.29), nota-se que a fase de referência (*fase zero*) é colocada na tensão de entrada. E_t é real e é a amplitude de pico da onda $\cos \omega t$. Se, por outro lado, a referência de fase for em E_g , E_t seria complexa indicando alguma fase diferente de zero, dado que Z_g e/ou Z_0 são complexas em geral.

⇒ A solução de corrente é obtida de maneira análoga da eq. (A.22), fazendo também $C_1 = E_t$ e $C_2 = 0$. Obtém-se então:

$$I = \frac{E_t}{Z_0} \exp[-\alpha x] \exp[-j\beta x] \quad (\text{A.30})$$

⇒ Assim, se E_t é real (fase zero na tensão de entrada) tem-se:

$$I = \frac{E_t}{|Z_0|} \exp[-\alpha x] \exp[-j\beta x - j\theta_0] \quad (\text{A.31})$$

$$I = \frac{E_t}{|Z_0|} \exp[-\alpha x] \underline{(\beta x + \theta_0)} \quad (\text{A.32})$$

Onde: $Z_0 = |Z_0| \angle \theta_0 = |Z_0| \exp[j\theta_0]$ é uma grandeza complexa geral

⇒ Observe de (A.29) e (A.30) que:

$$\frac{E}{I} = Z_0 \quad (\text{A.33})$$

ou

$$\frac{I}{E} = Y_0 \quad (\text{A.34})$$

Onde: $Y_0 = \frac{1}{Z_0} = |Y_0| \angle -\theta_0 = |Y_0| e^{-j\theta_0}$ (A.35)

⇒ É importante, neste momento, lembrar que a eq. (A.29) dá a tensão na forma fasorial. Para achar a onda no tempo, faz-se:

$$e(x, t) = \text{Re} \left[E_t \exp(-\alpha x) \exp(-j\beta x) \exp(j\omega t) \right] \quad (\text{A.36})$$

$$e(x, t) = E_t \exp(-\alpha x) \cos(\omega t - \beta x) \quad (\text{A.37})$$

⇒ Da eq. (A.37), nota-se que em cada ponto x qualquer da linha, há uma oscilação senoidal (*ou cossenoidal*) de tensão com uma amplitude, e com atraso de fase dado em radianos. Pode-se notar também que se $\alpha \neq 0$ (*linha real*) a amplitude de oscilação cai com a distância x do gerador, de uma maneira exponencial.

⇒ Note finalmente que, se $\alpha = 0$ (*linha ideal*) a amplitude da oscilação não cai mais com x (é constante, e vale E_0); há apenas um retardo de fase proporcional à distância x do gerador ($-\beta x$).

⇒ A forma de (A.37) é reconhecida como sendo a equação de uma onda progressiva (x e t *aparecem conjuntamente no argumento do cosseno*). A ideia de uma onda senoidal progressiva é melhor visualizada se usarmos a ideia do observador montado na onda. O argumento é então uma constante, ou seja :

$$\omega t - \beta x = K \quad (\text{A.38})$$

⇒ Nota-se que (A.37) descreve uma perturbação senoidal que viaja para a direita (*sentido de x crescente*), uma vez que se t aumenta (ver eq. A.38), x tem que aumentar, para manter a constante K . A velocidade desta perturbação é obtida de (A.38), diferenciando em relação ao tempo, ou seja:

$$\omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0 \quad (\text{A.39})$$

$$v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \quad (\text{A.40})$$

⇒ A equação (A.40) define a velocidade de fase v_f da perturbação senoidal.

⇒ Se a linha não tem perdas ($R = G = 0$) a função de propagação γ (ver eq. A.24) fornece:

$$\gamma = \sqrt{(j\omega L)(j\omega C)} = j\omega\sqrt{LC} = \alpha + j\beta \quad (\text{A.41})$$

Portanto:

$$\alpha = 0 \quad \beta = \omega\sqrt{LC} \quad (\text{A.42})$$

⇒ Assim, substituindo o valor obtido para β de (A.42) em (A.40), obtém-se:

$$v_f = \frac{\omega}{\omega\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad [\text{m/s}] \quad (\text{A.41})$$

⇒ Assim, conclui-se que para linha ideal a velocidade de fase é independente da frequência (ver (A.43)). Isto é uma consequência de que, na linha ideal, β é diretamente proporcional à frequência (ver (A.42)).

