



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO  
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E CONTROLE DE ENERGIA

# **EE 754 – ONDAS GUIADAS**

## **APOSTILA**

**Prof. Dr. José Pissolato Filho**

**Campinas, SP  
2012**

## 2. LINHA DE TRANSMISSÃO

A disciplina EE540 apresentou um modelo eletromagnético, onde variações temporais de cargas e correntes se faziam sentir à distância através de efeitos eletromagnéticos, sendo tais efeitos explicados em termos de campos e ondas eletromagnéticas, e é conhecido como *propagação de ondas eletromagnéticas*. Na transmissão através de fontes eletromagnéticas isotrópicas (que radiam a energia igualmente em todas as direções), e mesmo as antenas altamente diretivas (com propriedades de direcionar a energia radiada), a energia é espalhada por uma vasta área à medida que a onda se propaga. Esta energia não é guiada e a transmissão do sinal entre os pontos transmissor e receptor pode ser ineficiente, para uma transmissão ponto-a-ponto eficiente, essa energia deve ser guiada entre tais pontos.

Neste capítulo estudaremos o guiamento das ondas eletromagnéticas através das *linhas de transmissão*, estruturas que suportam a propagação da onda eletromagnética transversal (TEM), a qual possui campos elétrico e magnético mutuamente perpendiculares e transversais à direção de propagação. Mostraremos que muitas das características da onda TEM guiadas através de linhas de transmissão são iguais àquelas das ondas planas uniformes que se propagam em meios dielétricos ilimitados e que foram detalhadamente estudadas na disciplina EE540.

Três dos tipos mais comuns de estruturas guiantes que suportam ondas TEM são:

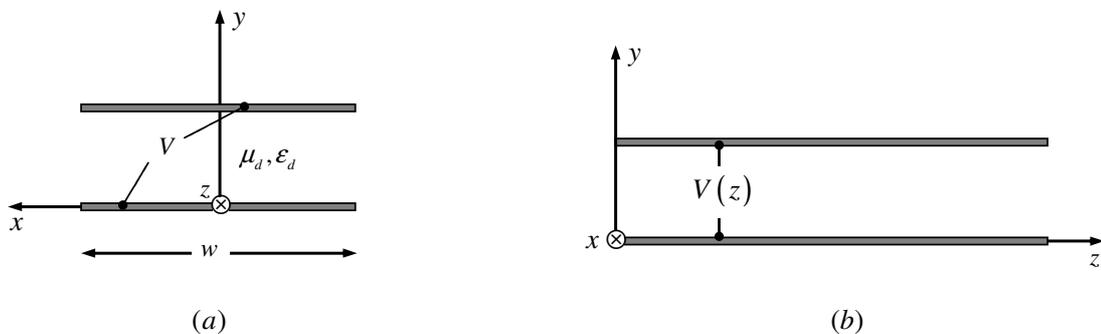
- (a) *linha de transmissão de placas paralelas*: este tipo de linha de transmissão consiste de duas placas condutoras separadas por uma lâmina dielétrica de espessura uniforme. Em frequências de microondas este tipo de linha de transmissão pode ser fabricada usando tecnologia de circuito impresso e são conhecidas como linhas de microfita;
- (b) *linha de transmissão a dois fios*: tal tipo de linha consiste de um par de fios condutores paralelos. Linha de transmissão de potência, linhas telefônicas (vistas em áreas rurais) as linhas das antenas de telhado para recepção de TV são exemplos desse tipo de linha de transmissão;
- (c) *linha de transmissão coaxial*: este tipo de linha consiste de dois cilindros condutores coaxiais – condutor interno maciço e o condutor interno oco, e ambos separados por um meio dielétrico. Tal estrutura apresenta a vantagem de confinar os campos elétrico e magnético na região dielétrica entre os condutores. Exemplos desse tipo de linha são os cabos de TV por assinatura e os cabos de instrumentos de precisão de alta frequência.

Devemos observar que ondas com configurações de campo mais complicadas que as ondas TEM podem se propagar ao longo dos tipos de linha de transmissão descritos acima quando a separação entre os condutores é maior que uma determinada fração do comprimento de onda de operação – tais modos serão detalhadamente estudados no decorrer deste curso.

Iniciaremos este capítulo mostrando que a solução das equações de Maxwell para a onda TEM, suportada por uma estrutura formada por placas paralelas, leva diretamente a um par de equações de propagação que podem se generalizar facilmente para linhas de transmissão de qualquer geometria. Tais equações são escritas em termos de tensão e corrente ao longo da linha e podem ser representadas através de um modelo circuital distribuído, ou seja, em termos de resistência, condutância, indutância e capacitância por unidade de comprimento. No restante do capítulo nos concentraremos no estudo do modelo circuital distribuído obtido, tanto nos domínios do tempo e frequência.

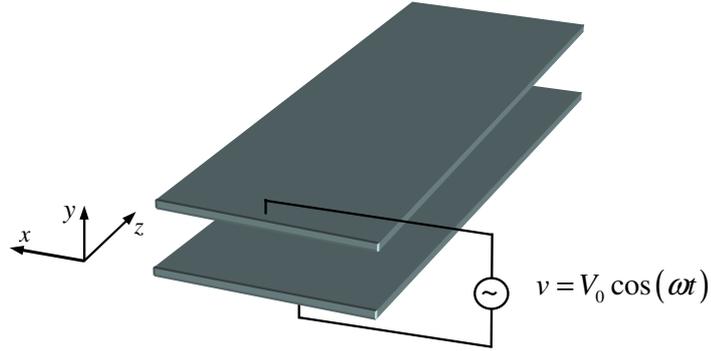
## 2.1. Ondas TEM num Guia de Placas Conductoras Paralelas

Seja o guia construído por placas perfeitamente condutoras separadas por um dielétrico de espessura  $d$  e características  $\mu_d$  e  $\epsilon_d$ , vist em corte transversal na Figura 2.1(a).



**Figura 2.1:** Guia de placas condutoras paralelas. (a) corte transversal; (b) corte longitudinal.

Vamos considerar, sem perda de generalidade, que essa linha é alimentada por uma fonte de tensão  $v(t) = V_0 \cos(\omega t)$ , ilustrado na Figura 2.2. As leis de Faraday e Ampère para a região dielétrica entre as placas (região sem fontes), podem ser escritas, respectivamente, na forma integral:



**Figura 2.1:** Guia de placas condutoras paralelas alimentada com tensão  $v(t)$ .

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}, \quad (2.1)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}. \quad (2.2)$$

Usando como referência o sistema cartesiano de coordenadas mostrado na Figura 2.2, vamos considerar uma onda eletromagnética que se propaga segundo a direção  $z$ . Além disso, vamos assumir que as soluções da onda eletromagnética são do tipo TEM, isto é, possuem, de maneira geral, apenas as componentes dos campos transversais à direção de propagação. Assim, tomando um caminho  $C$  num plano qualquer paralelo ao plano  $x-y$  ( $z = \text{constante}$ ), e assumindo que na solução proposta  $E_z = H_z = 0$  (condição TEM), as Eqs. (2.1) e (2.2) podem ser reescritas, tal que:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (2.3)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (2.4)$$

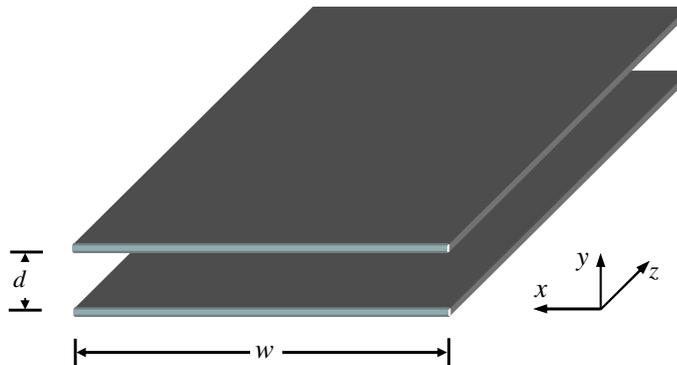
As Eqs. (2.3) e (2.4) indicam que os campos elétrico e magnético, da solução TEM, são *campos conservativos* no plano  $x-y$  e, portanto, análogos aos campos estáticos estudados na disciplina EE521. Assim, devido à característica conservativa do campo elétrico, cada placa para  $z=\text{cte}$ . coincide com uma equipotencial, e conseqüentemente ao medirmos a tensão entre um ponto qualquer na placa inferior e um ponto qualquer sobre a placa superior, com ambos pontos sobre o mesmo plano  $z=\text{cte}$ ., observaremos que a diferença de potencial entre esses dois pontos será sempre

a mesma. Isto não ocorreria se existisse campo magnético axial. Além disso, dos conceitos da eletrostática lembramos que, uma vez aplicada uma diferença de potencial entre dois condutores, surgirá um campo elétrico normal às placas condutoras. Como as placas são consideradas perfeitamente condutoras, analisando as condições de contorno observamos as componentes do campos elétrico tangenciais tangenciais às placas são nulos, isto é,  $E_x = 0$ . Similarmente, a componente de campo magnético normal às placas deve ser nula, isto é,  $H_y = 0$ . Dessa forma, os campos elétrico e magnético da onda eletromagnética propagante ao longo da linha de transmissão de placas paralelas se comportarão transversalmente como campos estáticos, isto é,

$$\mathbf{E} = \hat{y}E_y, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{H} = \hat{x}H_x, \quad (2.6)$$

serão constantes no plano transversal  $x-y$ , contudo, possuirão variação ao longo da direção  $z$ , indicado na Figura 2.1(b) pela dependência da tensão ao longo da linha como função da posição  $z$ . Partindo da discussão anterior, vamos então considerar uma onda TEM polarizada na direção  $y$  e se propagando na direção  $+z$  em um linha de transmissão de placas paralelas, infinitamente longa, de largura  $w$  e separadas por uma distância uniforme  $d$ , como ilustra a Figura 2.3.



**Figura 2.3:** Linha de transmissão de placas condutoras paralelas de largura  $w$  e separadas por uma distância  $d$ .

Para uma excitação harmônica, os campos elétrico e magnético, solução da equação homogênea de Helmholtz, para onda de propagando na direção  $+z$ , desprezando-se os efeitos de borda, (assumindo  $w$  suficientemente grande), serão:

$$\mathbf{E} = \hat{y}E_y = \hat{y}E_0 \exp(-\gamma z), \quad (2.7)$$

$$\mathbf{H} = \hat{x}H_x = -\hat{z} \frac{E_0}{\eta_d} \exp(-\gamma z), \quad (2.8)$$

onde  $\gamma$  e  $\eta_d$  são a constante de propagação da onda TEM na linha e a impedância intrínseca da linha, respectivamente. Assumindo placas perfeitamente condutoras e dielétricos não-dissipativos, temos que:

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{\mu_d\epsilon_d}, \quad (2.9)$$

$$\eta_d = \sqrt{\frac{\mu_d}{\epsilon_d}}. \quad (2.10)$$

As condições de contorno nas interfaces dielétrico/paredes condutoras, isto é, em  $y=0$  e  $y=d$ , são:

$$E_t = 0, \quad (2.11)$$

$$H_n = 0, \quad (2.12)$$

as quais são devidamente satisfeitas, uma vez que  $E_x = E_z = 0$  e  $H_y = 0$ . Na interface  $y=0$  – placa inferior (*lower – l*) temos que:  $\hat{n} = \hat{y}$ . Aplicando as condições de contorno dielétrico/conductor perfeito, temos:

$$\hat{y} \cdot \mathbf{D} = \rho_{sl}, \quad (2.13)$$

$$\hat{y} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{sl}, \quad (2.14)$$

e, assim:

$$\rho_{sl} = \epsilon_d E_y = \epsilon_d E_0 \exp(-j\beta z), \quad (2.15)$$

$$\mathbf{J}_{sl} = -\hat{z}H_x = \hat{z} \frac{E_0}{\eta_d} \exp(-j\beta z). \quad (2.16)$$

