UNICAMP

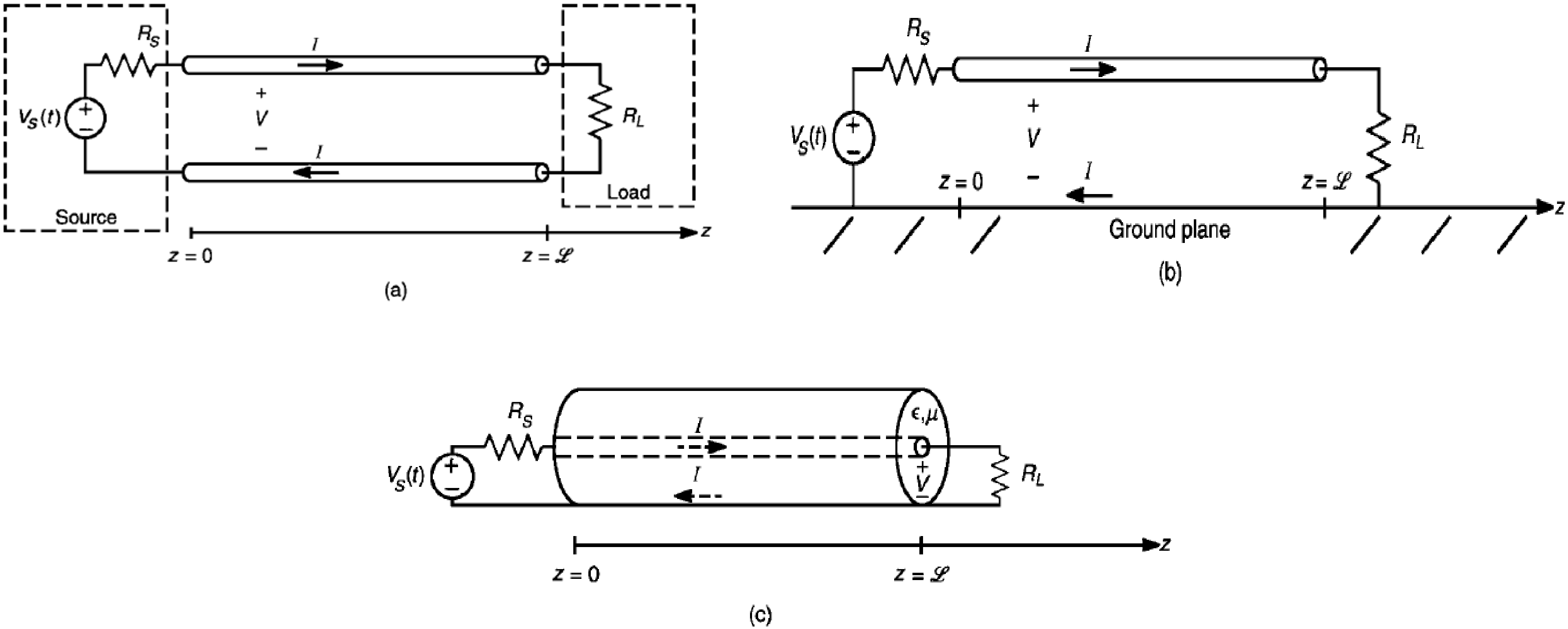
IT309B - Tópicos em Sistemas de Energia Elétrica

1º. Sem. 2025

LINHAS DE TRANSMISSÃO

UNICAMP

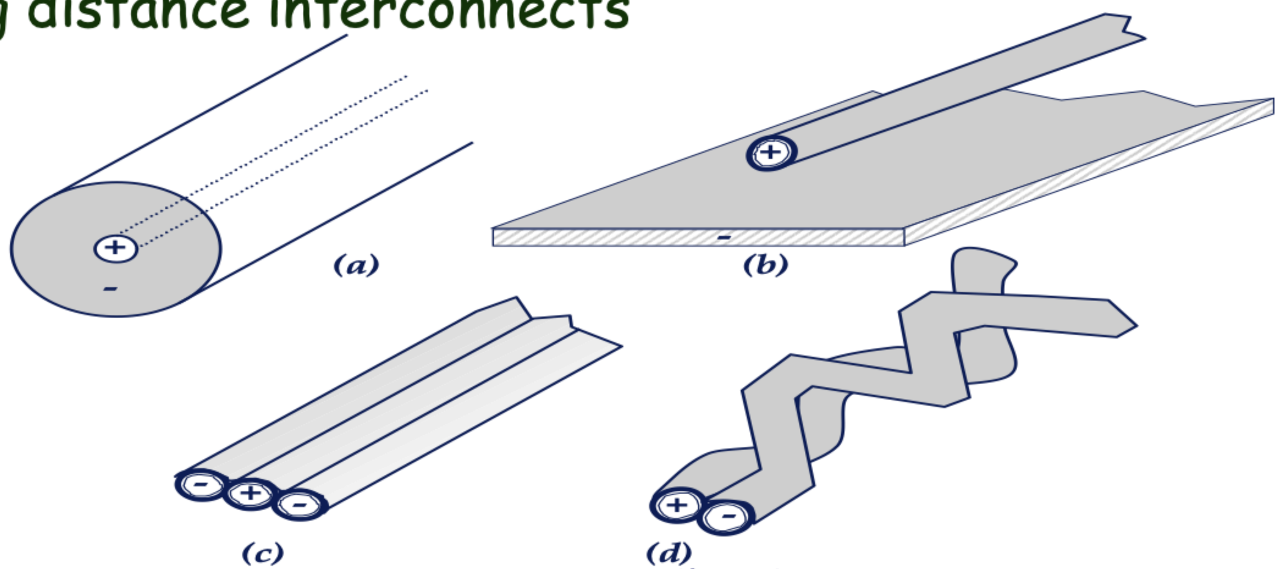
condutor utilizado em linhas de transmissão.



(a) 2 condutores / (b) 1 condutor sobre o solo infinito / (c) cabo coaxial

Examples of Transmission Line Structures- I

- Cables and wires
  - (a) Coax cable
  - (b) Wire over ground
  - (c) Tri-lead wire
  - (d) Twisted pair (two-wire line)
- Long distance interconnects



MODELO DE CIRCUITO – TEM

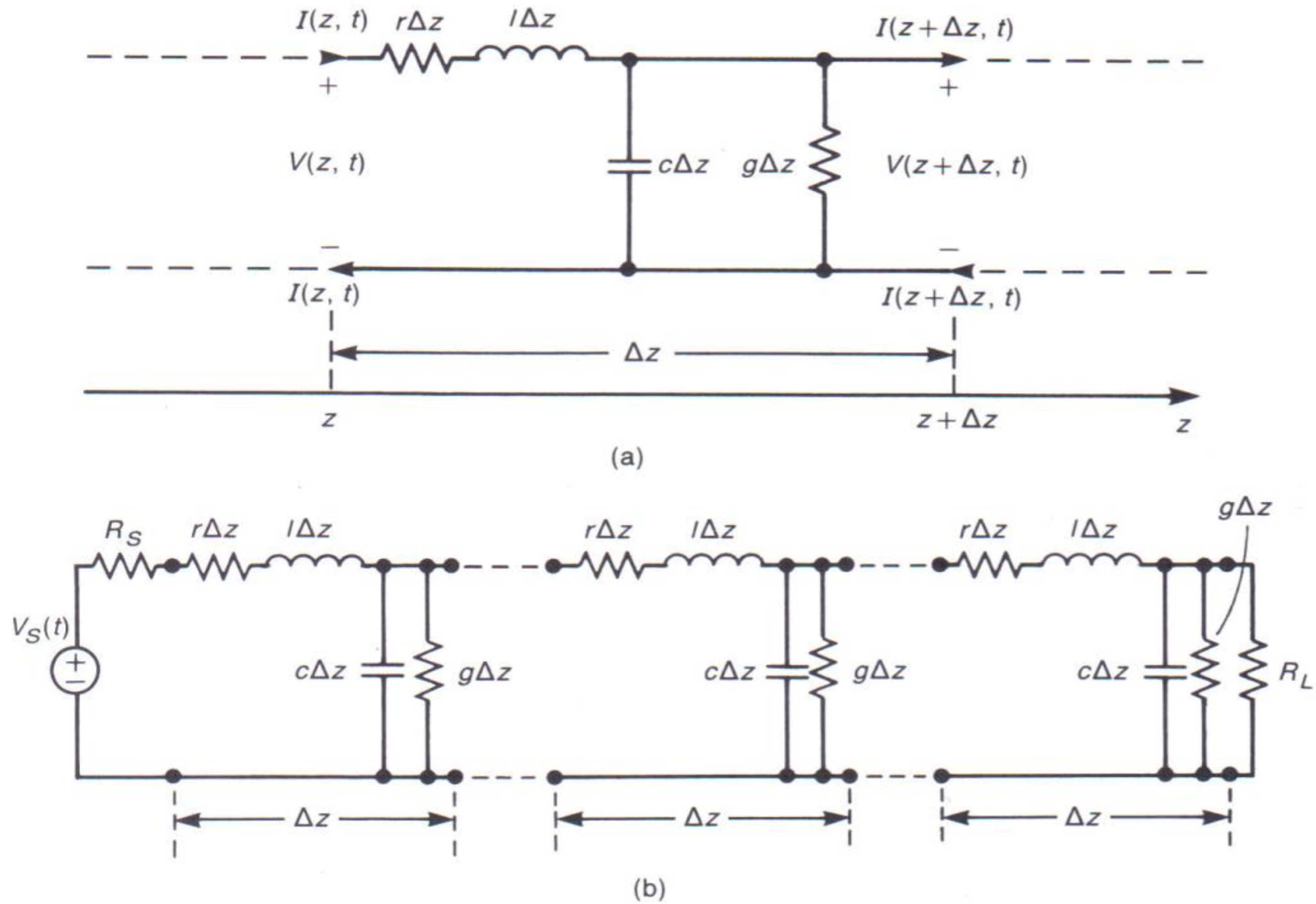
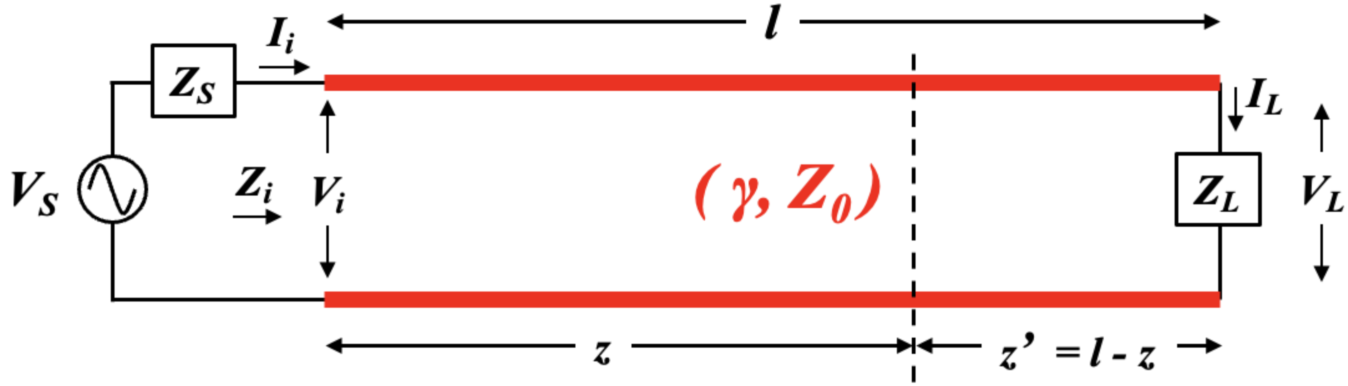


FIGURE 4.3 The per-unit-length equivalent circuit of a two-conductor line for the TEM mode of propagation: (a) the equivalent circuit for a Δz section; (b) modeling the entire line as a cascade of Δz sections from which the transmission line equations are derived in the limit as $\Delta z \rightarrow 0$.

A análise do comportamento de uma linha de transmissão pode ser feita de maneira rigorosa através da teoria eletromagnética, Equações de Maxwell.

Aqui, no entanto, seguiremos um caminho alternativo, empregando o método tradicional baseado na teoria de circuitos de elementos distribuídos, onda TEM.



UNICAMP

Z_0 = *characteristic impedance*
Z_S = *source impedance*
Z_L = *load (termination) impedance*

γ = *propagation constant* = $\alpha + j\beta$

l = *length of line*
z = *distance from beginning of line*
z' = *distance from end of line*

Seção infinitesimal de uma linha de transmissão, onde no delta x o tempo não varia.... equações de circuito.