⇒ Para uma linha real, de modo geral não é diretamente proporcional à frequência. Por consequência, a velocidade da fase não é uma constante. Este fato é o responsável pelo fenômeno da dispersão em linhas.

⇒ Vamos definir agora o comprimento de onda λ como a menor distância entre dois pontos de mesma fase, ou seja:

$$\beta x \Big|_{x = \lambda} = \beta \lambda = 2\pi \text{ radianos} \quad (\text{A.44})$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \text{ ou } \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{A.45})$$

⇒ Das relações (A.45) e (A.40), obtém-se várias identidades de interesse

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} v f = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T}} v f = \frac{v f}{f} = T v f \quad (\text{A.46})$$

Onde f é a frequência cíclica dada em Hz, T [s] é o período da oscilação

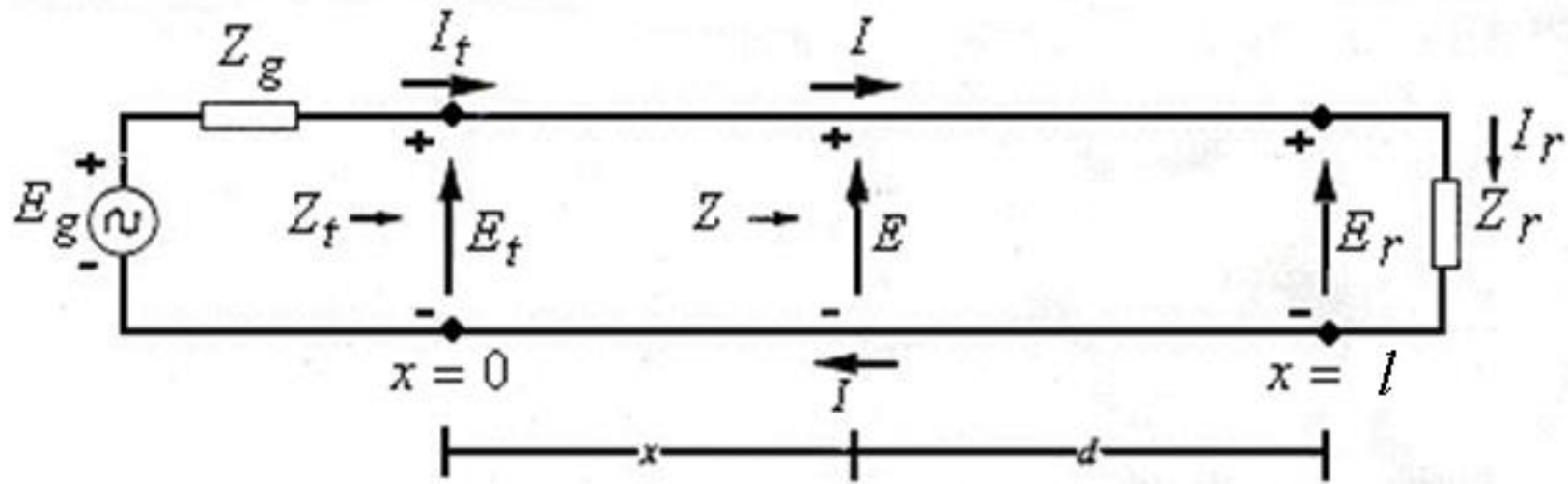


Fig. A.4 – Diagrama contendo a notação usada.