Na interface  $y=d$  – placa superior (*upper – u*) temos que:  $\hat{n} = -\hat{y}$ , logo:

$$-\hat{y} \cdot \mathbf{D} = \rho_{su}, \quad (2.17)$$

$$-\hat{y} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{Su}, \quad (2.18)$$

portanto:

$$\rho_{Su} = -\epsilon_d E_y = -\epsilon_d E_0 \exp(-j\beta z), \quad (2.15)$$

$$\mathbf{J}_{Su} = \hat{z} H_x = -\hat{z} \frac{E_0}{\eta_d} \exp(-j\beta z). \quad (2.16)$$

Os campos fasoriais  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  nas Eqs. (2.7) e (2.8), respectivamente, devem satisfazer às equações rotacionais de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}, \quad (2.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E}. \quad (2.18)$$

Como  $\mathbf{E} = \hat{y}E_y$  e  $\mathbf{H} = \hat{x}H_x$  possuem apenas variação segundo a direção  $z$ , então:

$$\frac{dE_y}{dz} = j\omega\mu_d H_x, \quad (2.19)$$

$$\frac{dH_x}{dz} = j\omega\epsilon_d E_y. \quad (2.20)$$

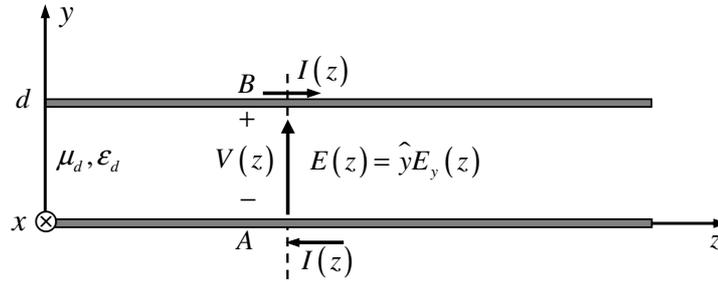
Integrando a Eq. (2.19) no intervalo  $0 \leq y \leq d$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \int_0^d E_y dy &= j\omega\mu_d \int_0^d H_x dy. \\ \frac{dV(z)}{dz} &= j\omega\mu_d J_{Su}(z)d = j\omega \left( \mu_d \frac{d}{w} \right) [J_{Su}(z)w], \\ \frac{dV(z)}{dz} &= j\omega LI(z), \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde,

$$V(z) = \int_0^d E_y dy = -E_y(z)d,$$

é a diferença de potencial, ou tensão, entre as placas inferior e superior, indicada na Figura 2.4. A corrente total que flui na direção  $+z$  na placa superior é dada por:



$$V(z) = V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

**Figura 2.4:** Tensão e corrente na linha de transmissão de placas paralelas em um ponto  $z$ .

$$I(z) = \int_0^w \mathbf{J}_{su} \cdot dx \hat{x} = J_{Su}(z) w,$$

onde,

$$L = \mu_d \frac{d}{w} \text{ [H/m]}, \quad (2.22)$$

a indutância por unidade de comprimento da linha de transmissão de placas paralelas.

De forma similar, integrando a Eq. (2.20) no intervalo  $0 \leq x \leq w$ , temos:

$$\frac{d}{dz} \int_0^w H_x dx = j\omega \epsilon_d \int_0^w E_y dx,$$

ou,

$$\begin{aligned} -\frac{dI(z)}{dz} &= -j\omega \epsilon_d E_y(z) w = j\omega \left( \epsilon_d \frac{w}{d} \right) [-E_y(z) d], \\ -\frac{dI(z)}{dz} &= j\omega C V(z), \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde,

$$C = \epsilon_d \frac{w}{d} \text{ [F/m]}, \quad (2.24)$$

é a capacitância por unidade de comprimento da linha de transmissão de placas paralelas.

As Eqs. (2.21) e (2.23) constituem o par de equações harmônicas, relacionando os fasores tensão e corrente ao longo da linha de transmissão, como ilustra a Figura 2.4. Essas equações podem ser combinadas para gerar equações diferenciais de segunda ordem para tensão ou corrente, isto é:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} + \omega^2 LCV(z) = 0, \quad (2.25)$$

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} + \omega^2 LCI(z) = 0. \quad (2.26)$$

As soluções das Eqs. (2.25) e (2.26), supondo as placas paralelas infinitas, são ondas propagantes na direção  $+z$  na forma:

$$V(z) = V_0 \exp(-j\beta z), \quad (2.27)$$

$$I(z) = I_0 \exp(-j\beta z), \quad (2.28)$$

onde,

$$V_0 = -E_0 d, \quad (2.29)$$

$$I_0 = -\frac{E_0}{\eta_d} = H_0 w, \quad (2.30)$$

A constante de fase e a impedância característica da linha são, respectivamente:

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_d \epsilon_d} \quad [\text{rad/m}], \quad (2.31)$$

$$Z_0 = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V_0}{I_0} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{d}{w} \eta_d \quad [\Omega]. \quad (2.32)$$

A velocidade de fase da onda na linha é:

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_d \epsilon_d}} \quad [\text{m/s}]. \quad (2.33)$$

## 2.2. Linhas de Transmissão de Placas Paralelas Dissipativas

Até o momento, em todas as nossas considerações a respeito das linhas de transmissão de placas paralelas, assumimos que tais linhas não apresentavam perdas. Porém, em situações reais, as perdas em LT's podem surgir devido a duas causas: o meio dielétrico que separa as placas pode ter uma tangente de perdas não-nula ou as placas podem não ser perfeitamente condutoras. Para caracterizar esses dois efeitos definiremos dois novos parâmetros:  $G$ , a condutância por unidade de comprimento entre as placas condutoras, e  $R$ , a resistência por unidade de comprimento das *duas* placas condutoras. Lembrando os conceitos da eletrostática, a condutância entre os dois condutores separados por um dielétrico com permissividade  $\epsilon_d$  e uma condutividade equivalente  $\sigma_d$ , ilustrada

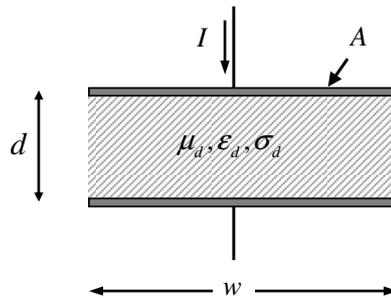


Figura 2.5: Linha de transmissão de placas paralelas – corte transversal.

na Figura 2.5, pode ser facilmente determinada quando a capacitância entre os dois condutores é conhecida. Assim,

$$G = \frac{\sigma_d}{\epsilon_d} C. \quad (2.34)$$

Usando a Eq. (2.24), temos:

$$G = \sigma_d \frac{w}{d} \text{ [S/m]}. \quad (2.35)$$

Se as placas condutoras têm condutividade  $\sigma_c$  finita, então, pela *lei de Ohm* na forma pontual temos que:

$$\mathbf{J} = \sigma_c \mathbf{E},$$

indicando a dissipação de potência nas placas. Considerando que  $\mathbf{J} = \hat{z}J_z$ , neste caso existirá a presença de uma componente axial não-nula do campo elétrico,  $\mathbf{E}_z = \hat{z}E_z$  e, portanto, *a onda deixa de ser puramente TEM.*

A impedância total (EE540) em um comprimento  $\Delta z$ , de uma placa, pode ser calculada como sendo:

$$Z_i = Z_s \frac{\Delta z}{w}, \quad (2.35)$$

onde

$$Z_s = \frac{E_z}{J_{Su}} = \frac{E_z}{H_x} = R_s + jX_s, \quad (2.36)$$

e,

$$R_s = X_s = \frac{1}{\sigma_c \delta} = \sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\sigma_c}}. \quad (2.37)$$

A impedância por unidade de comprimento em uma única placa é:

$$\frac{Z_s}{w} = \frac{R_s}{w} + j \frac{X_s}{w} = \frac{Z_i}{\Delta z}. \quad (2.37)$$

A impedância total por unidade de comprimento nas duas placas é:

$$\frac{2Z_s}{w} = \frac{2R_s}{w} + j \frac{2X_s}{w} = R + jX' \quad [\Omega/m], \quad (2.38)$$

onde

$$R = \frac{2R_s}{w} \quad [\Omega/m], \quad (2.39)$$

é a resistência total por unidade de comprimento, responsável pelas perdas ôhmicas nas placas.

Convém ainda, observar que para bons condutores  $X' \ll \omega L$ , visto que  $\frac{\sigma_c}{\omega \epsilon_c} \gg 1$ . Além disso, da

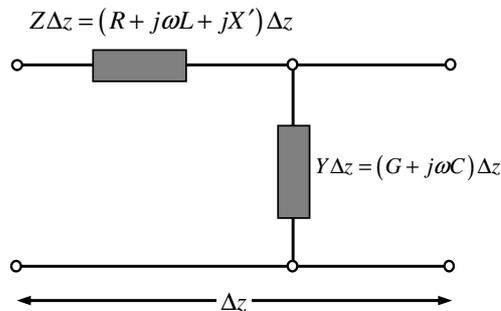
Eq. (2.39) observamos que a resistência total da linha é diretamente proporcional à frequência de operação, isto é:

$$R = \frac{2}{w} \sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\sigma_c}} = \frac{2}{w} \sqrt{\frac{\pi \mu_c}{\sigma_c}} \sqrt{f},$$

$$R = K \sqrt{f},$$

onde  $K = \frac{2}{w} \sqrt{\frac{\pi \mu_c}{\sigma_c}}$  é uma constante.

A partir da modelagem acima, podemos representar uma seção de comprimento  $\Delta z$  segundo o modelo circuitual ilustrado na Figura 2.6.



**Figura 2.6:** Modelo circuitual de uma seção de linha de transmissão de placas paralelas de comprimento  $\Delta z$ .

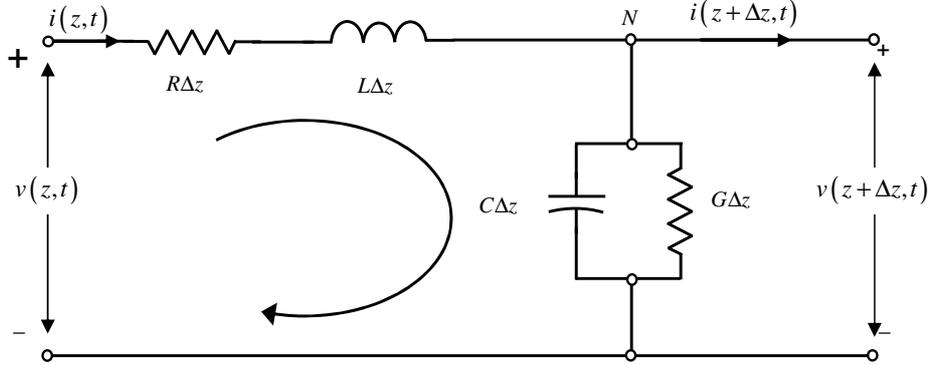
## 2.3. Equações Gerais da Linha de Transmissão

### 2.3.1. Parâmetros Distribuídos

A partir da modelagem feita nas seções anteriores, a Figura 2.7 mostra o modelo de linha de transmissão (LT) baseado em parâmetros distribuídos, onde as grandezas elétricas  $R$  (ambos condutores),  $G$  (ambos condutores),  $L$  e  $C$  são tomadas por unidade de comprimento. Aplicando a lei de Kirchoff das tensões na malha da Figura 2.7, temos:

$$v(z, t) - R\Delta z i(z, t) - L\Delta z \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} - v(z + \Delta z, t) = 0,$$

$$-\frac{v(z+\Delta z,t)-v(z,t)}{\Delta z} = R i(z,t) + L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}.$$



**Figura 2.7:** Circuito equivalente de comprimento diferencial  $\Delta z$  de uma linha de transmissão de dois condutores ou TEM – LT.

Fazendo  $\Delta z \rightarrow 0$ , temos:

$$-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = R i(z,t) + L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}. \quad (2.40)$$

“Existe queda de tensão com a distância  $z$  na linha devido à passagem da corrente nos elementos distribuídos  $R$  e  $L$  em série.”