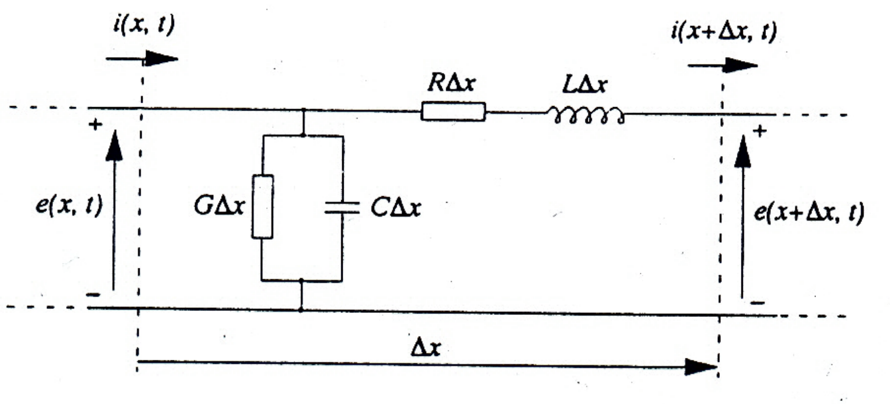
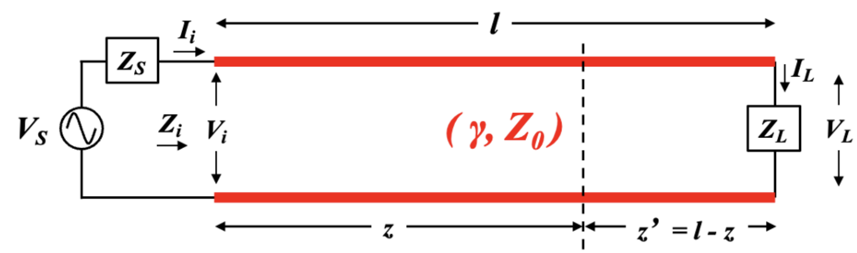


Fig.1 - Linha de transmissão uniforme.



PARÂMETROS DISTRIBUIDOS- VARIÁVEIS COM A FREQUÊNCIA

Onde:

R= Resistência série da linha por unidade de comprimento [Ω/m]
L= Indutância série da linha por unidade de comprimento [H/m]
C= Capacitância paralela da linha por unidade de comprimento [F/m]
G= Condutância paralela da linha por unidade de comprimento [S/m]

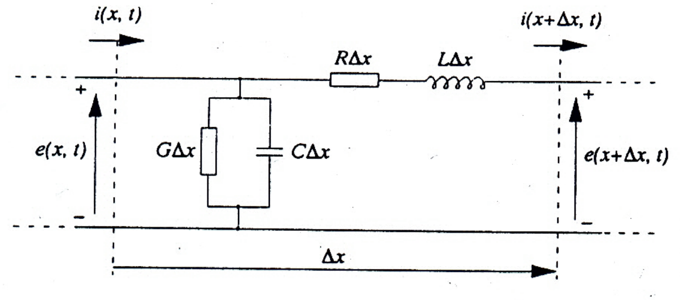


Fig.1 - Linha de transmissão uniforme.

Aplicando a lei das malhas de Kirchhoff ao circuito:

$$e(x,t) = R\Delta x \ . \ i(x+\Delta x,t) + L\Delta x \ . \frac{\partial i}{\partial t}(x+\Delta x,t) + e(x+\Delta x,t) \tag{1}$$

onde e(x,t) e i(x,t) são as variáveis dependentes mais usuais e “x” e “t” são as variáveis independentes (espaço e tempo).

Dividindo (1) por Δx e rearrajando os termos, temos:

$$\left[R + L\frac{\partial}{\partial t}\right] i(x+\Delta x, t) = -\ \frac{e(x+\Delta x, t) \ - \ e(x, t)}{\Delta x} \tag{2}$$

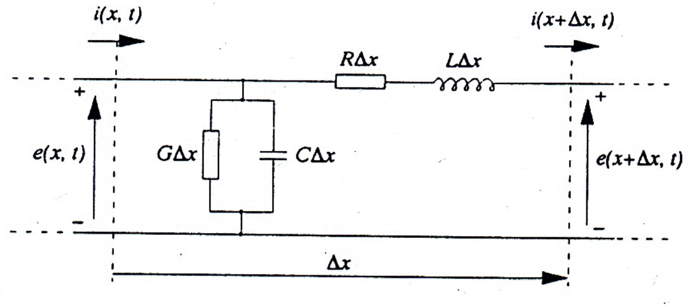


Fig.1 - Linha de transmissão uniforme.

$$\left[R + L\frac{\partial}{\partial t}\right] i(x+\Delta x, t) = -\frac{e(x+\Delta x, t) - e(x, t)}{\Delta x}$$

Vejamos agora, a lei dos nós de Kirchhoff:

$$i(x+\Delta x, t) = i(x, t) - G\Delta x \,.\, e(x, t) - C\Delta x \,.\, \frac{\partial}{\partial t} e(x, t) \qquad (3)$$

Substituindo (3) em (2), tem-se:

$$\left[R + L\frac{\partial}{\partial t}\right] \left[i(x, t) - G.\Delta x\, e(x, t) - C\Delta x \frac{\partial}{\partial t} e(x, t)\right] = -\frac{e(x+\Delta x, t) - e(x, t)}{\Delta x} \qquad (4)$$

$$\left[R + L\,\frac{\partial}{\partial t}\right]\left[i(x,t) - G.\cancel{\Delta x}\,e(x,t) - C\cancel{\Delta x}\frac{\partial}{\partial t}e(x,t)\right] = -\,\frac{e(x+\Delta x,t) - e(x,t)}{\Delta x}$$

O modelo assumido fica mais próximo da situação real à medida que Δx tende a zero. Aplicando o limite na eq.(4), para Δx → 0, tem-se:

$$\boxed{\left[R + L\,\frac{\partial}{\partial t}\right] i(x,t) = -\,\frac{\partial}{\partial x}\,e(x,t)} \qquad (5)$$

É importante observar que o 2° membro de (4) dá origem ao negativo da derivada parcial da tensão e(x,t) na linha em relação a x.

O MODELO ESTÁ CORRETO!!

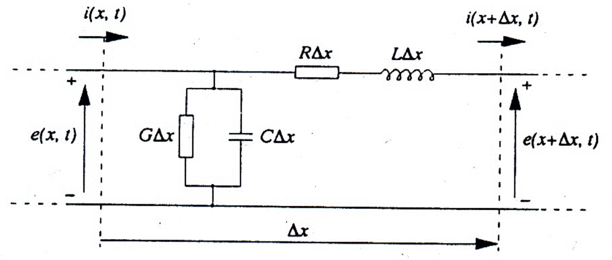


Fig.1 – Linha de transmissão uniforme.

Reescrevendo a eq.(3) numa forma mais apropriada e dividindo por Δx, obtém-se:

$$i(x+\Delta x, t) = i(x,t) - G\Delta x \,.\, e(x,t) - C\Delta x \,.\, \frac{\partial}{\partial t}\, e(x,t)$$

$$\left[G + C\,\frac{\partial}{\partial t}\right] e(x,t) = -\,\frac{i(x+\Delta x, t) - i(x,t)}{\Delta x} \qquad (6)$$

Fazendo o limite da equação (6) quando Δx → 0, tem-se:

$$\boxed{\left[G + C\,\frac{\partial}{\partial t}\right] e(x,t) = -\,\frac{\partial}{\partial x}\, i(x,t)} \qquad (7)$$

A equação (5)

$$\left[R + L\,\frac{\partial}{\partial t} \right] i(x,t) = -\,\frac{\partial}{\partial x}\, e(x,t)$$

indica que há queda de tensão com a distância x na linha pela passagem da corrente nos elementos R e L em série na linha.

A equação (7).

$$\left[G + C\,\frac{\partial}{\partial t} \right] e(x,t) = -\,\frac{\partial}{\partial x}\, i(x,t)$$

mostra que há queda de corrente com a distância x na linha devido à existência de tensão nos elementos paralelos (de fuga) da linha, ou seja G e C. São correntes que retornam antes do sinal chegar no fim da linha.

UNICAMP

Equações diferenciais da linha expressas somente em função da tensão ou somente em função da corrente

Diferenciando-se a eq.(5) em relação a x, e a eq.(7) em relação a t, para eliminar a corrente.

$$\boxed{\left[R + L\,\frac{\partial}{\partial t}\right] i(x,t) = -\,\frac{\partial}{\partial x}\,e(x,t)}$$

$$R\,\frac{\partial}{\partial x}\,i(x,t) + L\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\,i(x,t) = -\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,e(x,t) \qquad (8)$$

$$\boxed{\left[G + C\,\frac{\partial}{\partial t}\right] e(x,t) = -\,\frac{\partial}{\partial x}\,i(x,t)}$$

$$G\,\frac{\partial}{\partial t}\,e(x,t) + C\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,e(x,t) = -\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\,i(x,t) \qquad (9)$$

Equações diferenciais da linha expressas somente em função da tensão ou somente em função da corrente

Substituindo-se (9) em (8) e utilizando para o 1º termo de corrente de (8) o seu valor em tensão fornecido pela eq. (7), temos:

$$-RGe(x,t) - RC\frac{\partial}{\partial t}e(x,t) - LG\frac{\partial}{\partial t}e(x,t) - LC\frac{\partial^2}{\partial t^2}e(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}e(x,t) = 0 \qquad (10)$$

Rearranjando (10) e omitindo a dependência (x,t) para uma melhor visualização, temos:

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - (RC + LG)\frac{\partial e}{\partial t} - RG\,.\,e = 0 \qquad (11)$$

Equações diferenciais da linha expressa em função da corrente

De forma análoga, pode-se obter uma eq. diferencial parcial só em função da corrente, diferenciando-se (5) em relação a t e e (7) em relação a x. O resultado é :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - LC\,\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - (RC + LG)\,\frac{\partial i}{\partial t} - RG\,.\,i = 0 \qquad (12)$$

As eqs. (11) e (12) são conhecidas como equações diferenciais parciais de onda e definem a propagação da onda em uma linha.

UNICAMP

Linha não dissipativa ideal ou sem perdas

Nessa condição temos: R = G = 0

Neste caso, as eqs. (11) e (12) se simplificam para:

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, e(x,t) = LC\, \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, e(x,t)} \qquad (13)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, i(x,t) = LC\, \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, i(x,t)} \qquad (14)$$

Linha não dissipativa ideal ou sem perdas

UNICAMP

Verifiquemos que uma solução para a eq. (13) é:

$$e(x,t) = f_1(t - \sqrt{LC}\ x) \qquad (15)$$

Onde f_1 é qualquer função unívoca do argumento $(t - \sqrt{LC}\ x)$
Além disso f_1 tem dimensão de tensão (dada em volts, no sistema internacional).

$$e(x,t) = f_1(t - \sqrt{LC}\ x)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2} e(x,t) = LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} e(x,t)}$$

UNICAMP

Vejamos se a eq. (15) é uma solução da eq.(13), equação da tensão.

$$\frac{\partial}{\partial x} e(x,t) = -\sqrt{LC}\ f_1^{'}(t - \sqrt{LC}\ x) \qquad (16)$$

onde f'$_1$ significa a derivada de f$_1$ em relação ao argumento composto $t - \sqrt{LC}\ x$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e(x,t) = LC\ f_1^{''}(t - \sqrt{LC}\ x) \qquad (17)$$

que é o 1º membro da eq. (13).

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2} e(x,t) = LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} e(x,t)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e(x,t) = LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} e(x,t)$$

Linha não dissipativa ideal ou sem perdas

UNICAMP

O 2º membro da eq. (13) fica: $e(x,t) = f_1(t - \sqrt{LC}\ x)$

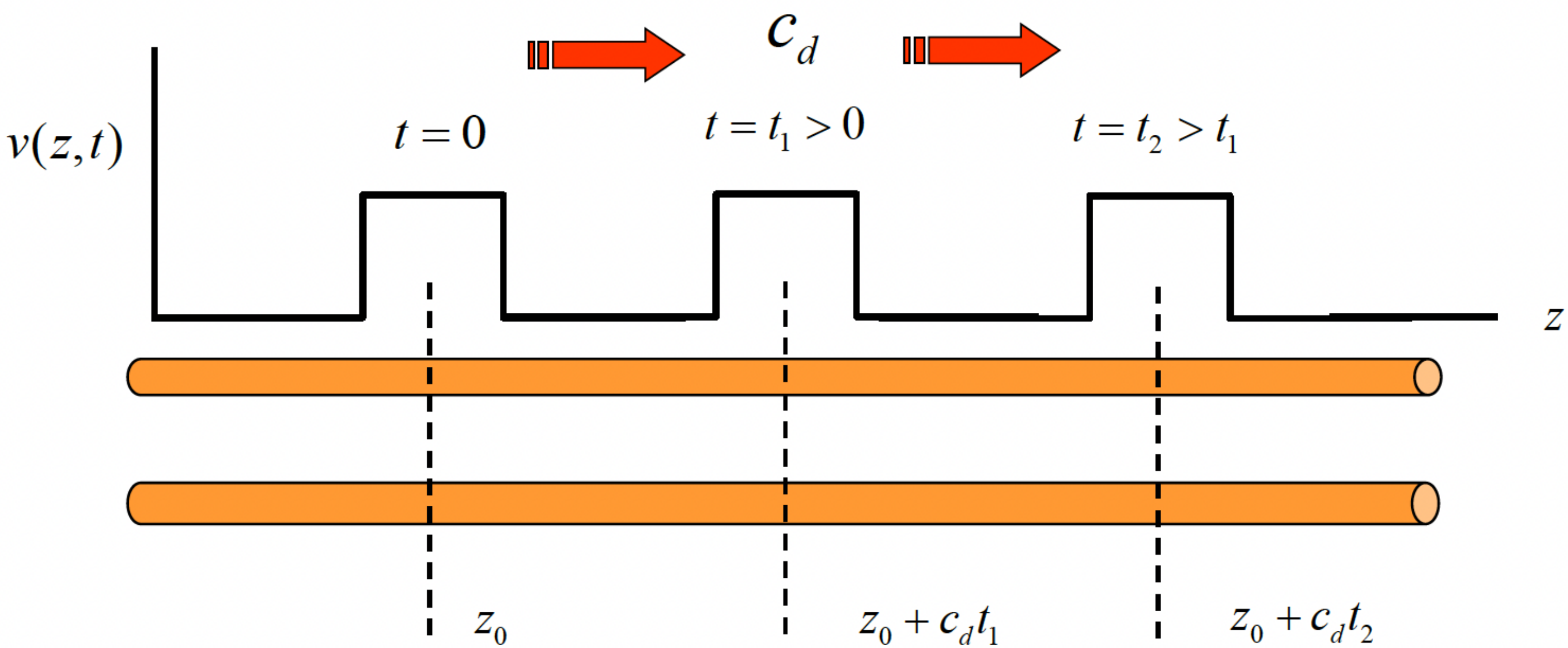
$$LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} e(x,t) = LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} f_1(t - \sqrt{LC}\ x) = LC f_1''(t - \sqrt{LC}\ x) \qquad (18)$$

Comparando (17) com (18), observa-se que a expressão (15) é realmente uma solução para a eq. (13).