Vamos substituir $E = I_r Z_r$ e $I = I_r$ em $x = l$ nas eqs. (A.21) e (A.22).
 Obtém-se então :

$$I_r Z_r = C_1 \exp(-\gamma l) + C_2 \exp(\gamma l) \quad (\text{A.51})$$

$$I_r Z_0 = C_1 \exp(-\gamma l) - C_2 \exp(\gamma l) \quad (\text{A.52})$$

Somando (A.51) e (A.52), obtém-se C_1 dado por :

$$C_1 = \frac{I_r}{2} (Z_r + Z_0) \exp(\gamma \ell) \quad (\text{A.53})$$

Subtraindo (A.52) e (A.51), obtém-se C_2 dado por :

$$C_2 = \frac{I_r}{2} (Z_r - Z_0) \exp(-\gamma \ell) \quad (\text{A.54})$$

Assim, substituindo estes valores em (A.21) e (A.22), E e I , respectivamente, obtém-se :

$$E = \frac{I_r}{2} \left\{ (Z_r + Z_0) \exp[\gamma(\ell - x)] + (Z_r - Z_0) \exp[\gamma(x - \ell)] \right\} \quad (\text{A.55})$$

$$I = \frac{I_r}{2Z_0} \left\{ (Z_r + Z_0) \exp[\gamma(\ell - x)] - (Z_r - Z_0) \exp[\gamma(x - \ell)] \right\} \quad (\text{A.56})$$

Se quisermos referir a distância a partir da carga, pode-se usar a relação $d = \ell - x$ (ver Fig. A.4), temos então :

$$E = \frac{I_r}{2} \left\{ (Z_r + Z_0) \exp(\gamma d) + (Z_r - Z_0) \exp(-\gamma d) \right\} \quad (\text{A.57})$$

$$I = \frac{I_r}{2Z_0} \left\{ (Z_r + Z_0) \exp(\gamma d) - (Z_r - Z_0) \exp(-\gamma d) \right\} \quad (\text{A.58})$$

A relação entre a onda de tensão refletida pela incidente resulta no coeficiente de reflexão de tensão, ou seja:

$$\Gamma = \frac{E^-}{E^+} = \frac{Z_r - Z_0}{Z_r + Z_0} \exp(-2\gamma d) \quad (\text{A.59})$$

$$\Gamma = \Gamma_r \exp(-2\alpha d) \exp(-j2\beta d) \quad (\text{A.60})$$

Sendo

$$\Gamma_r = (Z_r - Z_0) / (Z_r + Z_0) \quad (\text{A.61})$$

o coeficiente de reflexão de tensão na posição da carga ou recepção. Enquanto o coeficiente de reflexão de corrente é dado por:

$$\Gamma' = -\Gamma = \frac{Z_0 - Z_r}{Z_r + Z_0} \exp(-2\alpha d) \exp(-j2\beta d) \quad (\text{A.62})$$

A impedância complexa num ponto da linha é obtida da divisão do fasor total E pelo total I . assim, usando as eqs. (A.57) e (A.58), obtém-se:

$$Z = \frac{E}{I} = Z_0 \frac{(Z_r + Z_0) \exp \gamma d + (Z_r - Z_0) \exp(-\gamma d)}{(Z_r + Z_0) \exp \gamma d - (Z_r - Z_0) \exp(-\gamma d)} \quad (\text{A.63})$$

Ou então:

$$Z = Z_0 \cdot \frac{Z_r [\exp(\gamma d) + \exp(-\gamma d)] + Z_0 [\exp(\gamma d) - \exp(-\gamma d)]}{Z_0 [\exp(\gamma d) + \exp(-\gamma d)] + Z_r [\exp(\gamma d) - \exp(-\gamma d)]} \quad (\text{A.64})$$

Por meio da relação trigonométrica

$$\frac{\exp(\gamma d) - \exp(-\gamma d)}{\exp(\gamma d) + \exp(-\gamma d)} = \operatorname{tgh}(\gamma d) \quad (\text{A.65})$$

aplicada à (A.64), obtém-se:

$$Z = Z_0 \frac{Z_r + Z_0 \operatorname{tgh}(\gamma d)}{Z_0 + Z_r \operatorname{tgh}(\gamma d)} \quad (\text{A.66})$$

Se $Z_r = Z_0$ a impedância Z em qualquer ponto da linha é também igual a Z_0 .