Similarmente, aplicando a lei de Kirchoff das correntes no nó  $N$ , temos:

$$i(z,t) - G\Delta z v(z+\Delta z,t) - C\Delta z \frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t} - i(z+\Delta z,t) = 0,$$

Dividindo por  $\Delta z$  e fazendo  $\Delta z \rightarrow 0$ , temos:

$$-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = Gv(z,t) + C \frac{\partial v(z,t)}{\partial t}, \quad (2.41)$$

O par de equações diferenciais de primeira ordem (2.40) e (2.41), são chamadas de *equações gerais das LT's* ou também *equações do telegrafista*. Contudo, é possível obtermos as equações diferenciais da linha, expressas apenas em tensão ou apenas em corrente. Para a tensão, por

exemplo, pode-se diferenciar (2.40) em relação à  $z$  e a (2.41) em relação à  $t$ , a fim desacoplar as equações e eliminar a variável  $i(z, t)$ , obtendo-se:

$$-\frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} = R \frac{\partial i(z, t)}{\partial z} + L \frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial z \partial t}, \quad (2.42)$$

$$-\frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial z \partial t} = G \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} + C \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial t^2}. \quad (2.43)$$

Substituindo (2.43) em (2.42) e usando (2.41), rearranjando termos e omitindo a dependência  $(z, t)$  para melhor visualização, temos:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (RC + LG) \frac{\partial v}{\partial t} - RGv = 0. \quad (2.44)$$

Da mesma maneira, pode-se obter uma equação diferencial parcial só em corrente, isto é:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - (RC + LG) \frac{\partial i}{\partial t} - RGi = 0, \quad (2.45)$$

As equações (2.44) e (2.45) são equações duais e identificadas como *equações diferenciais parciais de onda*.

### 2.3.2. Linha não-Dissipativa

Consideramos uma *linha não-dissipativa*, também chamada de *ideal* ou *sem perdas*, onde  $R = G = 0$ . Nessa situação as Eqs. (2.44) e (2.45) se simplificam tal que:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (2.46)$$

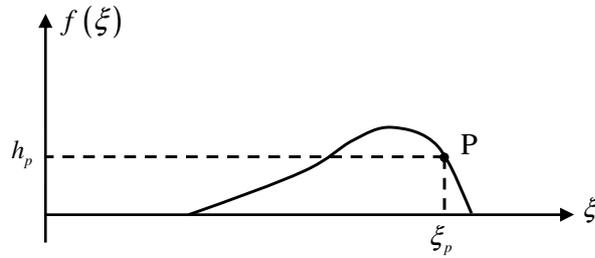
$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0. \quad (2.47)$$

Podemos mostrar, facilmente, que (2.46) e (2.47) admitem solução do tipo  $f(z \pm t/\sqrt{LC})$ . Para tanto, substituindo essa função em (2.46) ou (2.47), temos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(z \pm t/\sqrt{LC}) - LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(z \pm t/\sqrt{LC}) = \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial z} f(z \pm t/\sqrt{LC}) \right] - LC \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} f(z \pm t/\sqrt{LC}) \right] = \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left[ f'(z \pm t/\sqrt{LC}) \frac{\partial}{\partial z} (z \pm t/\sqrt{LC}) \right] - LC \frac{\partial}{\partial t} \left[ f'(z \pm t/\sqrt{LC}) \frac{\partial}{\partial t} (z \pm t/\sqrt{LC}) \right] = \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left[ f'(z \pm t/\sqrt{LC}) \right] - LC (\pm 1/\sqrt{LC}) \frac{\partial}{\partial t} f'(z \pm t/\sqrt{LC}) = \\ & f''(z \pm t/\sqrt{LC}) - LC (\pm 1/\sqrt{LC})^2 f''(z \pm t/\sqrt{LC}) = 0. \end{aligned}$$

Obs: aqui  $f'(\cdot)$  significa a derivada da função  $f$  em relação ao argumento composto  $(z \pm t/\sqrt{LC})$ .

Examinemos, agora, o comportamento de uma onda (perturbação)  $f(z - t/\sqrt{LC})$  de formato arbitrário propagando-se em uma linha de transmissão, conforme ilustrado na Figura 2.8, onde  $\xi = z - t/\sqrt{LC}$ .



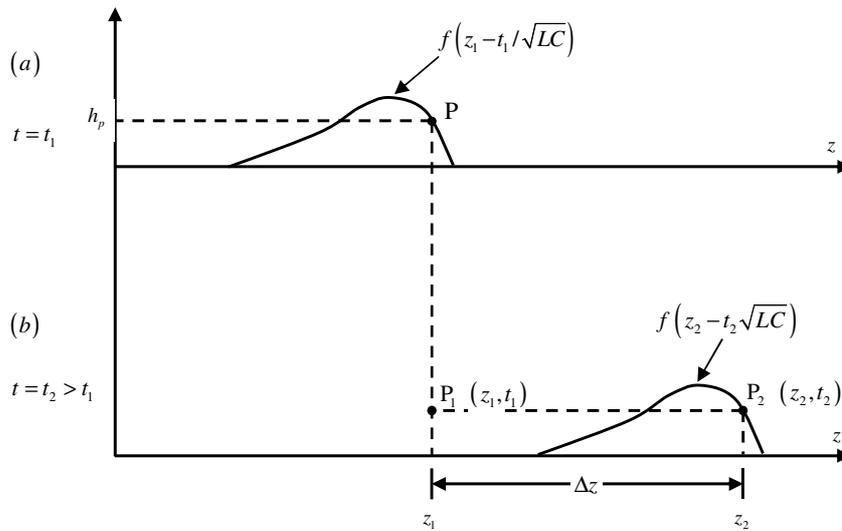
**Figura 2.8:** Onda  $f(\xi)$  lançada na linha de transmissão a fim de se observar seu comportamento ao longo da linha.

Ao acompanharmos a propagação do ponto  $P$  ao longo da direção  $+z$ , como ilustrado na Figura 2.9, observamos que basta fazermos com que o argumento correspondente,  $f(\xi_p) = h_p$ , se

mantenha constante todo o tempo, isto define a trajetória de P, que será dada pela equação:  $\xi_p = z_p - t_p / \sqrt{LC}$ , ou seja:

$$z_1 - t_1 / \sqrt{LC} = z_2 - t_2 / \sqrt{LC} = \xi_p = \text{cte},$$

$$z_2 - z_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{LC}}.$$



**Figura 2.9:** Propagação de uma onda  $f(z - t/\sqrt{LC})$ , se propagando no sentido  $+z$ . (a) onda no instante  $t_1$ ; (b) onda no instante  $t_2 > t_1$ .

$$\frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Fazendo  $\Delta t \rightarrow 0$ , vemos que o pulso se propaga com uma *velocidade de propagação*  $u$ , tal que:

$$u = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ [m/s]}. \quad (2.48)$$

Analogamente, a perturbação (onda)  $f(z+t/\sqrt{LC})$  se propaga na direção  $-z$ , com velocidade  $u = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Temos na linha, portanto, ondas de tensão e corrente na forma:

$$v(z,t) = V^\pm(z \pm t/\sqrt{LC}),$$

$$i(z,t) = I^\pm(z \pm t/\sqrt{LC}),$$

onde o sinais sobrescrito (+, -) significam propagação no sentido (-, +). Assim, para uma onda  $V^+$  deve existir uma onda  $I^+$ , tal que:

$$I^+ = \frac{V^+}{K^+}.$$

Aqui,  $K^+$  é uma constante com dimensões de ohms. Derivando a equação anterior em relação à  $t$ ,

$$\frac{\partial I^+}{\partial t}(z-t/\sqrt{LC}) = \frac{1}{K^+} \frac{\partial V^+}{\partial t}(z-t/\sqrt{LC}),$$

e usando (2.40), com  $R=0$ , temos:

$$-\frac{\partial V^+}{\partial z}(z-t/\sqrt{LC}) = L \left[ \frac{1}{K^+} \frac{\partial V^+}{\partial t}(z-t/\sqrt{LC}) \right],$$

$$-\left[ V^+(z-t/\sqrt{LC}) \right]' = L \left[ -\frac{1}{K^+ \sqrt{LC}} \frac{\partial V^+}{\partial t}(z-t/\sqrt{LC}) \right],$$

$$K^+ = \frac{L}{\sqrt{LC}}, \quad K^+ = Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = R_0 \quad [\Omega]$$

$$I^+ = \frac{V^+}{Z_0}. \quad (2.49)$$

A constante  $K^+$  é nada mais do que a *impedância característica*,  $Z_0$ , da linha sem perdas, já intrduzida em (2.32). De forma similar, para uma onda  $V^-$  deve existir uma onda  $I^-$ , tal que:

$$\Gamma^- = \frac{V^-}{K^-}.$$

Derivando em relação à  $t$  e usando (2.40), com  $R = 0$ , temos:

$$K^- = -Z_0,$$

logo,

$$\Gamma^-(z+t/\sqrt{LC}) = -\frac{1}{Z_0} V^-(z+t/\sqrt{LC}). \quad (2.50)$$

Assumindo que uma *solução geral* admite a combinação das soluções (+) e (-), podemos escrever:

$$v(z,t) = V^+(z-t/\sqrt{LC}) + V^-(z+t/\sqrt{LC}), \quad (2.51a)$$

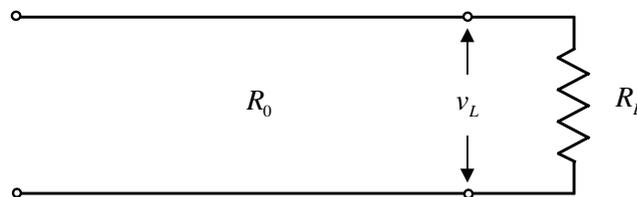
$$i(z,t) = I^+(z-t/\sqrt{LC}) + I^-(z+t/\sqrt{LC}), \quad (2.51b)$$

$$i(z,t) = \frac{1}{Z_0} [V^+(z-t/\sqrt{LC}) - V^-(z+t/\sqrt{LC})], \quad (2.51c)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (2.51d)$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (2.51e)$$

Consideremos, agora, uma LT sem perdas, terminada numa carga puramente resistiva,  $Z_L = R_L$ , mostrada na Figura 2.10.



**Figura 2.10:** Linha de transmissão sem perdas carregada com carga  $Z_L = R_L$ .

A corrente na carga ( $i_L$ ) será:

$$i_L = I_L^+ + I_L^- = \frac{1}{R_0}(V_L^+ - V_L^-),$$

Definimos a seguir a impedância ao longo da LT como sendo,

$$Z(z, t) = \frac{v(z, t)}{i(z, t)} = \frac{V^+(z-ut) + V^-(z+ut)}{\left(\frac{1}{R_0}\right)(V^+(z-ut) - V^-(z+ut))}. \quad (2.52a)$$

Na carga,

$$Z(z_{carga}, t) = R_L = \frac{V_L^+ + V_L^-}{\left(\frac{1}{R_0}\right)(V_L^+ - V_L^-)},$$

$$\frac{R_L}{R_0} = \frac{V_L^+ + V_L^-}{V_L^+ - V_L^-}.$$

A partir da equação anterior definiremos o parâmetro denominado *coeficiente de reflexão*,  $\Gamma$ , ao longo da linha de transmissão, como a razão,

$$\Gamma(z, t) = \frac{V^-(z+ut)}{V^+(z-ut)}. \quad (2.52b)$$

Combinando (2,52a) e (2.52b),

$$\frac{R_0}{Z(z, t)} = \frac{V^+ - V^-}{V^+ + V^-} + 1 - 1,$$

$$\frac{R_0}{Z(z, t)} = \frac{2V^+}{V^+ + V^-} - 1 = \frac{2}{1 + (V^-/V^+)} - 1,$$

$$\frac{R_0}{Z(z, t)} = \frac{2}{1 + \Gamma(z, t)} - 1,$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{R_0}{Z(z, t)} + 1 \right) = \frac{1}{1 + \Gamma(z, t)},$$

$$1 + \Gamma(z, t) = \frac{2Z(z, t)}{Z(z, t) + R_0},$$

$$\Gamma(z, t) = \frac{Z(z, t) - R_0}{Z(z, t) + R_0}, \quad (2.53a)$$

A Eq. (2.53a) mostra o coeficiente de reflexão em função da impedância ao longo da LT. Particularizando (2.53a) na carga, temos:

$$\Gamma_L = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}. \quad (2.53b)$$