$e(x,t) = f(t - \sqrt{LC}\ x)$ corresponde a uma onda de tensão propagando-se para a direita (na direita de x crescente).

The waveform is shifted to the right by $\Delta z = c_d t$

"snapshots of the wave"



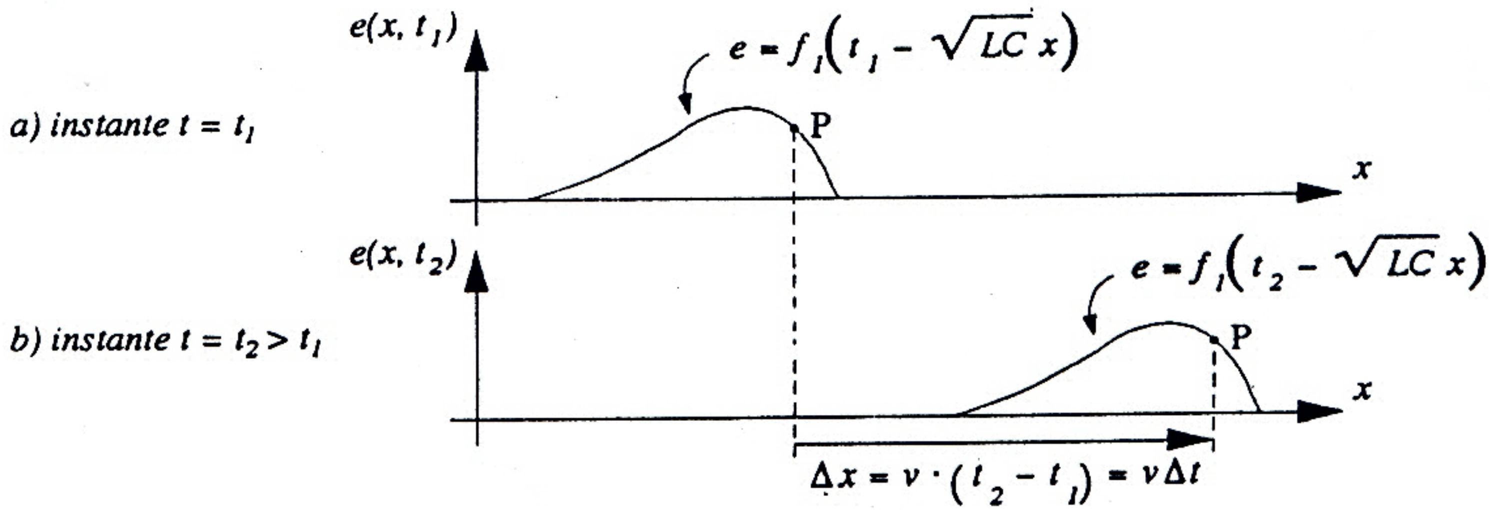
Linha não dissipativa ideal ou sem perdas

A função f_1 é a forma de onda que se propaga e tem a ver, na verdade, com o sinal que foi injetado na linha. Para x =0 a eq.(15) fornece

$$e(0,t) = f_1(t) \tag{19}$$

ou seja, a tensão no início da linha (em x = 0) é a função f_1, que representa a forma do sinal injetado na linha. A eq. (19) é pois, uma condição de contorno para a solução da tensão e(x,t) na linha.

Para efeito de visualização do fenômeno de onda, suponha um caso genérico para f_1, como diagramado abaixo:



onde $v = 1/\sqrt{LC} =$ velocidade de propagação da onda

Perturbação de tensão viajando na linha ideal.

Linha não dissipativa ideal ou sem perdas

UNICAMP

Suponha que haja um observador montado na onda, no ponto marcado P. Ele deve ver a perturbação (onda) parada. O argumento $t - \sqrt{LC}\,x$ permanece constante para ele, ou seja:

$$t - \sqrt{LC}\,x = K \tag{20}$$

Fazendo-se a derivada em relação ao tempo da eq.(20) tem-se:

$$1 - \sqrt{LC}\,\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\boxed{\therefore \frac{dx}{dt} = v = 1/\sqrt{LC}\,[m/s]} \tag{21}$$

velocidade de propagação da onda

$$\boxed{\therefore \frac{dx}{dt} = v = 1/\sqrt{LC}\ [m/s]}$$

A eq. (21) indica que a perturbação ou onda se move para a direita (x crescente) com a velocidade de propagação indicada em (21).

$$t - \sqrt{LC}\,x = K$$

Observe de (20) que, se o tempo t aumenta, x deve crescer para que se mantenha a constante K.

Linha não dissipativa ideal ou sem perdas

Como num problema de causa e efeito observa-se que associada à onda de tensão expressa na eq. (15), deve existir uma correspondente onda de corrente. Tentemos uma correspondente onda de corrente para a direita como sendo:

$$i(x,t) = \frac{f_1(t - \sqrt{LC}\ x)}{Z_0} \qquad (22)$$

onde Z_0 deve ser determinada.

Linha não dissipativa ideal ou sem perdas

Substituindo (22) na eq. (5) (com R = 0) tem-se:

$$\boxed{\left[R + L\,\frac{\partial}{\partial t}\right] i(x,t) = -\,\frac{\partial}{\partial x}\, e(x,t)}$$

$$L\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{f_1(t-\sqrt{LC}\ x)}{Z_0}\right] = -\,\frac{\partial}{\partial x}\, f_1(t-\sqrt{LC}\ x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{L}{Z_0}\, f_1^{'}(t-\sqrt{LC}\ x) = \sqrt{LC}\ f_1^{'}(t-\sqrt{LC}\ x) \qquad (23)$$

$$Z_0 = L/\sqrt{LC}$$

Linha não dissipativa ideal ou sem perdas

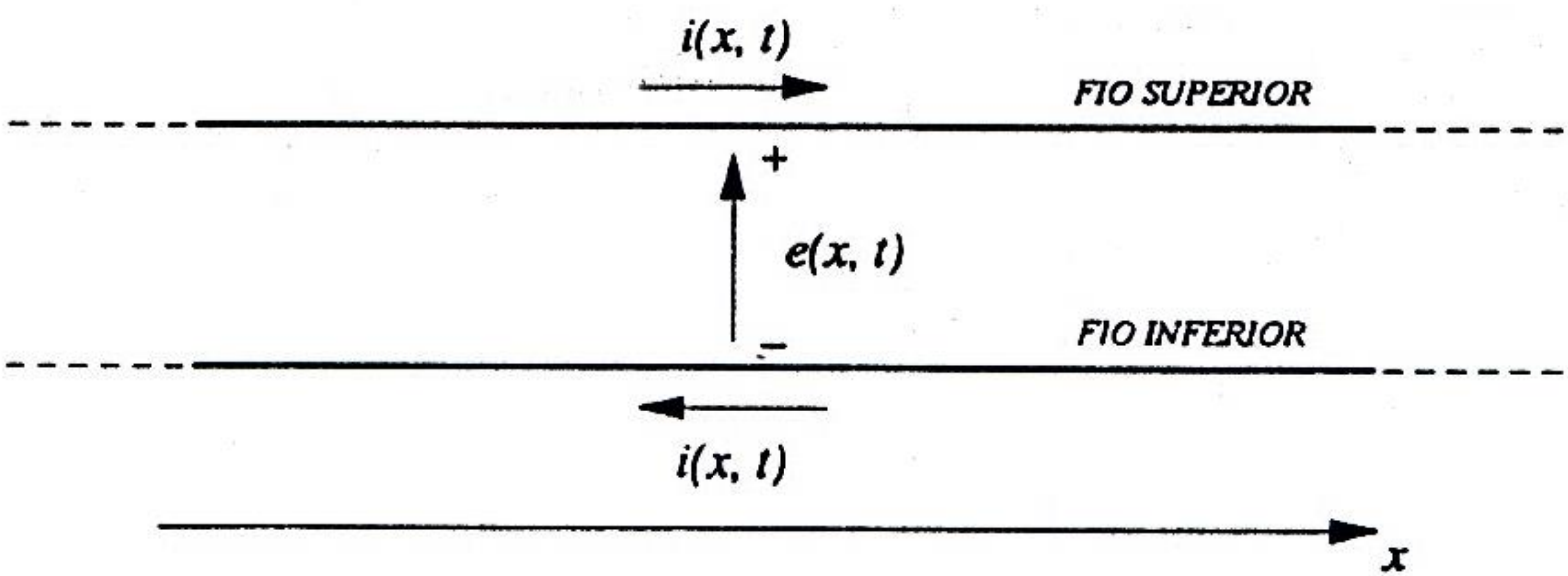
Para que (23) seja verdadeira, é necessário que a constante arbitrada Z_0 verifique a relação: $L/Z_0 = \sqrt{LC}$ ou $Z_0 = \mathrm{L}/\sqrt{\mathrm{LC}}$

Ou seja, $$Z_0 = R_0 = \sqrt{L/C} \qquad [\Omega] \qquad (24)$$

A grandeza Z_0 é conhecida como a impedância característica da linha sem perdas, e é dada em Ω quando L é dado em H/m, e C em F/m. Para a linha sem perdas, como se nota de (24), Z_0 é um número puramente real, ou seja, $Z_0 = R_0$, pois L e C são sempre números reais positivos. Desta forma a expressão (22) é de fato a solução de corrente associada à solução de tensão expressa na eq.(15).

Linha não dissipativa ideal ou sem perdas

UNICAMP



Convenção de sinais para tensão e corrente na linha

As soluções já encontradas de tensão (eq.(15)) e a sua correspondente solução de corrente (eq.(22) são ambas perturbações que viajam para a direita (x crescente). Para que as soluções de e(x,t) e de i(x,t) se completem é necessário incluir também a possibilidade de se ter onda viajando para a esquerda, ou seja, no sentido de x decrescente. Sendo assim, vamos incluir também a solução abaixo para a eq. diferencial (13).

$$e(x,t) = f_2(t + \sqrt{LC}\; x) \qquad (25)$$

A correspondente solução para a corrente pode ser encontrada se imaginarmos que esta solução difere de (25) apenas por uma constante, ou seja,

$$i(x,t) = \frac{f_2(t + \sqrt{LC}\ \ x)}{K} \qquad (26)$$

Uma substituição de (26) na eq.(5) (com R = 0) indica que (26) é a correspondente solução de corrente desde que a constante K seja igual a $-Z_0$. A solução procurada para a corrente que viaja para a esquerda é então :

$$i(x,t) = -\frac{\mathrm{f}_2(t + \sqrt{LC}\ \ x)}{Z_0} \qquad (27)$$

Depois de toda esta discussão só nos resta colecionarmos as várias soluções de tensão e de corrente para as eqs. diferenciais parciais (13) e (14) da linha ideal, ou seja:

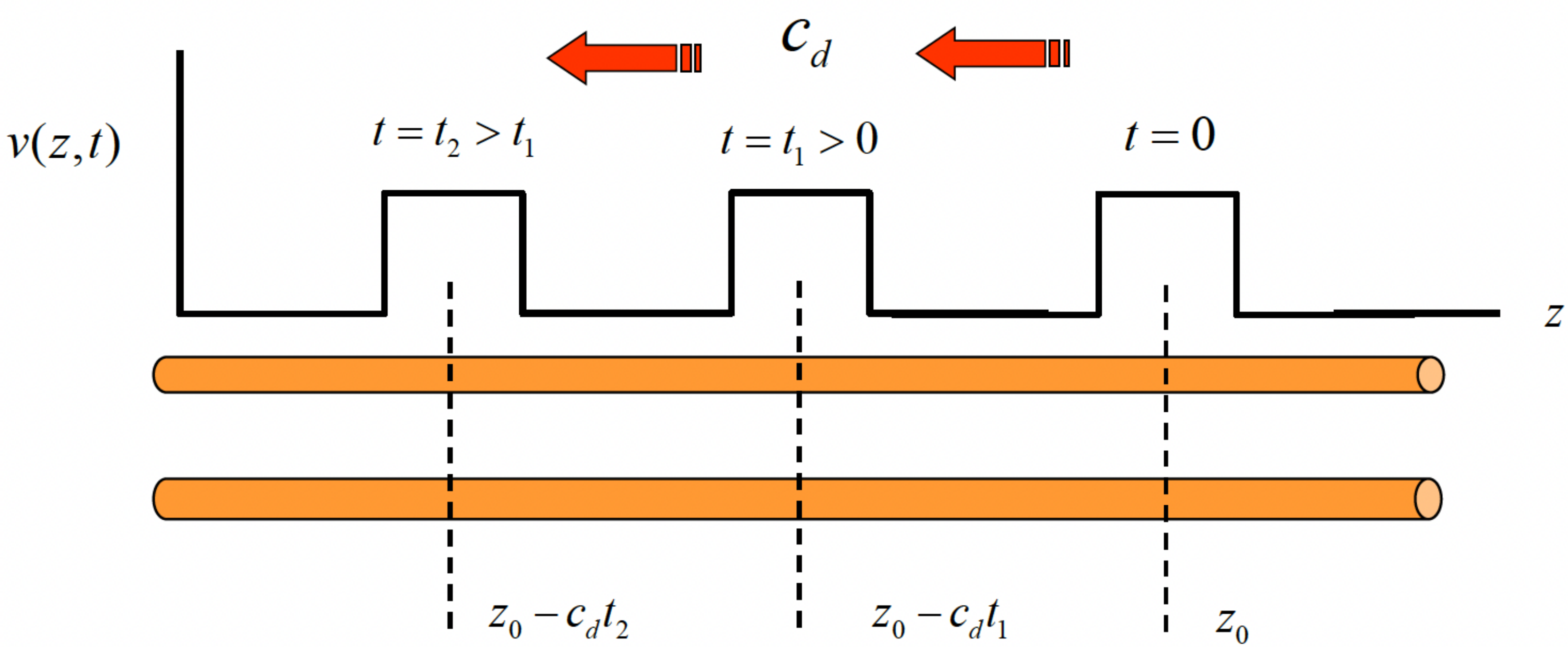
$$e(x,t) = \underset{\text{Propagação p/ direita}}{\underrightarrow{f_1(t-\sqrt{LC}\,x)}} + \underset{\text{Propagação p/ esquerda}}{\underleftarrow{f_2(t+\sqrt{LC}\,x)}} \qquad (28)$$

$$i(x,t) = \frac{1}{Z_0}\Big[\underset{\text{Propagação p/ direita}}{\underrightarrow{f_1(t-\sqrt{LC}\,x)}} - \underset{\text{Propagação p/ esquerda}}{\underleftarrow{f_2(t+\sqrt{LC}\,x)}}\Big] \qquad (29)$$

O sinal negativo para a 2ª. parcela de (29) advém da convenção de sinais de tensão e de corrente já adotada.

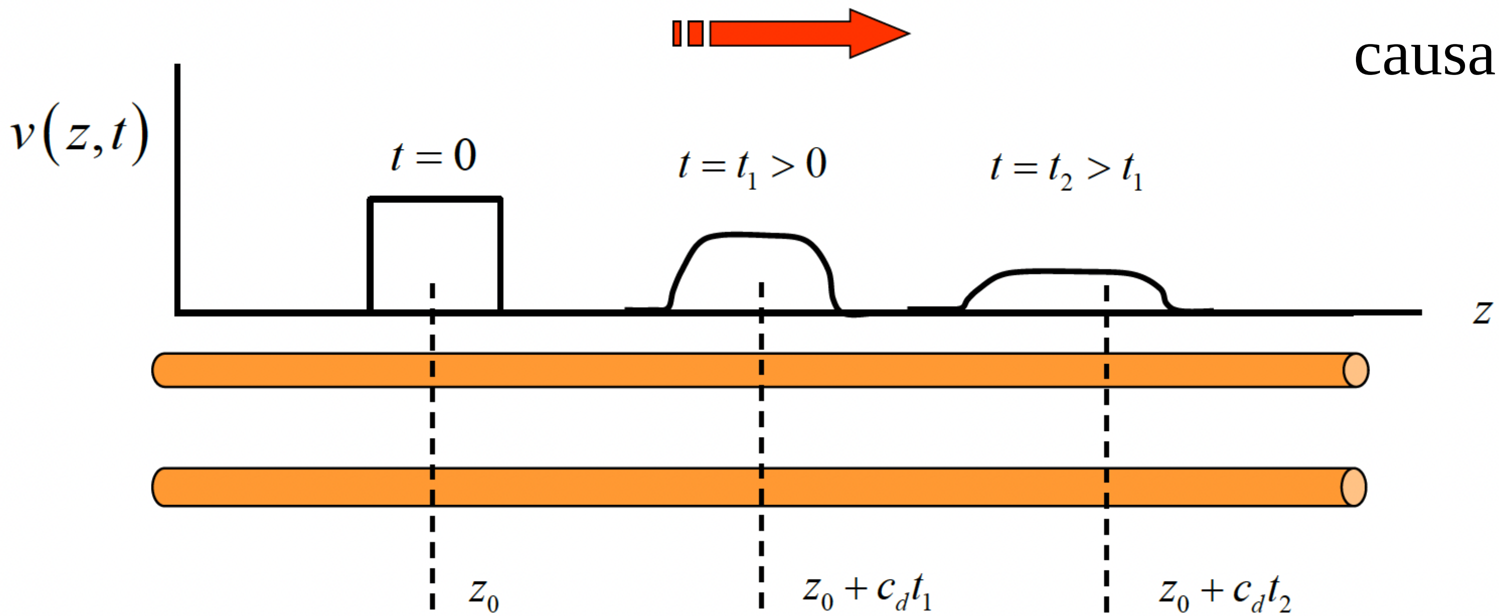
The waveform is shifted to the left by $|\Delta z| = c_d t$

"snapshots of the wave"



Loss causes an attenuation in the signal level, and it also causes distortion (the pulse changes shape and usually gets broader).

Fica mais largo por causa da indutância!



AIR

$$c_{air} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 \, m/s$$

$$\boxed{\lambda_{air} = \frac{c}{f} = \frac{300}{f_{MHz}}}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \, H/m$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \, F/m$$

CABLE

$$v_{cable} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \approx \frac{2}{3} \cdot c$$

$\mu_r = 1$
$\varepsilon_r = 2\text{-}3$
(typical)

$$\boxed{\lambda_{cable} \approx \frac{200}{f_{MHz}}}$$

For 6.2 m cable:

6.2 m = $\lambda/4$ at ~ 8 MHz

6.2 m = $\lambda/2$ at ~16 MHz

Reflexões na linha sem perda. Coeficientes de reflexão de tensão e de corrente

Às soluções (28) e (29) encontradas na secção anterior deve-se fazer uma consideração. Há obviamente a possibilidade de que f_2 seja uma função completamente independente de f_1. Este seria o caso de se ter duas fontes de tensão independentes; f_1 no lado esquerdo ($x = 0$) de uma linha finita, e f_2 no lado direito ($x = \ell$) desta mesma linha. Como o sistema é linear, a solução completa da tensão $e(x,t)$ na linha é a soma das soluções obtidas individualmente.

Reflexões na linha sem perda. Coeficientes de reflexão de tensão e de corrente

Entretanto, nesta seção, estamos interessados no caso em que f_2 não é uma função qualquer independente de f_1. Pelo contrário, as perturbações f_1 e f_2 podem ser fortemente dependentes, uma vez que uma pode ser simplesmente a reflexão da outra num ponto qualquer de descontinuidade da linha.

Reflexões na linha sem perda. Coeficientes de reflexão de tensão e de corrente

UNICAMP

Antes de se atacar o problema das reflexões na linha ideal, façamos uma notação mais adequada, ou seja:

$$f_1(t - \sqrt{LC}\, x) = e^{+}(x,t) \qquad \textit{tensão p/ a direita} \qquad (30)$$

$$f_2(t + \sqrt{LC}\, x) = e^{-}(x,t) \qquad \textit{tensão p/ a esquerda} \qquad (31)$$

$$\frac{f_1(t - \sqrt{LC}\, x)}{Z_0} = \frac{e^{+}(x,t)}{Z_0} = i^{+}(x,t) \qquad \textit{corrente p/ a direita} \qquad (32)$$

$$\frac{-f_2(t + \sqrt{LC}\, x)}{Z_0} = \frac{-e^{-}(x,t)}{Z_0} = i^{-}(x,t) \qquad \textit{corrente p/ a direita} \qquad (33)$$

Coeficientes de reflexão de tensão e de corrente

Suponhamos uma linha de transmissão ideal terminada em x = ℓ [m] por um resistor de carga R_c [Ω], como ilustrado na Fig. 4.

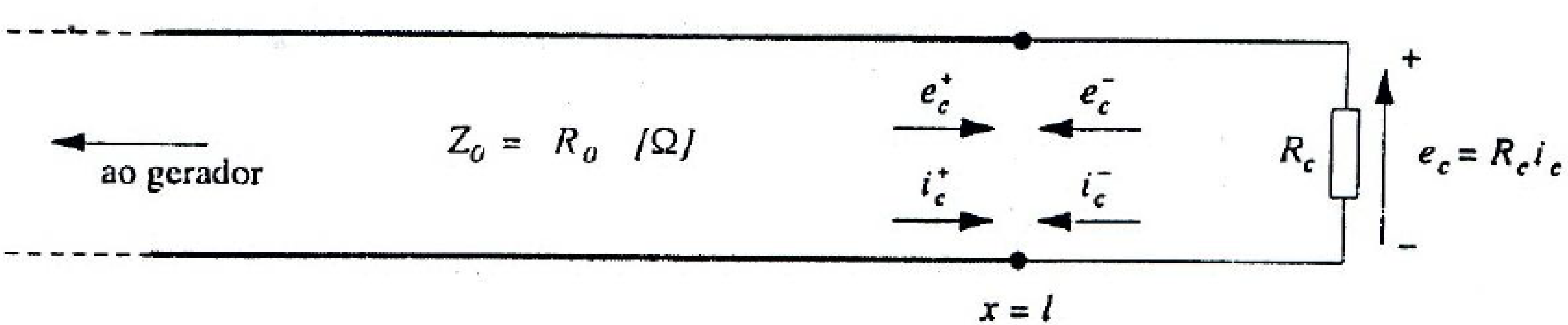


Fig.4 - Reflexão na carga.

UNICAMP

Reflexões na linha sem perda. Coeficientes de reflexão de tensão e de corrente

As tensões e as correntes totais na carga devem estar relacionadas pela lei de Ohm:

$$\frac{e_c}{i_c} = R_c \qquad (34)$$

$$\therefore \frac{e_c^+ + e_c^-}{i_c^+ + i_c^-} = R_c \qquad (35)$$

Onde o índice “c” significa tensões e correntes na posição da carga.