O coeficiente de reflexão, definido em (2.52b), (2.53a) existe em uma determinada faixa de valores, que pode ser determinada a partir das duas situações limites para a impedância de uma linha de transmissão: (a) linha curto circuitada em  $z = z_1$ , ou seja,  $Z(z_1, t) = 0$ ; (b) linha aberta em  $z = z_1$ , ou seja,  $Z(z_1, t) = \infty$ . Levando tais condições em (2.53a) teremos, respectivamente:  $\Gamma(z_1, t) = -1$  e  $\Gamma(z_1, t) = +1$ . Dessa forma, as faixas de valores para o coeficiente de reflexão são:

$$-1 \leq \Gamma(z, t) \leq +1.$$

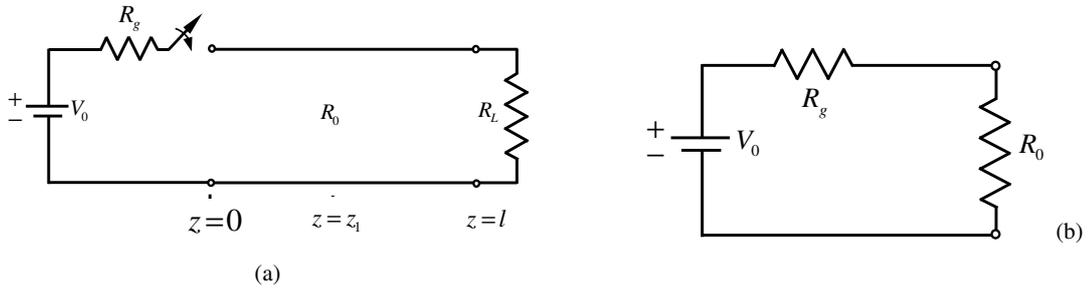
Observamos que se em algum ponto  $z = z_1$ , temos  $Z(z_1, t) = R_0$ , nesse ponto,  $\Gamma(z_1, t) = 0$ . Se  $R_L = R_0$ , temos  $\Gamma_L = 0$ , e chamamos esta situação de carga casada com a LT, ou simplesmente de “*carga casada*”.

O coeficiente de reflexão em (2.52b) foi definido como a razão das tensões refletida e transmitida, poderíamos, porém, ter adotado as correntes em lugar das tensões, assim:

$$\Gamma'(z, t) = \frac{I^-(z+ut)}{I^+(z-ut)}.$$

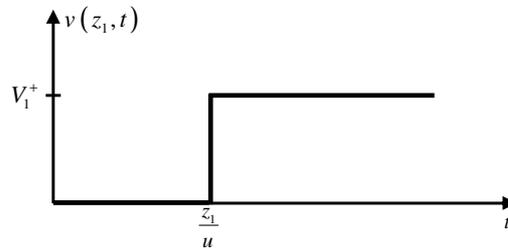
De (2.49) e (2.50), obtemos facilmente que os coeficientes de tensão,  $\Gamma(z, t)$ , e corrente,  $\Gamma'(z, t)$ , se relacionam por:  $\Gamma'(z, t) = -\Gamma(z, t)$ .

Analisemos, agora, o caso simples da Figura 2.11, onde uma fonte DC é aplicada em uma linha de transmissão (LT) com carga  $R_L = R_0$ .



**Figura 2.11:** (a) Chave fechada para  $t = 0$ ; (b) Representação elétrica da LT no instante  $t = 0$ .

Quando  $t = 0$  a linha da Figura 2.11(a) pode ser representada conforme ilustrado na Figura 2.11(b). A LT nesse instante se “apresenta” para a fonte como se fosse infinita, portanto, a impedância “sentida” pela onda lançada na LT é a impedância característica.



**Figura 2.12:** Tensão em  $z = z_1$ .

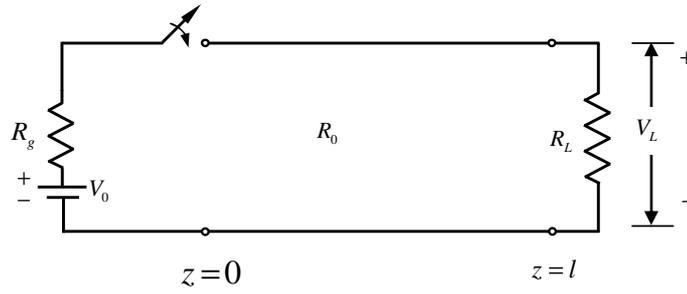
A tensão injetada na LT na entrada,  $z = 0$ , no tempo  $t = 0$ , e que viaja na direção  $+z$  com uma velocidade  $u = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , é calculada através do divisor de tensão:

$$V_1^+ = \frac{R_0}{R_0 + R_g} V_0,$$

A magnitude da onda de corrente correspondente dada por:

$$I_1^+ = \frac{V_1^+}{R_0} = \frac{V_0}{R_0 + R_g}.$$

Se traçarmos o gráfico da tensão na posição  $z = z_1$  como função do tempo, obteremos a função degrau ilustrado na Figura 2.12. A corrente no ponto  $z = z_1$  apresenta a mesma forma, porém com o valor  $I_1^+$  calculado acima.



**Figura 2.13:** Fonte DC aplicada a uma LT – caso geral sem perdas.

Quando as ondas de tensão e corrente atingem a carga, em  $z=l$ , não há reflexão pois  $\Gamma_L=0$ . O estado estacionário fica, assim, estabelecido e a linha inteira fica carregada com uma tensão igual a  $V_1^+$ . Se, contudo, tanto  $R_g$  e  $R_L$  são diferentes de  $R_0$ , como na Figura 2.13, a situação é mais complicada. Assim, para  $t=0$  a fonte envia uma tensão de magnitude,

$$V_1^+ = \frac{R_0}{R_0 + R_g} V_0, \quad (2.54)$$

na direção  $+z$  com velocidade  $u=1/\sqrt{LC}$ . Como no caso anterior, pulso  $V_1^+$  não “conhece” o comprimento da linha e nem a carga e, portanto, se propaga como se a linha fosse infinita; quando  $t=T=l/u$ , onde  $T$  é o tempo de trânsito da LT, esta onda atinge a carga, no ponto  $z=l$ . Aqui, como  $R_L \neq R_0$ , surge uma onda refletida que viajará na direção  $-z$  com magnitude,

$$V_1^- = \Gamma_L V_1^+, \quad (2.55)$$

onde  $\Gamma_L$ , o coeficiente de reflexão na carga, é dado por:

$$\Gamma_L = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}. \quad (2.56)$$

A onda refletida na carga atinge a entrada da linha no tempo  $t=2T$ , onde é refletida, pois  $R_g \neq R_0$ .

Uma nova onda com magnitude  $V_2^+$ , viajando na direção  $+z$ , surge com amplitude

$$V_2^+ = \Gamma_g V_1^- = \Gamma_g \Gamma_L V_1^+, \quad (2.57)$$

sendo,

$$\Gamma_g = \frac{R_g - R_0}{R_g + R_0},$$

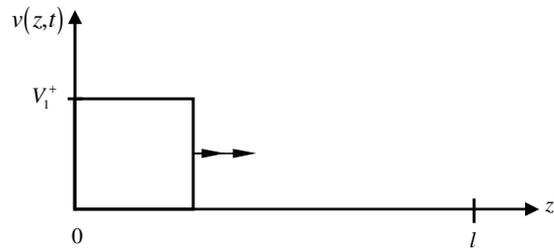
o coeficiente de reflexão devido à resistência  $R_g$ . Este processo continua indefinidamente, com ondas viajando em direção à carga (+z) e em direção ao gerador (-z), sendo refletidas a cada  $t = nT$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Observemos dois pontos: primeiro, como  $\Gamma_L$  ou  $\Gamma_g$ , ou ambos, podem ser negativos, as ondas refletidas podem ter amplitudes negativas; segundo, exceto para o circuito aberto ou fechado,  $|\Gamma_L|$  e  $|\Gamma_g| < 1$ . Isto significa que as magnitudes das sucessivas ondas refletidas se tornam menores a cada reflexão até atingirem um valor convergente. Este processo, para  $R_L = 3R_0$  ( $\Gamma_L = 1/2$ ) e  $R_g = 2R_0$  ( $\Gamma_g = 1/3$ ) é ilustrado nas Figuras 2.14 e 2.15, para ondas de tensão e corrente, respectivamente. As tensões e correntes em qualquer posição da linha de transmissão, e em qualquer intervalo de tempo, podem ser calculadas através das somas algébricas,  $V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^- + V_3^+ + \dots$  e  $I_1^+ + I_1^- + I_2^+ + I_2^- + I_3^+ + \dots$ , respectivamente.

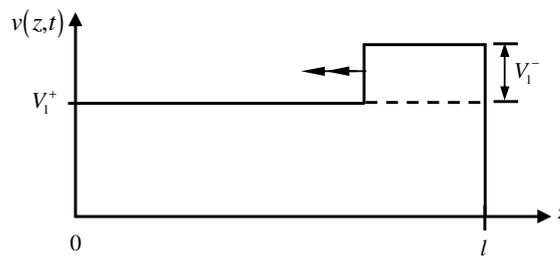
Vamos calcular o valor final da tensão sobre a carga  $V_L = V(l)$ , quando a variável  $t$  aumenta indefinidamente. Assim,

$$\begin{aligned} V_L &= V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^- + V_3^+ + V_3^- + \dots \\ V_L &= V_1^+ (1 + \Gamma_L + \Gamma_g \Gamma_L + \Gamma_g \Gamma_L^2 + \Gamma_g^2 \Gamma_L^2 + \Gamma_g^2 \Gamma_L^3 + \dots) \\ V_L &= V_1^+ \left[ (1 + \Gamma_g \Gamma_L + \Gamma_g^2 \Gamma_L^2 + \dots) + \Gamma_L (1 + \Gamma_g \Gamma_L + \Gamma_g^2 \Gamma_L^2 + \dots) \right] \\ V_L &= V_1^+ \left[ \left( \frac{1}{1 - \Gamma_g \Gamma_L} \right) + \left( \frac{\Gamma_L}{1 - \Gamma_g \Gamma_L} \right) \right], \\ V_L &= V_1^+ \left( \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_g \Gamma_L} \right). \end{aligned} \quad (2.58)$$

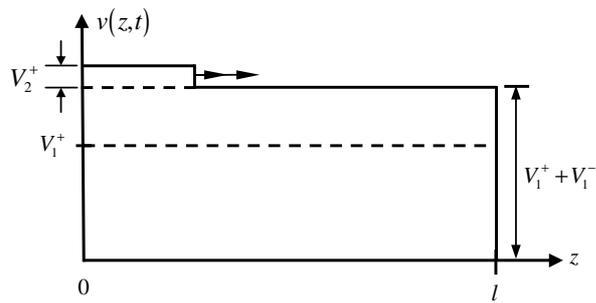
Para o exemplo em questão:  $V_1^+ = \frac{V_0}{3}$ ,  $\Gamma_L = \frac{1}{2}$  e  $\Gamma_g = \frac{1}{3}$ , logo:  $V_L = \frac{9}{5}V_1^+ = \frac{3}{5}V_0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .



(a)



(b)

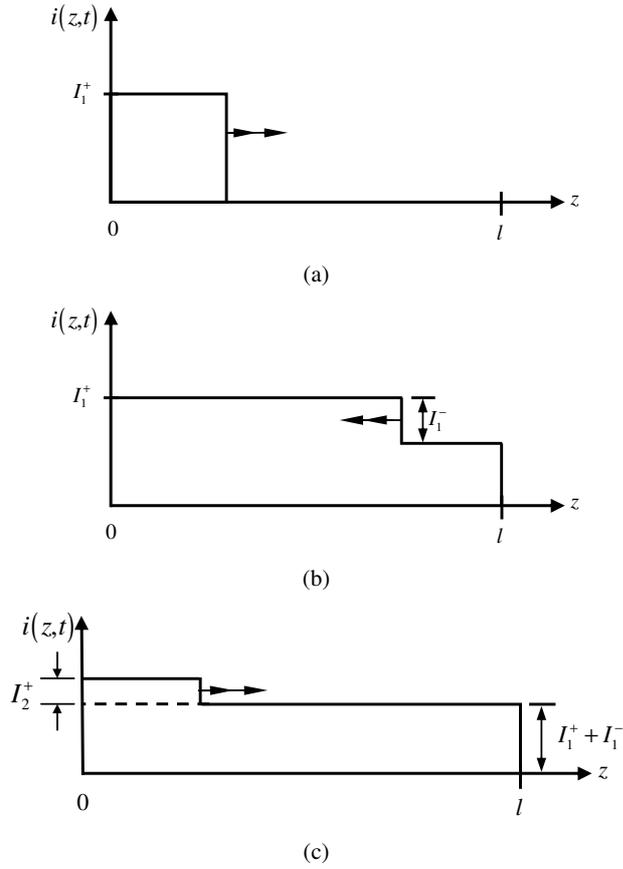


(c)

**Figura 2.14:** Transiente de tensão na LT da Figura 2.12 para  $R_L = 3R_0$  e  $R_g = 2R_0$ . (a) pulso de tensão de amplitude

$V_1^+ = \frac{V_0}{3}$ , em  $0 < t < T$ ; (b) pulso de tensão de amplitude  $V_1^- = \frac{V_1^+}{2} = \frac{V_0}{6}$ , em  $T < t < 2T$ ; (c) pulso de tensão

de amplitude  $V_2^+ = \frac{V_1^-}{3} = \frac{V_0}{18}$ , em  $2T < t < 3T$ .



**Figura 2.15:** Transiente de corrente na LT da Figura 2.12 para  $R_L = 3R_0$  e  $R_g = 2R_0$ . (a) pulso de corrente de amplitude

$$I_1^+ = \frac{V_1^+}{R_0} = \frac{V_0}{3R_0}, \text{ em } 0 < t < T; \text{ (b) pulso de corrente de amplitude } I_1^- = -\frac{V_1^-}{R_0} = -\frac{V_0}{6R_0}, \text{ em } T < t < 2T; \text{ (c)}$$

$$\text{pulso de corrente de amplitude } I_2^+ = \frac{V_2^+}{R_0} = \frac{V_0}{18R_0}, \text{ em } 2T < t < 3T.$$

Este resultado é, obviamente correto, porque na situação estacionária,  $V_0$  é dividido entre  $R_L$  e  $R_g$  na razão de 3 a 2. Da mesma forma,

$$I_L = \left( \frac{1 - \Gamma_L}{1 - \Gamma_g \Gamma_L} \right) \frac{V_1^+}{R_0},$$

ou seja,

$$I_L = \frac{3}{5} \frac{V_1^+}{R_0} = \frac{V_0}{5R_0}.$$

A Figura 2.16 apresenta o modelo elétrico de uma LT em estado estacionário.

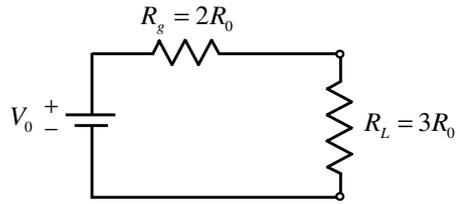


Figura 2.16: Modelo elétrico de uma LT em estado estacionário.

## 2.4. Diagrama de Reflexão (zig-zag)

O diagrama de reflexão de tensão para a LT da Figura 2.13 é apresentado na Figura 2.17. Este começa com uma onda  $V_1^+$  para  $t=0$ , viajando do gerador ( $z=0$ ) na direção  $+z$  com velocidade  $u = 1/\sqrt{LC}$ .

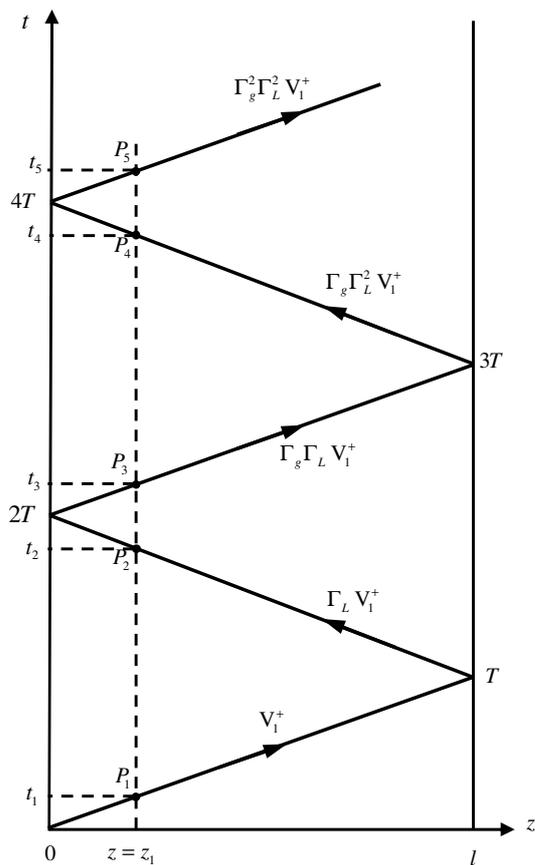


Figura 2.17: Diagrama de reflexão de tensão para a LT ilustrada na Figura 2.13.

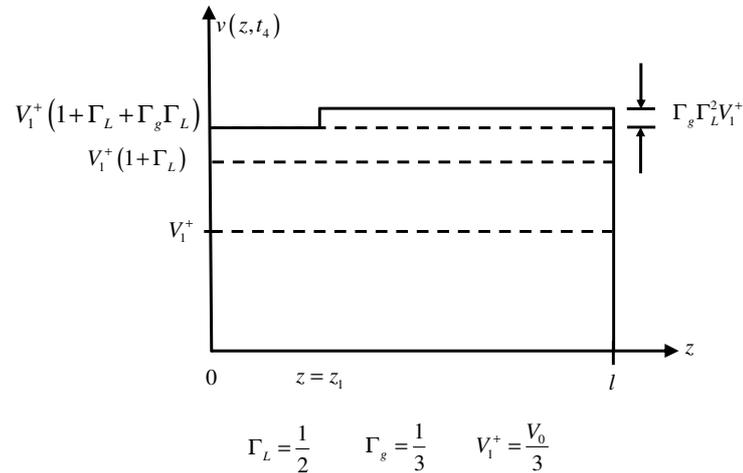
Esta onda está representada pela linha reta associada a  $V_1^+$ , tendo esta linha uma inclinação positiva igual à  $\frac{1}{u}$  (tangente). Quando a onda  $V_1^+$  atinge a carga, em  $z=l$ , uma onda refletida  $V_1^- = \Gamma_L V_1^+$  surge, caso  $R_L \neq R_0$ . A onda  $V_1^-$  (representada no diagrama por uma linha reta direcionada, associada a  $\Gamma_L V_1^+$ , com tangente negativa igual à  $-\frac{1}{u}$ ) viaja na direção  $-z$ , incide na fonte em  $t=2T$ , gerando uma onda refletida  $V_2^+ = \Gamma_g V_1^- = \Gamma_g \Gamma_L V_1^+$ , representada no diagrama por uma segunda linha direcionada com tangente positiva  $\frac{1}{u}$ . Este processo continua indefinidamente.

O diagrama de reflexão de tensão pode ser usado convenientemente para determinar a distribuição de tensão ao longo da linha de transmissão em um *determinado instante de tempo*, assim como, a variação da tensão como função do tempo em um *ponto arbitrário da linha*. Assim, suponhamos que queiramos saber a distribuição de tensão ao longo da linha para  $t=t_4$ , com  $3T < t_4 < 4T$ . Para tanto, procede-se da seguinte forma:

1. Marque  $t_4$  no eixo vertical do tempo do diagrama de reflexão de tensão;
2. Trace uma linha horizontal a partir de  $t_4$ , intersectando a linha direcionada associada com  $\Gamma_g \Gamma_L^2 V_1^+$  em  $P_4$ . Observe que todas as linhas direcionadas acima de  $P_4$  são irrelevantes ao nosso problema, uma vez que pertencem a  $t > t_4$ ;
3. Trace uma vertical através do ponto  $P_4$ , intersectando o eixo horizontal em  $z=z_1$ . O significado de  $z_1$  é que no intervalo  $0 < z < z_1$  (à esquerda da linha vertical) a tensão tem o valor igual à  $V_1^+ + V_1^- + V_2^+ = V_1^+ (1 + \Gamma_L + \Gamma_g \Gamma_L)$ , e no intervalo  $z_1 < z < l$  (à direita da linha vertical) a tensão é:  $V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^- = V_1^+ (1 + \Gamma_L + \Gamma_g \Gamma_L + \Gamma_g \Gamma_L^2)$ . Existe, portanto, uma descontinuidade em  $z = z_1$ , igual a  $\Gamma_g \Gamma_L^2 V_1^+$ ;
4. A distribuição de tensão ao longo da LT em  $t=t_4$ ,  $V(z, t_4)$  é, portanto, como ilustra a Figura 2.18 para  $R_L = 3R_0$  ( $\Gamma_L = 1/2$ ) e  $R_g = 2R_0$  ( $\Gamma_g = 1/3$ ).

A seguir, vamos achar a variação da tensão como uma função do tempo no ponto  $z = z_1$  e, para tanto, usaremos o seguinte procedimento:

1. Trace uma vertical em  $z_1$ , intersectando as linhas direcionadas nos pontos  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  e assim por diante. Existirá um número infinito de tais intersecções se  $R_L \neq R_0$  e  $R_g \neq R_0$ , como também teremos um número infinito de linhas direcionadas se  $(\Gamma_L \neq 0)$  e  $(\Gamma_g \neq 0)$ ;



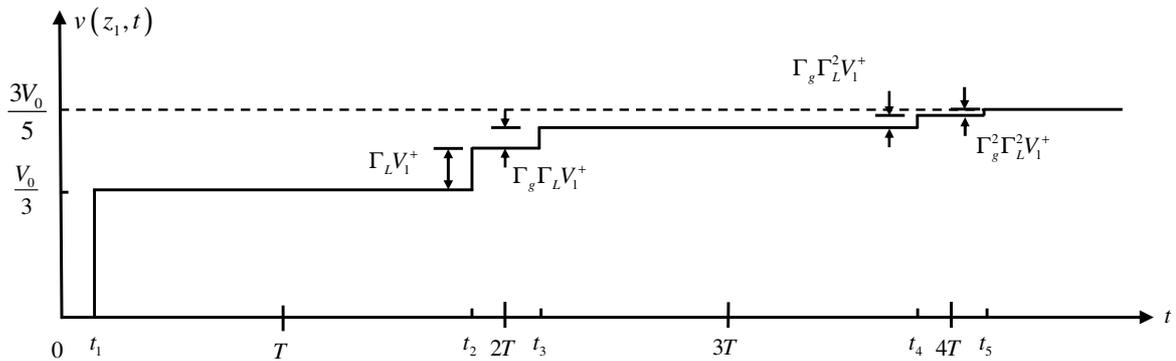
**Figura 2.18:** Transiente de tensão em uma LT sem perdas:  $R_L = 3R_0$ ,  $R_g = 2R_0$ .

2. A partir desses pontos (intersecções), trace linhas horizontais intersectando o eixo vertical (eixo  $t$ ) em  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$  e assim por diante. Estes são os instantes para os quais uma nova onda de tensão chega e, abruptamente, muda a tensão em  $z = z_1$ ;
3. A tensão em  $z = z_1$ , como uma função de  $t$ , pode ser lida do diagrama de reflexão de tensão, conforme a Tabela 2.1 para  $t_5$ .