Reflexões na linha sem perda. Coeficientes de reflexão de tensão e de corrente

UNICAMP

manipulando as relações , tem-se:

$$\frac{e_c^+ + e_c^-}{\dfrac{e_c^+}{Z_0} - \dfrac{e_c^-}{Z_0}} = R_c$$

Dividindo o numerador e o denominador por e_c^+ e rearranjando os termos, obtém-se :

$$\boxed{\frac{e_c^-}{e_c^+} = \frac{R_c - Z_0}{R_c + Z_0}}$$

UNICAMP

Reflexões na linha sem perda. Coeficientes de reflexão de tensão e de corrente

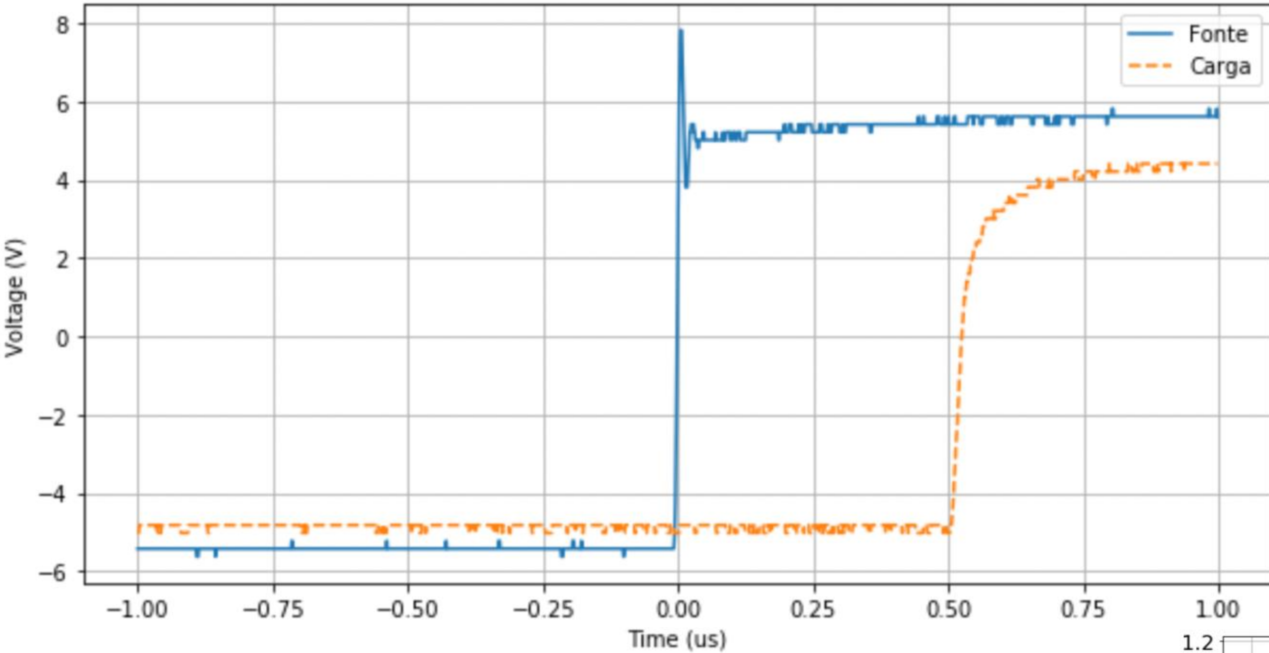
A relação e_c^- / e_c^+ é conhecida como coeficiente de reflexão de tensão Γ_c na posição da carga, ou seja:

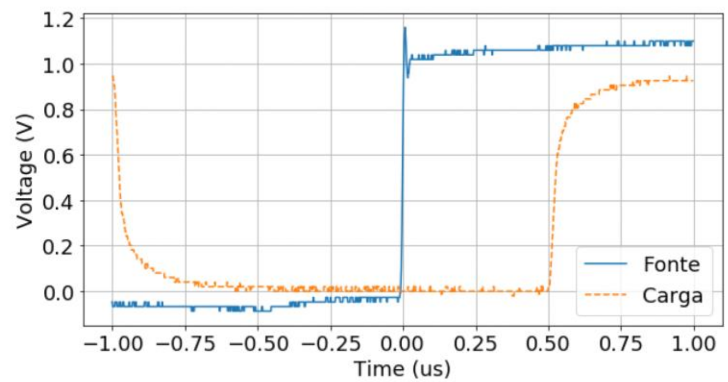
$$\boxed{\Gamma_c = \frac{e_c^-}{e_c^+} = \frac{R_c - Z_0}{R_c + Z_0}} \qquad (36)$$

Na eq. (36) nota-se que o único valor de R_c que evita as reflexões é $R_c = Z_0 = R_0$ [Ω]. Neste caso, $\Gamma_c = 0$ e $e_c^- = \Gamma_c \cdot e_c^+ = 0$

$\Gamma c = 0$ linha casada
$\Gamma c = 1$ linha aberta
$\Gamma c = -1$ linha em curto

Cabo coaxial casado no final da linha



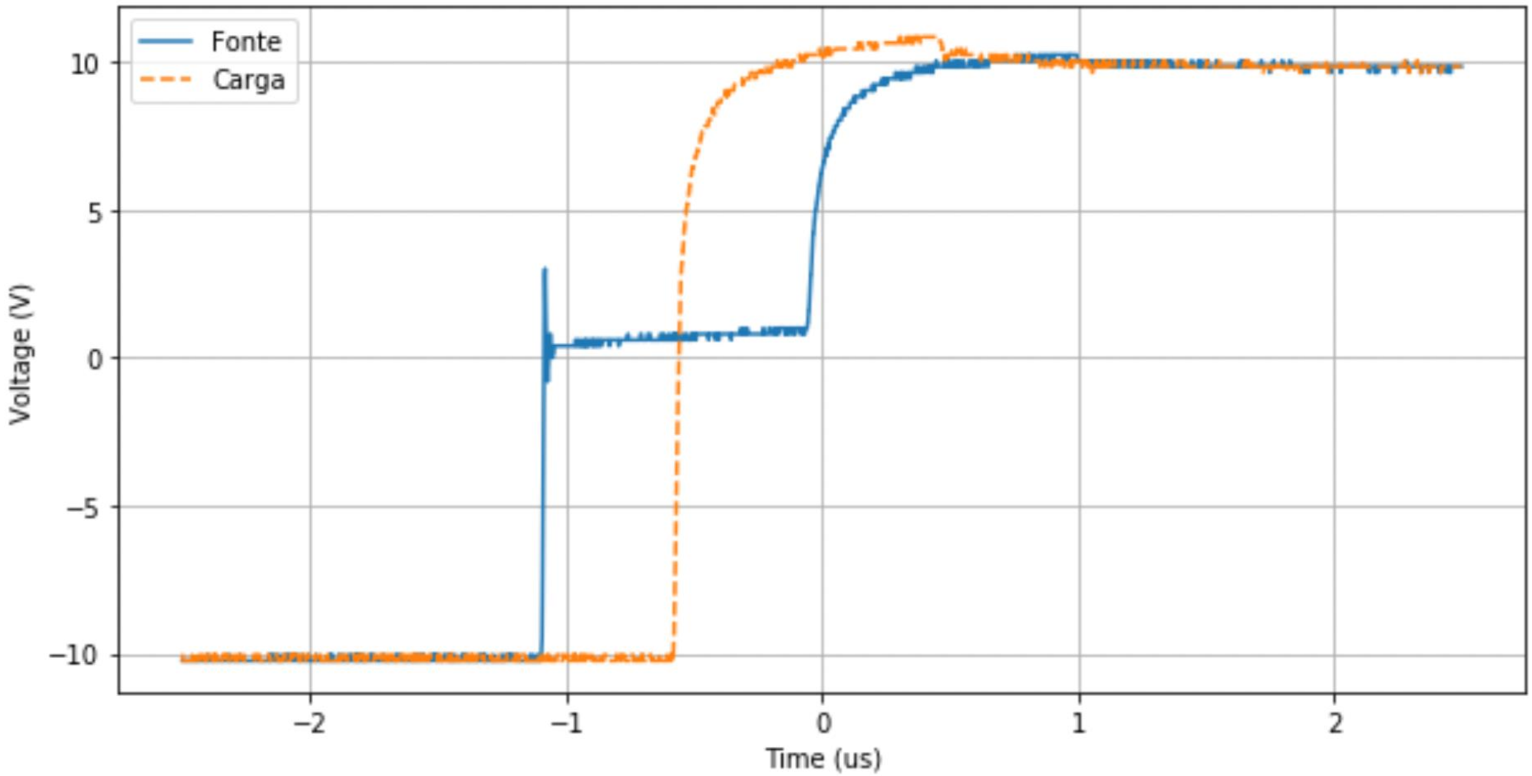


RESPOSTA

O atraso entre os sinais de entrada e saída do cabo de 101 metros foi de 518ns .

Logo, $\frac{101}{518\times10^{-9}} = 194.98 \times 10^6 m/s$

Cabo coaxial aberto, reflexão total



Reflexões na linha sem perda. Coeficientes de reflexão de tensão e de corrente

UNICAMP

O coeficiente de reflexão de corrente Γ_c' na posição da carga pode também ser definido de forma análoga àquela já feita para tensão. Pode-se mostrar que a expressão de Γ_c' é dada por :

$$\boxed{\Gamma_c' = \frac{i_c^-}{i_c^+} = \frac{Z_0 - R_c}{R_c + Z_0} = -\Gamma_c} \quad (37)$$

as considerações de reflexão de corrente, para os vários casos de R_c são semelhantes àquelas já feitas para a tensão.

Diagrama ″Zig-Zag″ para as reflexões na linha.

As múltiplas reflexões que podem ocorrer numa linha podem ser melhor visualizadas, fazendo uso do chamado diagrama ″zig-zag″. Este diagrama será explicado mediante a aplicação do mesmo problema simples.

Seja o caso de uma linha sem perdas R = G = 0 (ver Fig. 6) excitada por um degrau de tensão de amplitude E volts, no instante t = 0 e na posição x = 0 (entrada da linha).

A condição de contorno é então:

$$e(0,t) = \frac{E}{2} \, . \, u(t) \, [V] \qquad (42)$$

onde u(t) é a notação para o degrau unitário.

Diagrama ″Zig-Zag″ para as reflexões na linha.

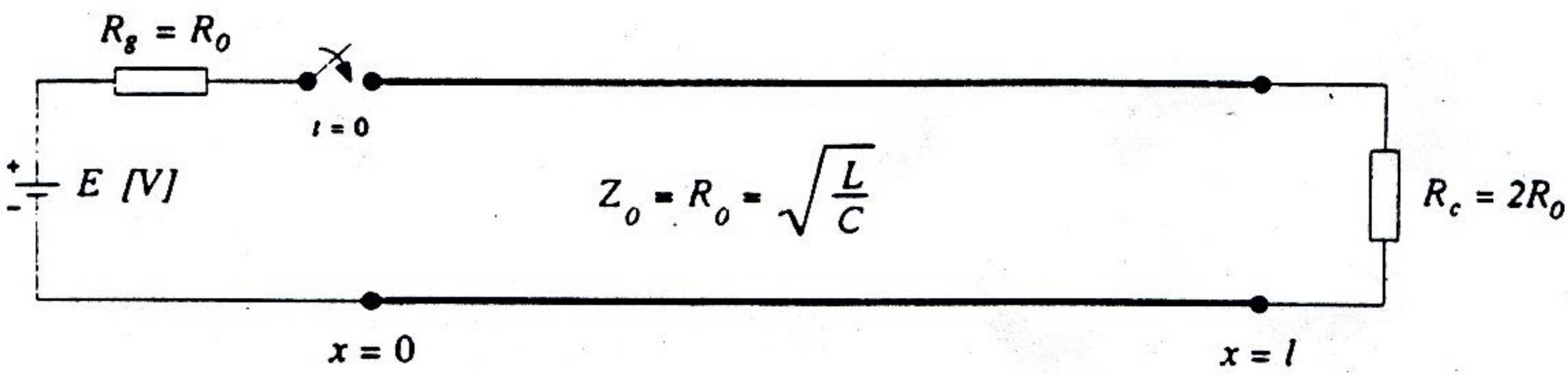


Fig. 6 – Exemplo para aplicação do diagrama ″zig-zag″.

Diagrama "Zig-Zag" para as reflexões na linha.

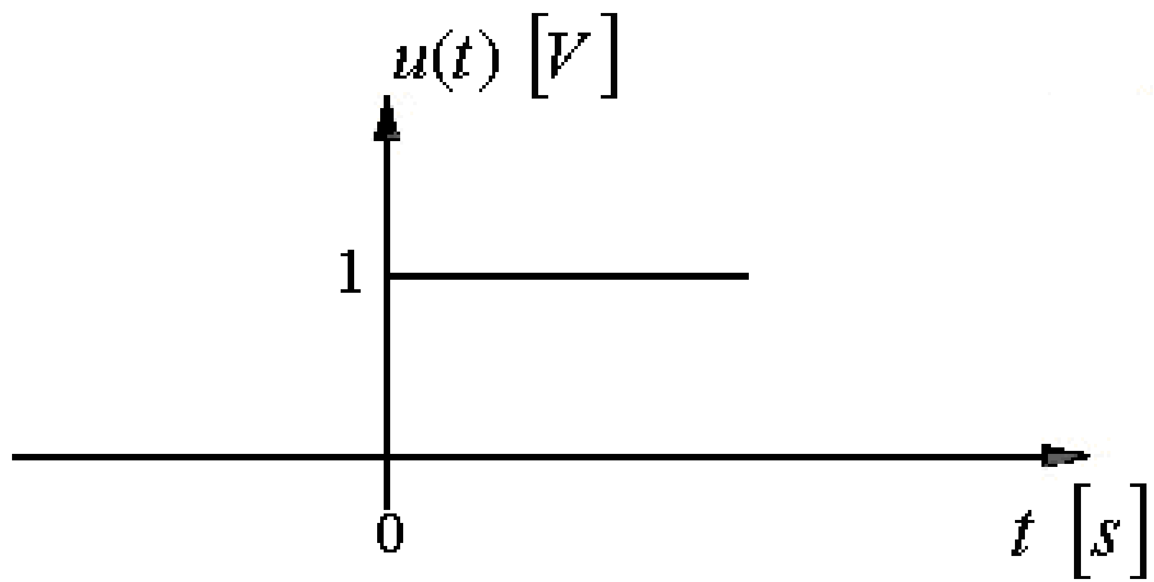


Fig. 5 – Degrau unitário de tensão ocorrendo em t = 0.

UNICAMP

Diagrama "Zig-Zag" para as reflexões na linha.

A fonte de tensão é real, e tem uma resistência interna R_g que, no exemplo dado, coincide com a impedância (ou resistência) característica da linha. Ou seja, $R_g = R_0 = \sqrt{L/C}\ [\Omega]$. Também, neste caso, o resistor de carga vale $R_c = 2R_0$ [Ω].

Uma vez que a linha fornece ondas como solução para a tensão e para a corrente, o degrau gerado na boca da linha sai viajando pela linha, com a velocidade de propagação $v = 1/\sqrt{LC}\ [\mathrm{m/s}]$

Depois de decorridos $t = T = \dfrac{l}{v}$ [s], o degrau de tensão deve atingir a carga colocada em x = ℓ .

Diagrama "Zig-Zag" para as reflexões na linha.

UNICAMP

Para a construção do diagrama "zig-zag" de tensão é necessário obter os coeficientes de reflexão na posição do gerador (Γ_g)
No exemplo dado tem-se:

$$\Gamma_c = \frac{R_c - Z_0}{R_c + Z_0} = \frac{2R_0 - R_0}{2R_0 + R_0} = \frac{R_0}{3R_0} = \frac{1}{3} \qquad (43)$$

$$\Gamma_g = \frac{R_g - Z_0}{R_g + Z_0} = \frac{R_0 - R_0}{R_0 + R_0} = 0 \qquad (44)$$

Na posição do gerador
a impedância casa com a linha

Diagrama "Zig-Zag" para as reflexões na linha.

O diagrama "zig-zag" de tensão está ilustrado na Fig. 7.a. O diagrama de corrente pode ser visto na Fig. 7.b.

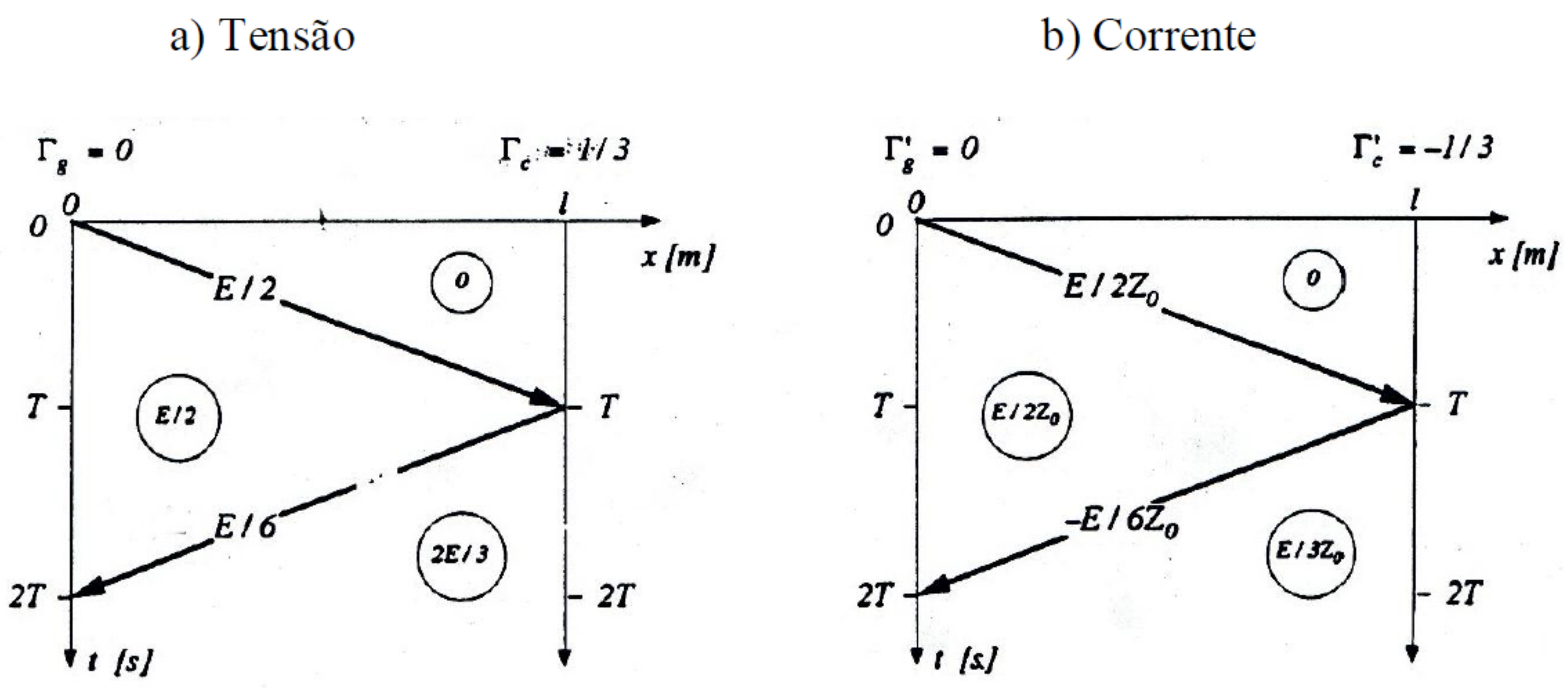


Fig. 7 - Diagrama "zig-zag" para o problema da Fig.6.

Diagrama "Zig-Zag" para as reflexões na linha.

UNICAMP

Como se nota na Fig. 7, o diagrama "zig-zag" é na verdade um diagrama espaço x tempo, onde a distância x é colocada na horizontal, desde x = 0 até o final da linha x = ℓ. O tempo, por outro lado, é marcado na vertical, e cresce para baixo na Fig.7.

No ponto x = 0 e t = 0 é iniciado o vai-e-vem das ondas, para este problema em questão. A tensão inicial injetada na linha é facilmente obtida através de uma divisão resistiva da tensão E[V] da bateria entre o valor $Z_0 = R_0$ [Ω] "mostrado" pela linha e a sua própria resistência interna R_g , ou seja :

$$e_g^+ = E \cdot \frac{R_0}{R_g + R_0} \qquad (45)$$

UNICAMP

Diagrama "Zig-Zag" para as reflexões na linha.

Como $R_g = R_0$ (o gerador está casado com a linha) a eq. (45) fornece o valor inicial injetado $e_g^+ = E/2\left[V\right]$. O degrau de amplitude $^E/_2$ viaja então pela linha e, depois de T [s], atinge o resistor de carga $R_c = 2R_0$. Aí ocorre então uma reflexão.

A tensão incidente $^E/_2$ multiplicada por $\Gamma_c = 1/3$ fornece então o valor $^E/_6$ para a tensão degrau, que retorna ao gerador depois de T segundos adicionais, ou seja, no instante t = 2T [s]. Neste instante, como $R_g = R_0$ [Ω], $\Gamma_g = 0$, não há mais ondas refletidas.

Diagrama "Zig-Zag" para as reflexões na linha.

Para o diagrama "zig-zag" de corrente o raciocínio é semelhante àquele já feito acima para a tensão. Obviamente, usa-se agora os coeficientes de reflexão de corrente $\Gamma'c$ e $\Gamma'g$. O valor inicial de corrente é $^{E}/2Z_0$, ou seja, a tensão inicial injetada dividida pela impedância característica $Z_0 = R_0$.

Os valores marcados por círculos são os valores de tensão e corrente já acumulados, após cada reflexão. Após cada reflexão, renova-se o valor da soma acumulada.

Finalmente deve-se observar que se Γg (ou $\Gamma' g$) fosse diferente de zero no exemplo dado, os diagramas da Fig. 7 se estenderiam indefinidamente (não terminariam em t = 2T).

UNICAMP

Funções de tensão e de corrente em relação a x (espaço) e t (tempo).

Os diagramas da Fig.7 constituem-se numa ferramenta simples e rápida para se determinar as funções e(x,t1) e i(x,t1) onde t1 é um instante qualquer de interesse. Obtém-se, neste caso, as chamadas distribuições de tensão e de corrente (função só de x) fazendo-se um corte horizontal em t = t1 .

Funções de tensão e de corrente em relação a x (espaço) e t (tempo).

A Fig. 8.a ilustra a distribuição de tensão para t = 0,5 T .
A Fig. 8.b ilustra a distribuição de corrente para t = 1,5 T .

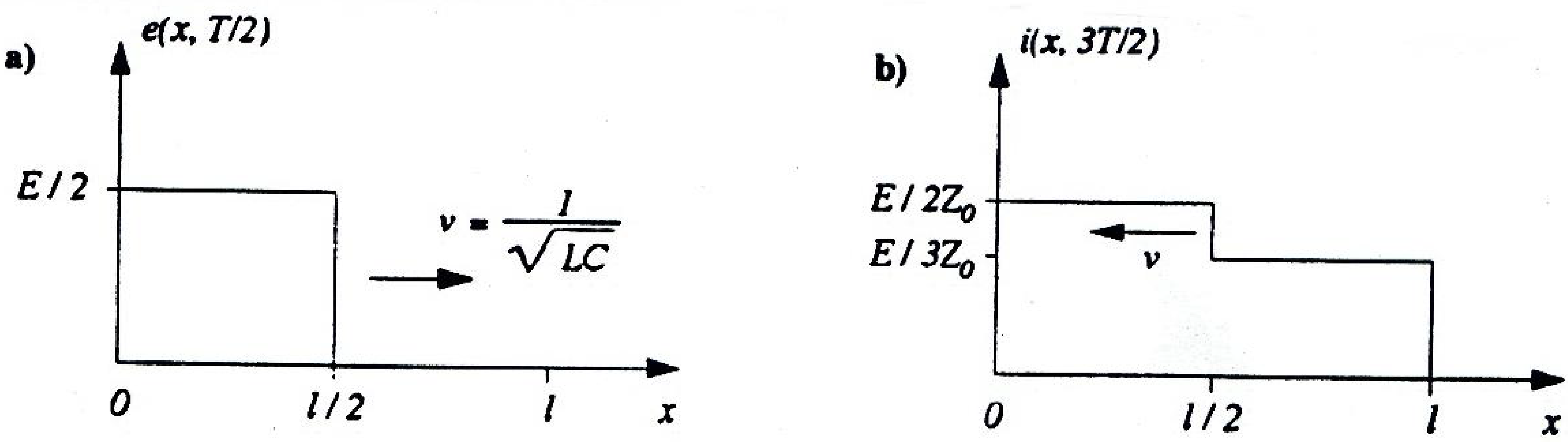
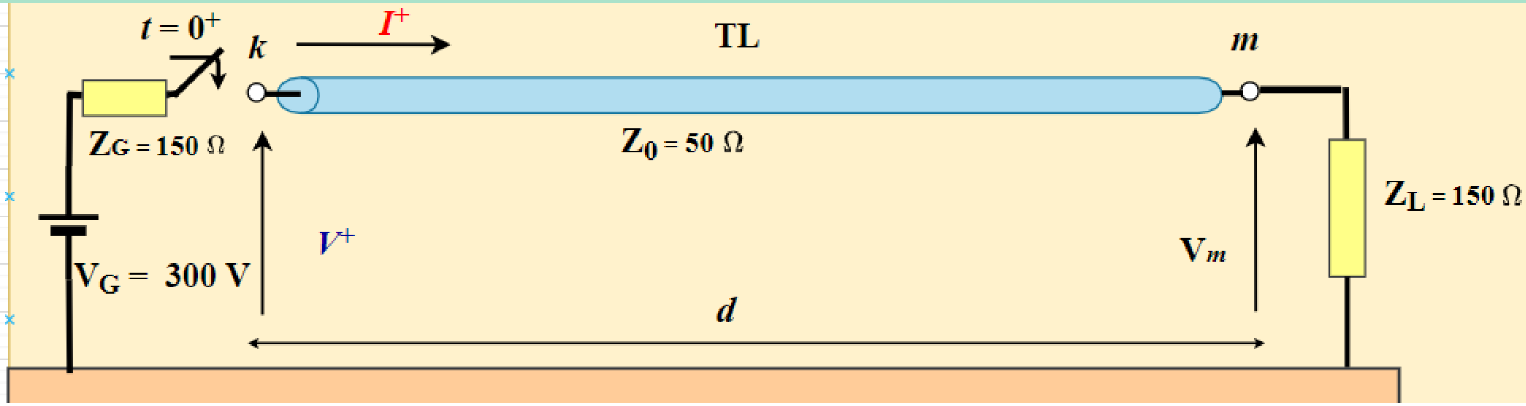


Fig. 8 - Instantâneos de tensão e corrente na linha para o exemplo dado.