**Tabela 2.1** – Variações da tensão na LT no ponto  $z = z_1$ .

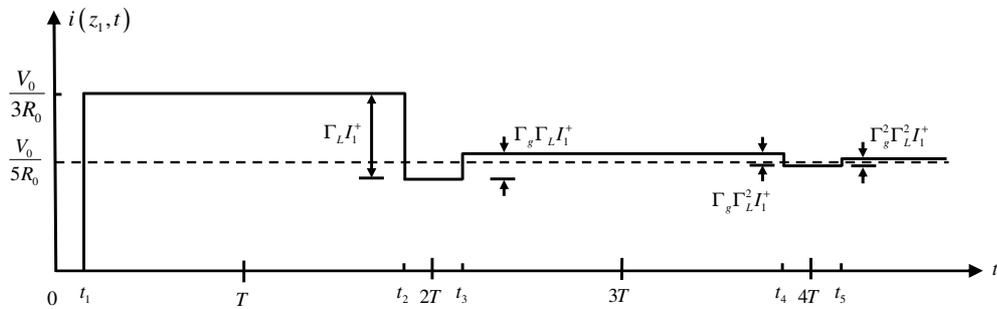
Intervalo de tempo	Tensão	Discontinuidade de tensão
$0 \leq t < t_1$ ( $t_1 = z_1/u$ )	0	0
$t_1 \leq t < t_2$ ( $t_2 = 2T - t_1$ )	$V_1^+$	$V_1^+$ em $t_1$
$t_2 \leq t < t_3$ ( $t_3 = 2T + t_1$ )	$V_1^+(1+\Gamma_L)$	$\Gamma_L V_1^+$ em $t_2$
$t_3 \leq t < t_4$ ( $t_4 = 4T - t_1$ )	$V_1^+(1+\Gamma_L+\Gamma_g\Gamma_L)$	$\Gamma_g\Gamma_L V_1^+$ em $t_3$
$t_4 \leq t < t_5$ ( $t_5 = 4T + t_1$ )	$V_1^+(1+\Gamma_L+\Gamma_g\Gamma_L+\Gamma_g\Gamma_L^2)$	$\Gamma_g\Gamma_L^2 V_1^+$ em $t_4$

4. O gráfico de  $V(z_1, t)$  é apresentado na Figura 2.19 para  $\Gamma_L = 1/2$  e  $\Gamma_g = 1/3$ . Quanto  $t$  aumenta indefinidamente a tensão em  $z_1$  (e em todos os outros pontos da LT sem perdas) assumirão o valor  $\frac{3}{5}V_0$ .



**Figura 2.19:** Transiente de tensão em uma LT sem perdas:  $R_L = 3R_0$  e  $R_g = 2R_0$ .

O diagrama de reflexão da corrente é similar. A diferença essencial é o sinal negativo das ondas viajando na direção  $-z$ , como observamos na Eq. (2.50). O gráfico de  $I(z_1, t)$  é mostrado na Figura 2.20.



$$\Gamma_L = \frac{1}{2} \quad \Gamma_g = \frac{1}{3} \quad I_1^+ = \frac{V_0}{3R_0} \quad I(z_1, \infty) = \frac{V_0}{5R_0}$$

**Figura 2.20:** Transiente de corrente em uma LT sem perdas:  $R_L = 3R_0$  e  $R_g = 2R_0$ .

A seguir apresentamos duas situações especiais:

- a. Quando  $R_L = R_0$  (carga casada,  $\Gamma_L = 0$ ), tanto a tensão como a corrente apresentarão nos seus diagramas de reflexão apenas uma linha direcionada no intervalo  $0 < t < T$ , independente do valor de  $R_g$ ;
- b. Quando  $R_g = R_0$  (gerador casado,  $\Gamma_g = 0$ ) e  $R_L \neq R_0$ , os dois diagramas terão apenas duas linhas direcionadas, existindo nos intervalos  $0 < t < T$  e  $T < t < 2T$ .

## 2.5. Propagação de Pulsos em Linhas de Transmissão

A fonte DC estudada anteriormente pode ser representada como,

$$v_g(t) = V_0 U(t), \quad (2.59)$$

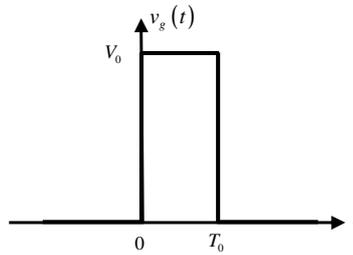
onde  $U(t)$  é a função degrau unitário, definida como:

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}. \quad (2.60)$$

Se tivermos uma excitação em forma retangular, podemos aproveitar a análise desenvolvida para a fonte DC, decompondo o pulso em duas funções degrau. Por exemplo, um pulso com amplitude  $V_0$  e duração de  $t = 0$  a  $t = T_0$ , mostrado na Figura 2.21, pode ser escrito como,

$$v_g(t) = V_0 [U(t) - U(t - T_0)]. \quad (2.61)$$

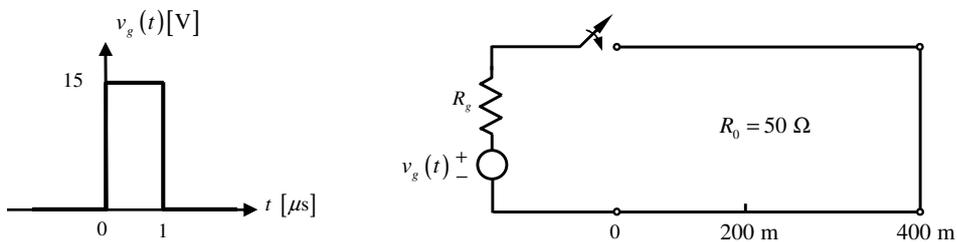
Se o sinal  $v_g(t)$ , descrito na Eq. (2.61), for aplicado a uma LT, a resposta transiente é simplesmente a superposição dos resultados obtidos devido a uma tensão DC,  $V_0$ , aplicada em  $t = 0$ , e outra,  $-V_0$ , aplicada em  $t = T_0$ . Ilustraremos este processo no Exemplo 2.1.



**Figura 2.21:** Função degrau com amplitude  $V_0$ .

**Exemplo 2.1:**

Um pulso retangular de amplitude 15 V e duração  $1 \mu\text{s}$ , ilustrado na Figura 2.22(a), é lançado na entrada de uma LT de  $50 \Omega$  (cabo coaxial sem perdas), cujo material isolante no cabo possui constante dielétrica igual a 2,25. A LT tem 400 m e está curto-circuitada. Sabendo que  $R_g = 25 \Omega$ , determine a resposta no ponto médio da LT como função do tempo até  $8 \mu\text{s}$ . A Figura 2.22(b) apresenta uma ilustração da LT descrita anteriormente.



**Figura 2.22:** (a) Pulso retangular de 15 V e duração de  $1 \mu\text{s}$ ; (b) Modelo elétrico da LT.

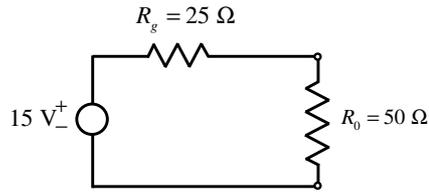
**Solução:**

$$R_L = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_L = -1, \quad \Gamma_g = \frac{25 - 50}{25 + 50} = -\frac{1}{3},$$

$$v_g(t) = 15 \left[ U(t) - U(t - 10^{-6}) \right],$$

$$u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{2,25}} = 2 \times 10^8 \text{ m/s},$$

Em  $t = 0$ , e  $z = 0$ :



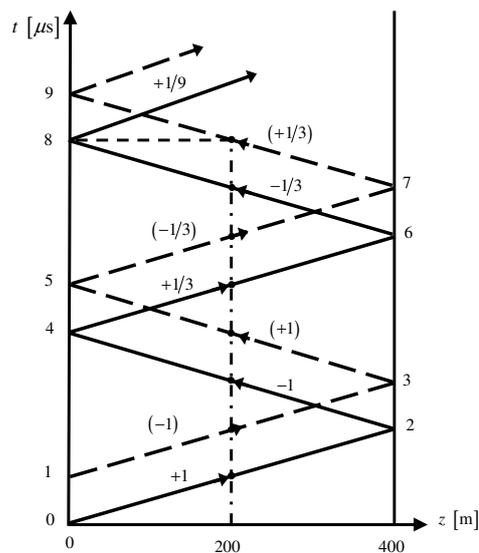
$$V_1^+ = 15 \left( \frac{50}{50 + 25} \right) = 10 \text{ V},$$

$$T = \frac{l}{u} = \frac{400}{2 \times 10^8} = 2 \mu\text{s},$$

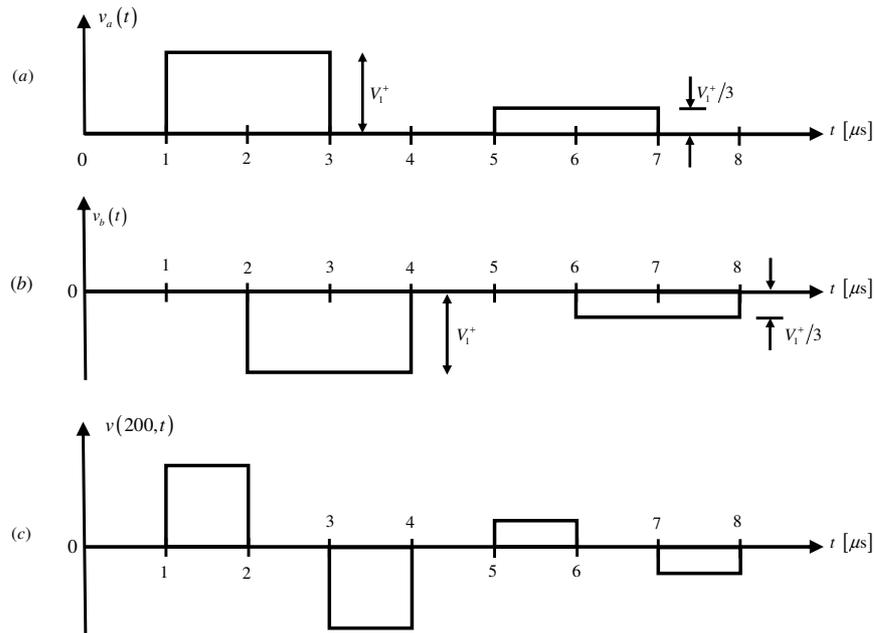
onde  $V_1^+$  é a tensão inicial na LT e  $T$  o tempo de transito.

O diagrama *zig-zag* para a tensão é mostrado na Figura 2.23, onde as linhas cheias (sólidas) correspondem aos +15 V aplicados no instante  $t=0$ , e as linhas tracejadas aos -15 V aplicados em  $t=1 \mu\text{s}$ . As tensões associadas ao degrau negativo estão entre parêntesis.

Traçamos uma vertical em  $z=200$  e uma horizontal em  $t=8 \mu\text{s}$ . A tensão devido à  $15U(t)$  pode ser lida das intersecções da vertical com as linhas direcionadas sólidas, veja  $v_a(t)$  na Figura 2.24(a). Já a tensão devido à  $-15U(t-10^{-6})$  é tirada das intersecções com as linhas direcionadas tracejadas, veja  $v_b(t)$  na Figura 2.24(b). A resposta solicitada  $v(200, t)$ , para  $0 < t \leq 8 \mu\text{s}$  é obtida somando  $v_a + v_b$ , veja Figura 2.24(c).



**Figura 2.23:** Diagrama de reflexão para a LT mostrada na Figura 2.21.



**Figura 2.24** – Transiente em uma LT com os terminais curto-circuitados. (a) tensão no ponto médio da LT devido ao degrau positivo; (b) tensão no ponto médio da LT devido ao degrau negativo; (c) tensão total no ponto médio da LT.

**Exemplo 2.2:**

Uma LT sem perdas, sem dielétrico entre os seus condutores, em circuito aberto,  $R_0$  e comprimento  $l$ , é inicialmente carregada a uma tensão  $V_0$ , como ilustra a Figura 2.25. Quando  $t = 0$ , a LT é conectada a uma resistência  $R = R_0$ . Esboce a tensão e a corrente na carga  $R$  em função do tempo.