Exemplo 1- Exercício da Aula 02

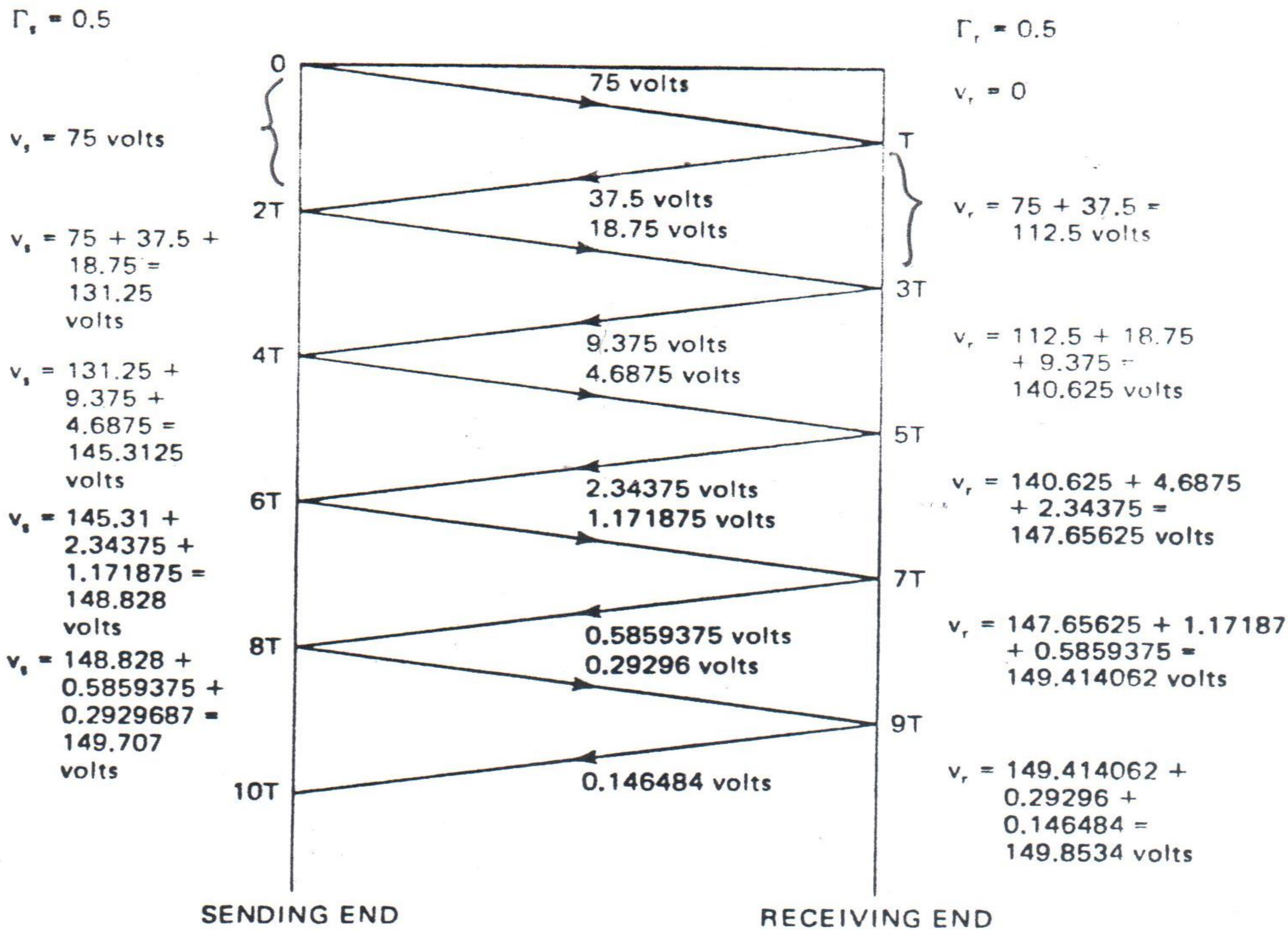


$$\Gamma_L = \frac{150 - 50}{150 + 50} = 0.5$$

$$I^+ = \frac{V_G}{Z_G + Z_0} = \frac{300}{150 + 50} = 1{,}50\ A$$

$$\Gamma_G = \frac{150 - 50}{150 + 50} = 0.5$$

$$V^+ = \frac{Z_0}{Z_G + Z_0} V_G = \frac{50}{150+50} 300 = 75\ V$$


$\Gamma_s = 0.5$
$\Gamma_r = 0.5$
0
75 volts
$v_r = 0$
$v_s = 75$ volts
T
37.5 volts
18.75 volts
2T
$v_r = 75 + 37.5 = 112.5$ volts
$v_s = 75 + 37.5 + 18.75 = 131.25$ volts
3T
9.375 volts
4.6875 volts
4T
$v_r = 112.5 + 18.75 + 9.375 = 140.625$ volts
$v_s = 131.25 + 9.375 + 4.6875 = 145.3125$ volts
5T
2.34375 volts
1.171875 volts
6T
$v_r = 140.625 + 4.6875 + 2.34375 = 147.65625$ volts
$v_s = 145.31 + 2.34375 + 1.171875 = 148.828$ volts
7T
0.5859375 volts
0.29296 volts
8T
$v_r = 147.65625 + 1.17187 + 0.5859375 = 149.414062$ volts
$v_s = 148.828 + 0.5859375 + 0.2929687 = 149.707$ volts
9T
0.146484 volts
10T
$v_r = 149.414062 + 0.29296 + 0.146484 = 149.8534$ volts
SENDING END
RECEIVING END

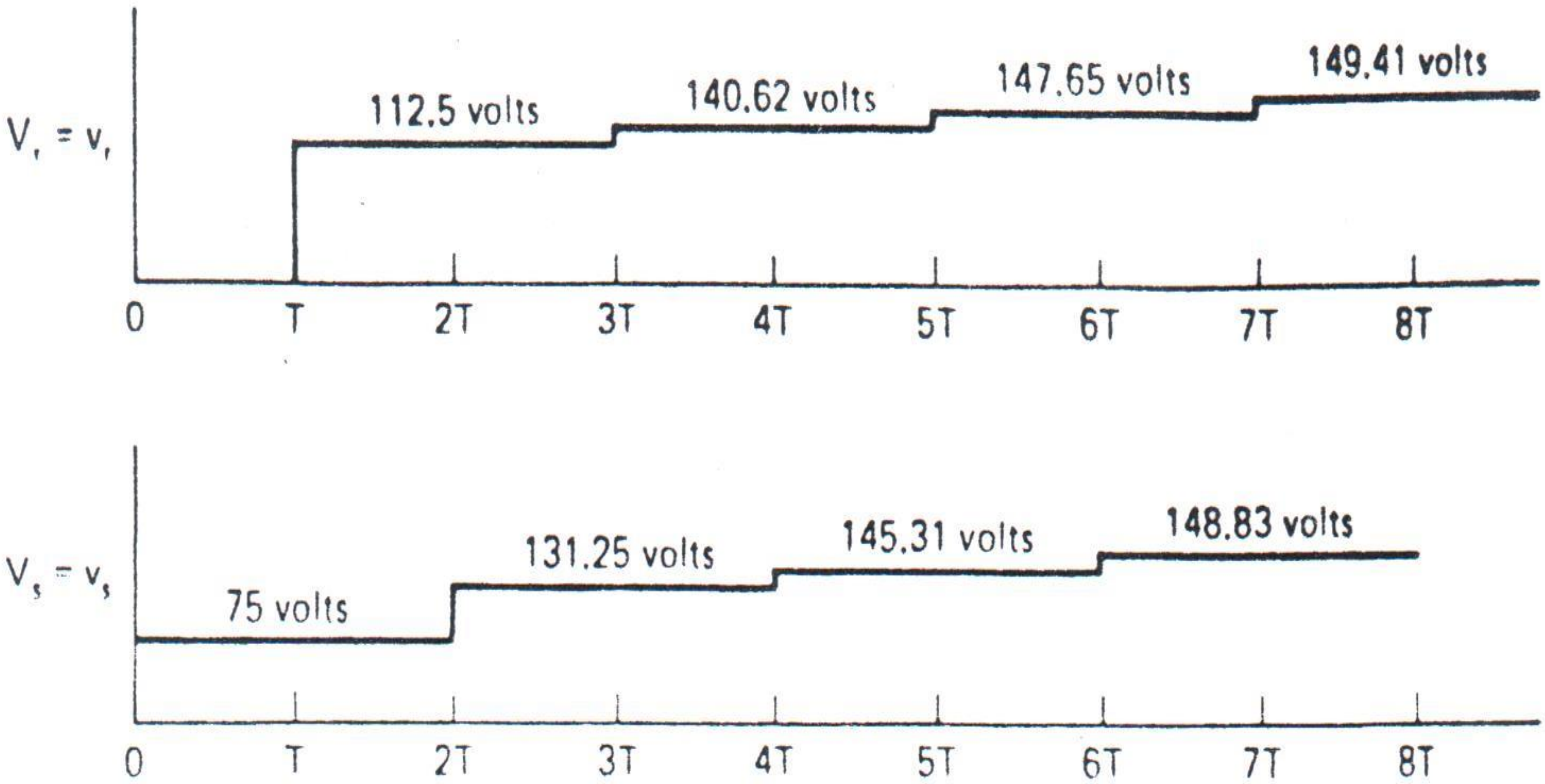


Figure 8-9. V_r and V_s as functions of time.

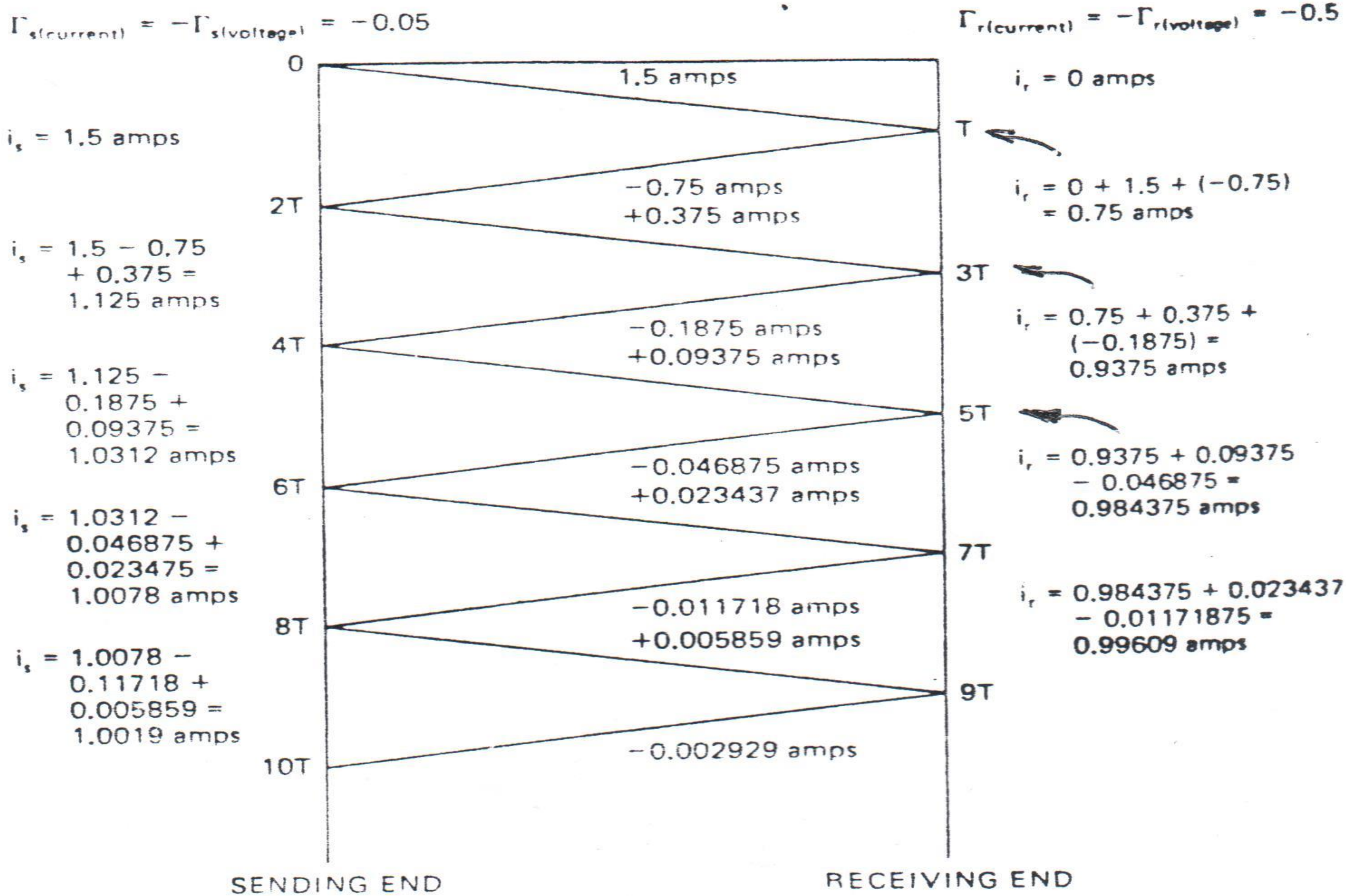


Figure 8-10. Current Bounce Diagram.

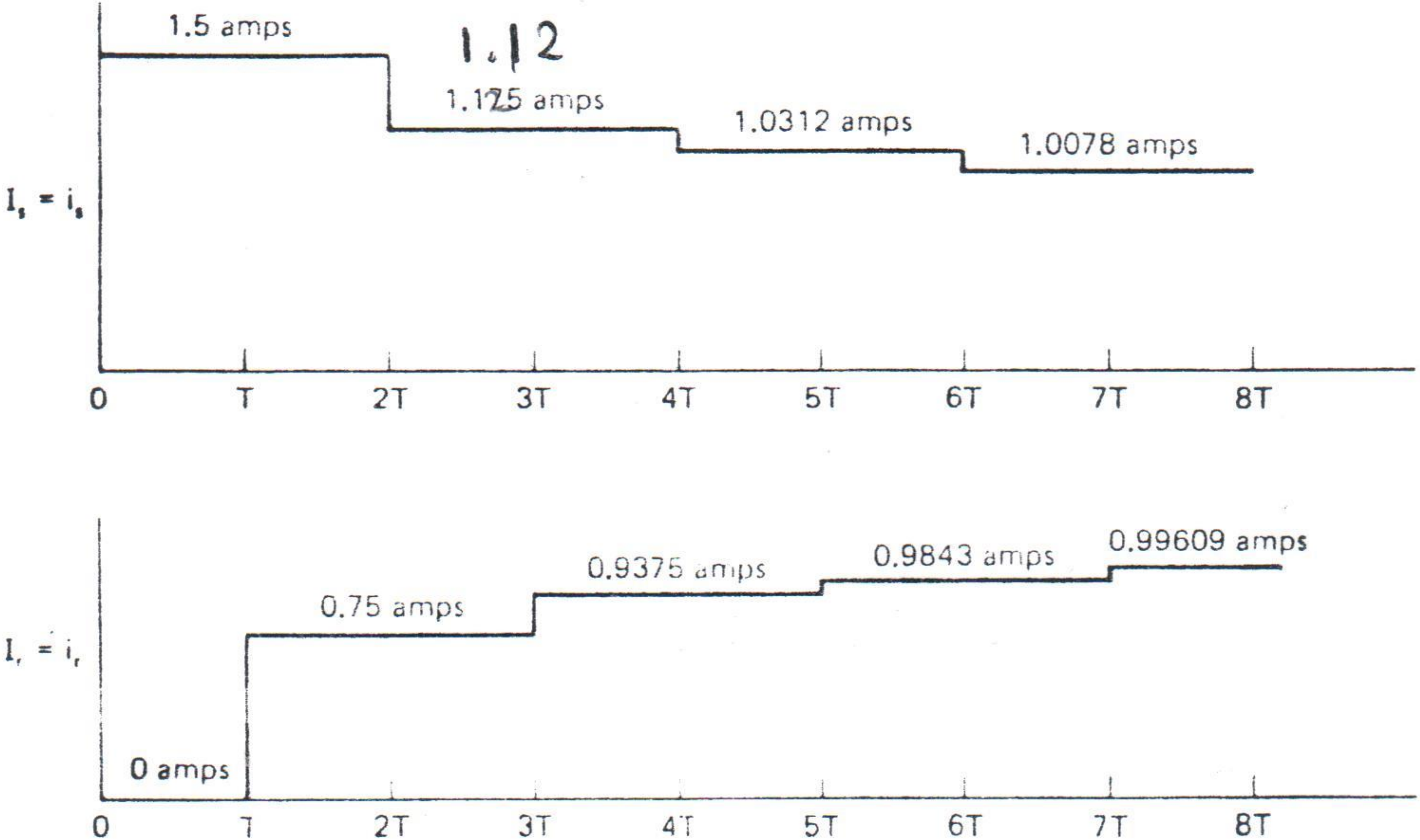
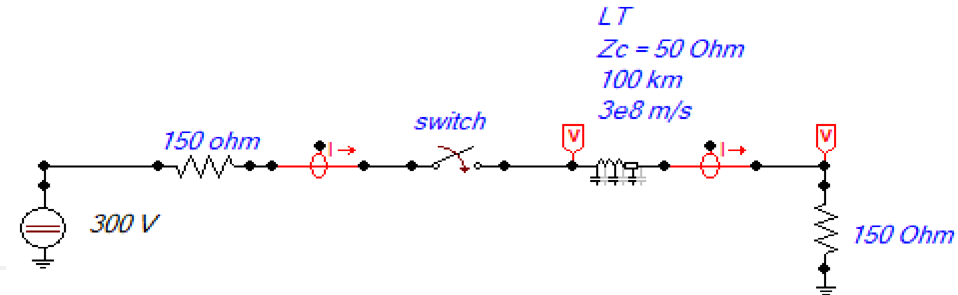
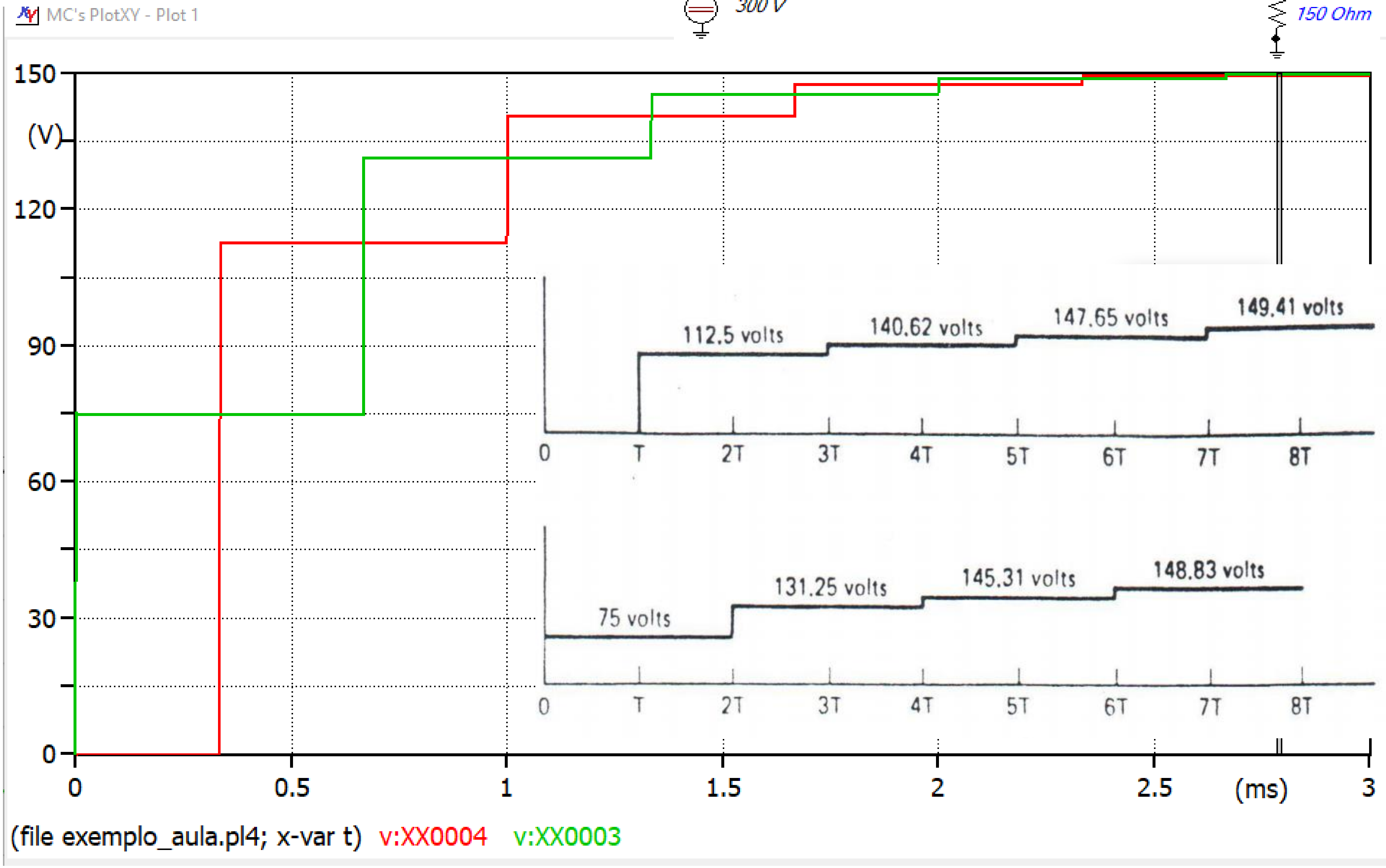
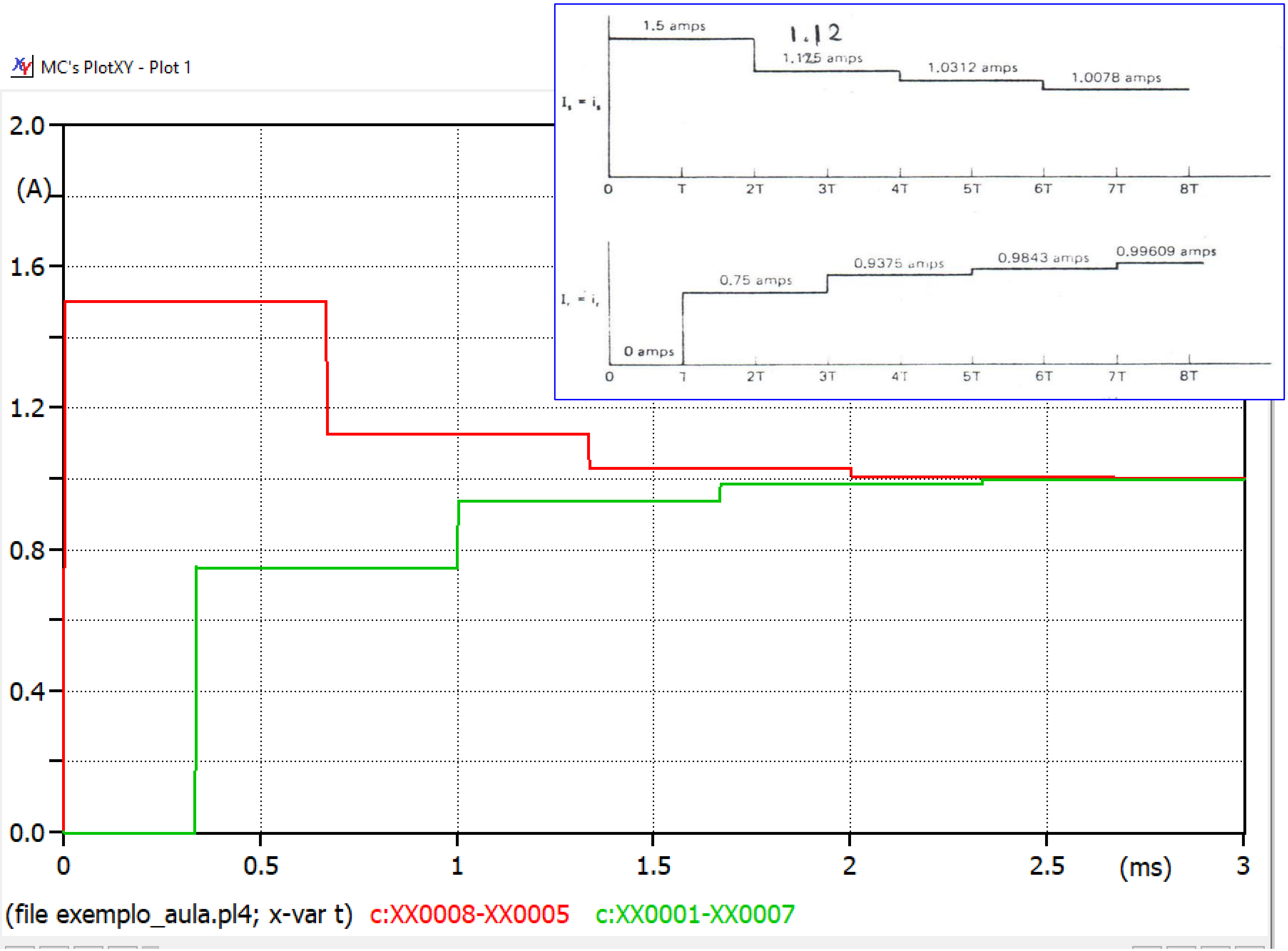


Figure 8-11. I_s and I_r as functions of time.

Comparação com o ATP






MC's PlotXY - Plot 1
2.0
(A)
1.6
1.2
0.8
0.4
0.0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
(ms)
3
(file exemplo_aula.pl4; x-var t)
c:XX0008-XX0005
c:XX0001-XX0007
1.5 amps
1.12
1.125 amps
1.0312 amps
1.0078 amps
0
T
2T
3T
4T
5T
6T
7T
8T
0.75 amps
0.9375 amps
0.9843 amps
0.99609 amps
0 amps