Solução:

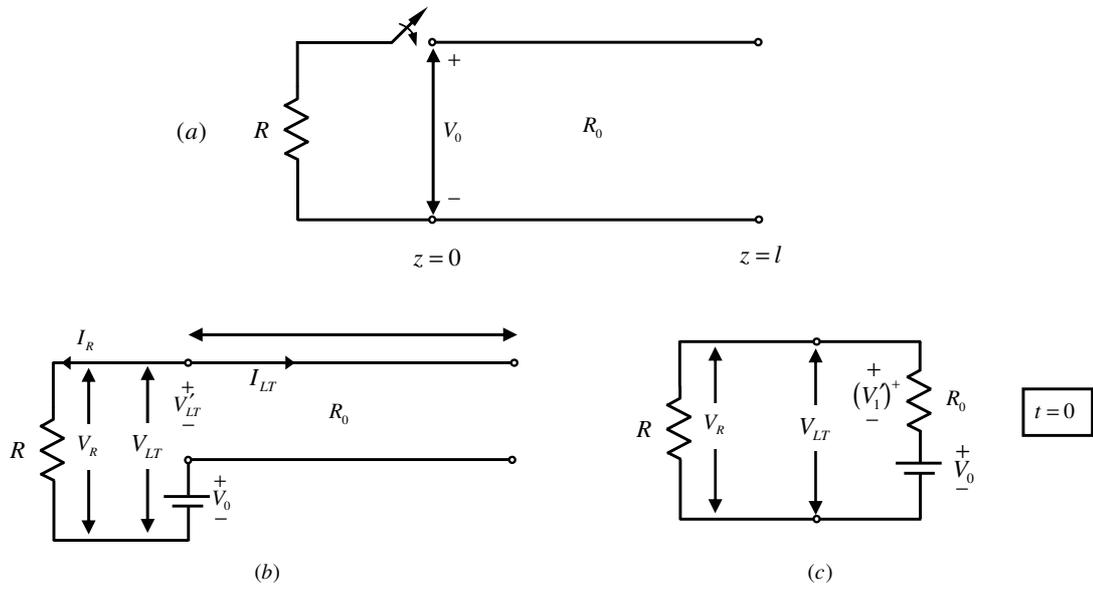
Para  $t = 0$  e  $z = 0$ ,

$$(V_1)^+ = -\frac{R_0}{R + R_0} V_0 = -\frac{V_0}{2}.$$

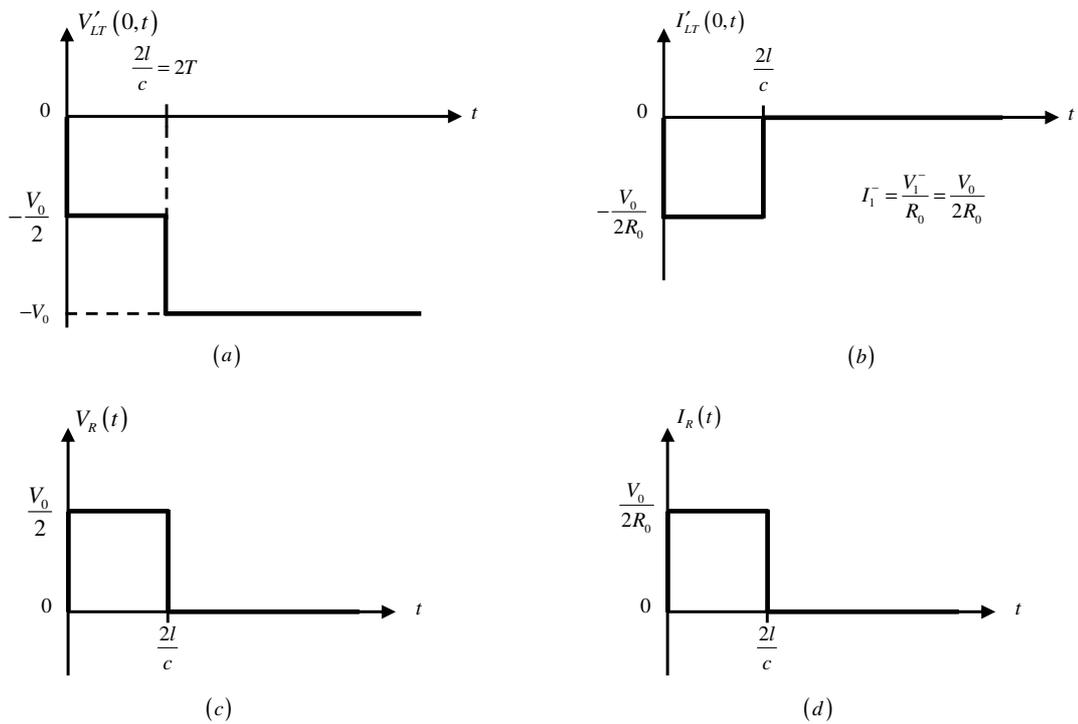
Em  $t = \frac{l}{c}$ ,  $(V_1)^+$  atinge o extremo aberto, onde  $\Gamma_L = 1$ , e surge a onda refletida

$(V_1)^- = (V_1)^+ = -\frac{V_0}{2}$ . Esta onda volta na entrada, quando  $t = \frac{2l}{c}$  e é totalmente transmitida ( $\Gamma_g = 0$ ),

porém, somando-se com a tensão na entrada  $-(V_1)^+$ .



**Figura 2.25** – Modelo da LT; (a) LT com os terminais em aberto; (b) LT carregada modelada como uma fonte de tensão  $V_0$  mais uma  $LT'$  descarregada; (c) modelo para LT  $t=0$  e  $z=0$ .



**Figura 2.26** – Modelo da LT; (a) LT com os terminais em aberto; (b) LT carregada modelada como uma fonte de tensão  $V_0$  mais uma  $LT'$  descarregada; (c) modelo para LT  $t=0$ .

Temos, portanto, uma forma de gerarmos um pulso retangular através do descarregamento de uma LT, com largura ajustável de acordo com o comprimento  $l$  da linha, como mostra a Figura 2.26.

**Exemplo 2.3:**

Considere uma LT em estado estacionário antes da abertura da chave, conforme mostra a Figura 2.27. Calcular a tensão e corrente no ponto  $z = l/2$  como função do tempo.

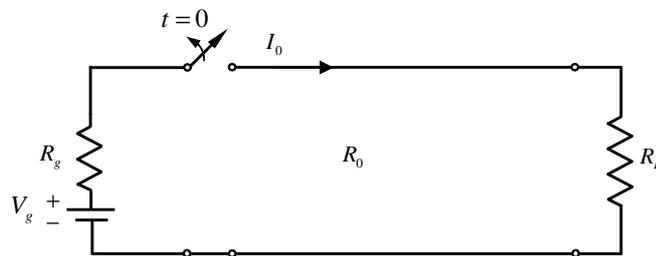


Figura 2.27 –LT carregada

O modelo equivalente da LT acima é mostrado na Figura 2.28, onde  $\Gamma'$  é o coeficiente de reflexão de corrente.

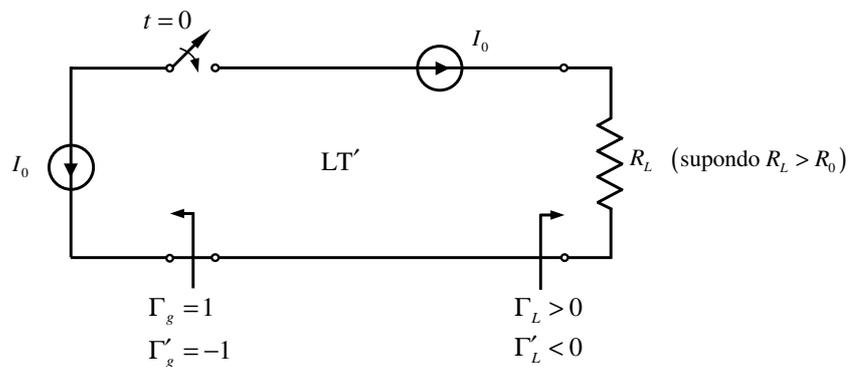
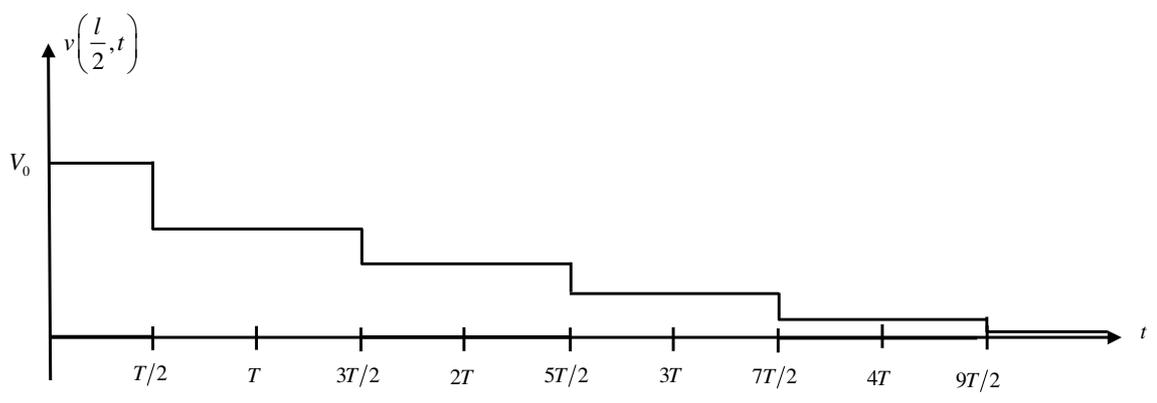
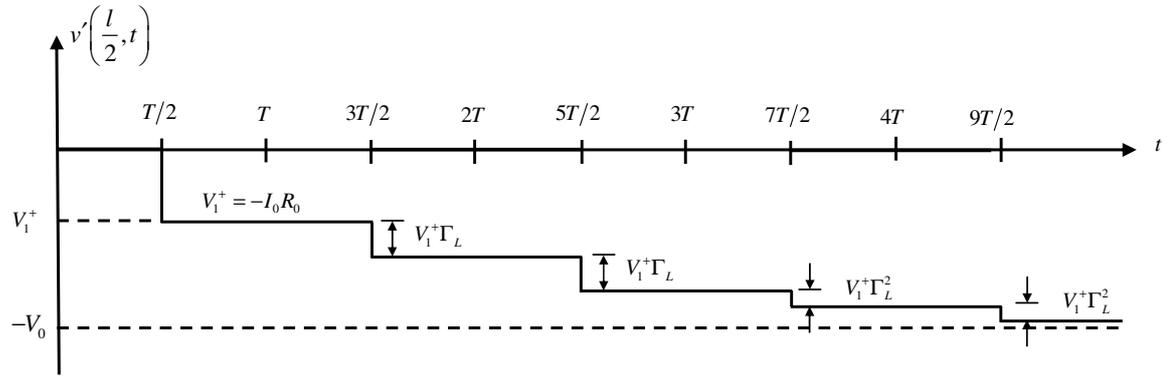
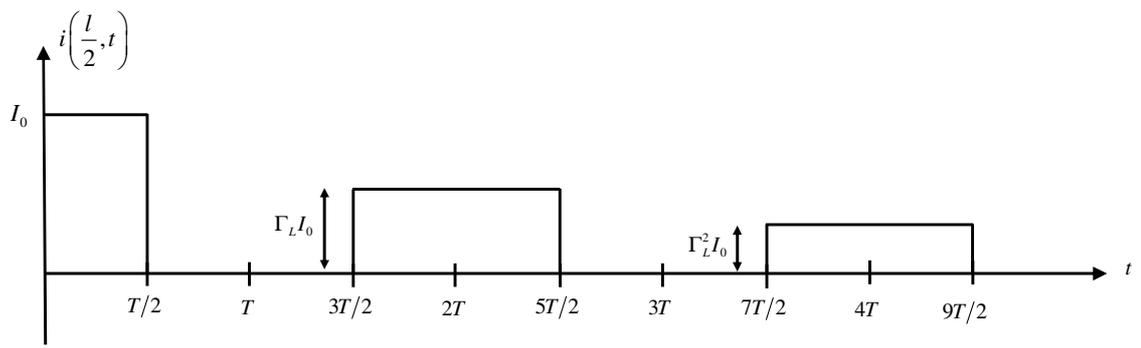
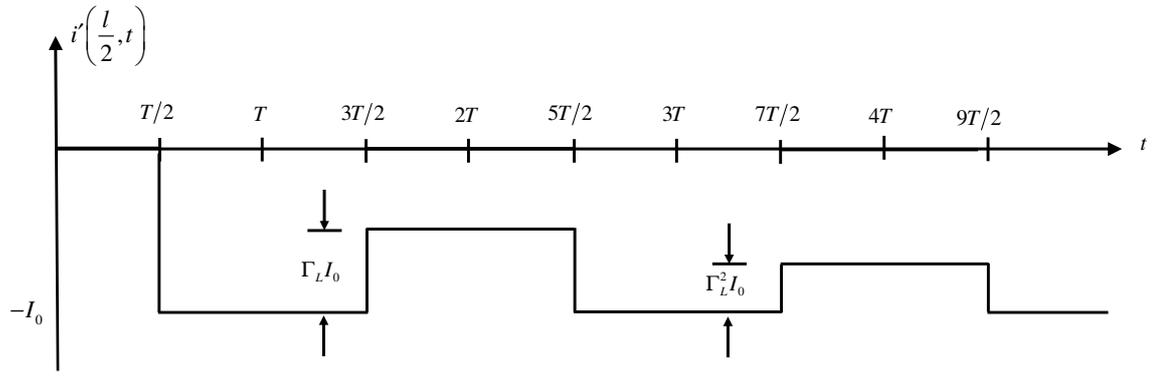


Figura 2.28 – Modelo equivalente LT carregada

$$i(z,t) = i'(z,t) + I_0$$

$$v\left(\frac{l}{2}, t\right) = v'\left(\frac{l}{2}, t\right) + V_0$$



$$v'(z, \infty) = V^+ + 2V^+\Gamma_L + 2V^+\Gamma_L^2 + 2V^+\Gamma_L^3 + \dots,$$

$$v'(z, \infty) = V^+ + 2V^+\Gamma_L (1 + \Gamma_L + \Gamma_L^2 + \dots),$$

$$v'(z, \infty) = V^+ + 2V^+\Gamma_L \left( \frac{1}{1 - \Gamma_L} \right),$$

$$v'(z, \infty) = V^+ \left( 1 + \frac{2\Gamma_L}{1 - \Gamma_L} \right) = V^+ \left( \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L} \right) = V^+ \left( \frac{R_L}{R_0} \right),$$

$$V^+ = I^+ R_0 = -I_0 R_0,$$

$$I_0 = -\frac{V_g}{R_g + R_L},$$

$$V_0 = V_g \frac{R_L}{R_g + R_L},$$

$$v(z, \infty) = v'(z, \infty) + V_0 = -I_0 R_0 \left( \frac{R_L}{R_0} \right) + V_g \frac{R_L}{R_g + R_L},$$

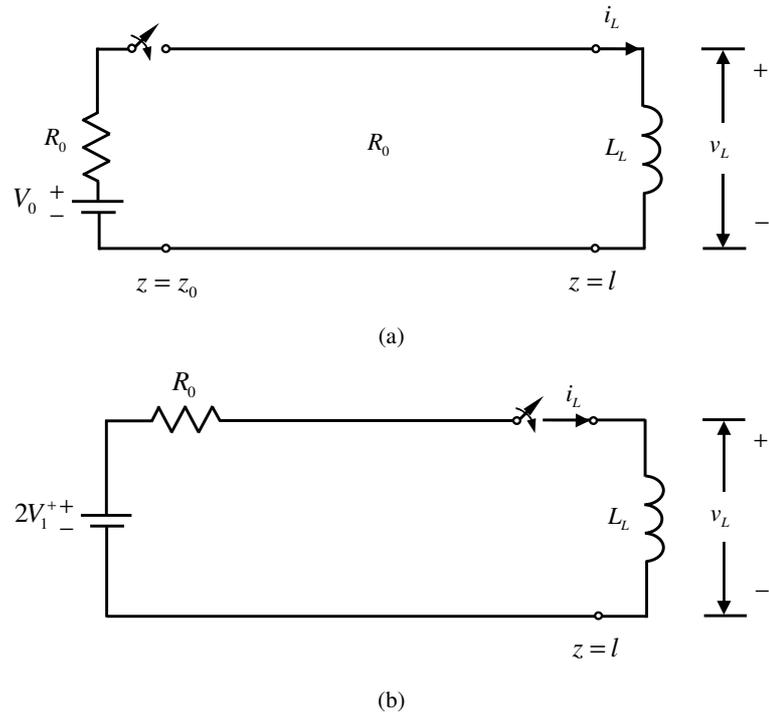
$$v(z, \infty) = -\frac{V_g R_L}{R_g + R_L} + \frac{V_g R_L}{R_g + R_L} = 0.$$

## 2.6. Linha de Transmissão com Carga Reativa

### 2.6.1. Carga Indutiva

Vamos considerar o circuito mostrado na Figura 2.29(a), cuja chave é fechada no instante  $t = 0$ . Nesse momento, uma onda de tensão  $V_1^+ = \frac{V_0}{2}$  viaja pela LT até atingir a carga no tempo  $t = \frac{l}{u} = T$ , a onda refletida  $V_1^-(t)$  é gerada devido ao descasamento de impedância na carga. Precisamos achar a relação entre as tensões  $V_1^-(t)$  e  $V_1^+$ . Em  $z = l$ , as relações abaixo valem para  $t \geq T$ ,

$$v_L(t) = V_1^+ + V_1^-(t), \quad (2.62)$$



**Figura 2.29** – Cálculo de transiente para uma LT sem perdas com uma terminação indutiva. (a) circuito de uma LT com terminação indutiva; (b) circuito equivalente para a carga,  $t \geq T$ .

$$i_L(t) = \frac{1}{R_0} [V_1^+ - V_1^-(t)], \quad (2.63)$$

$$v_L(t) = L_L \frac{d}{dt} i_L(t). \quad (2.64)$$

Eliminando  $V_1^-(t)$ , usando (2.62) e (2.63), obtemos,

$$v_L(t) = 2V_1^+ - R_0 i_L(t). \quad (2.65)$$

A Eq. (2.65) descreve a aplicação da Lei de Kirchoff ao circuito da Figura 2.29(b), o qual é de fato o circuito equivalente na carga para  $t \geq T$ . Combinando (2.64) e (2.65), temos, para  $t \geq T$ :

$$L_L \frac{d}{dt} i_L(t) + R_0 i_L(t) = 2V_1^+, \quad (2.66)$$

cuja solução,

$$i_L(t) = \frac{2V_1^+}{R_0} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{R_0}{L_L}(t-T)\right) \right], \quad (2.67)$$

mostra que  $i_L(T) = 0$  (CA) e  $i_L(\infty) = \frac{2V_1^+}{R_0}$  (CC). A tensão na carga, via (2.64), é:

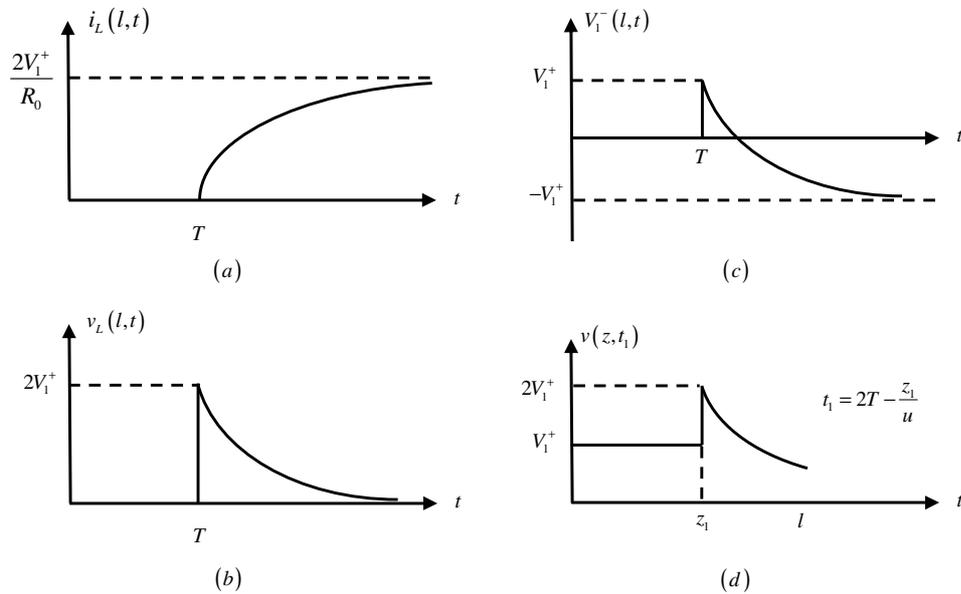
$$v_L(t) = L_L \frac{d}{dt} i_L(t) = 2V_1^+ \exp\left(-\frac{R_0}{L_L}(t-T)\right). \quad (2.68)$$

A amplitude da onda refletida  $V_1^-(t)$  pode ser determinada diretamente de (2.62),

$$V_1^-(t) = v_L(t) - V_1^+. \quad (2.68)$$

$$V_1^-(t) = 2V_1^+ \left[ \exp\left(-\frac{R_0}{L_L}(t-T)\right) - \frac{1}{2} \right] \quad (2.69)$$

A tensão distribuída ao longo da LT é mostrada na Figura 2.30(d), para  $T < t_1 < 2T$ .



**Figura 2.30** – (a) corrente na carga indutiva como função do tempo; (b) tensão na carga indutiva como função do tempo; (c) tensão refletiva na carga como função do tempo; (d) tensão ao longo da LT para  $T < t_1 < 2T$ .

### 2.6.2. Carga Capacitiva

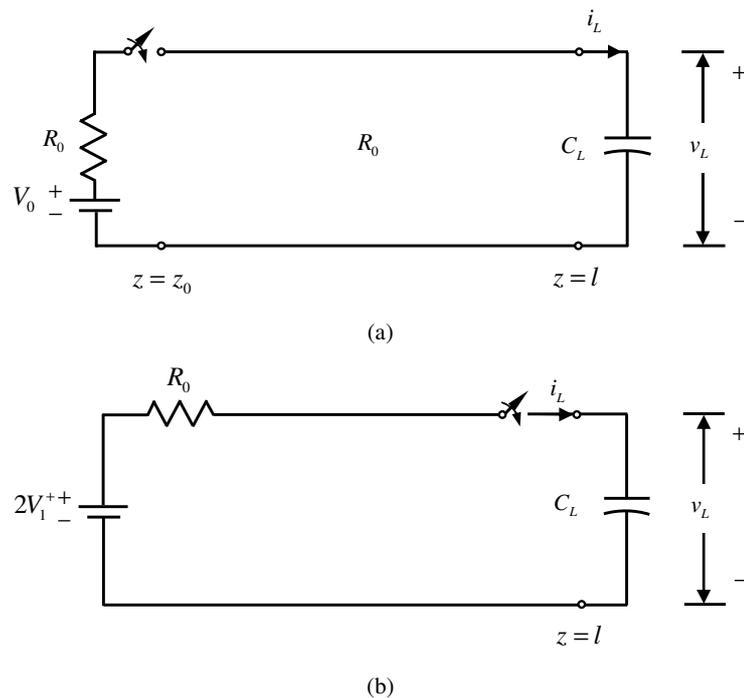
Como ilustra a Figura 2.31, o circuito para uma LT carregada com carga capacitiva é similar ao problema anterior (carga indutiva), logo a análise é similar. Aqui, entretanto, usaremos a relação:

$$i_L(t) = C_L \frac{d}{dt} v_L(t). \quad (2.70)$$

Assim, levando (2.70) em (2.65), obteremos, para  $t \geq T$ ,

$$C_L \frac{d}{dt} v_L(t) + \frac{1}{R_0} v_L(t) = \frac{2}{R_0} V_1^+, \quad (2.71)$$

com  $V_1^+ = \frac{V_0}{2}$ . A solução de (2.71), para  $t \geq T$ , é:



**Figura 2.31** – Cálculo de transitente para uma LT sem perdas com uma terminação capacitiva. (a) circuito de uma LT com terminação capacitiva; (b) circuito equivalente para a carga,  $t \geq T$ .

$$v_L(t) = 2V_1^+ \left[ 1 - \exp\left(-\frac{(t-T)}{R_0 C_L}\right) \right]. \quad (2.72)$$

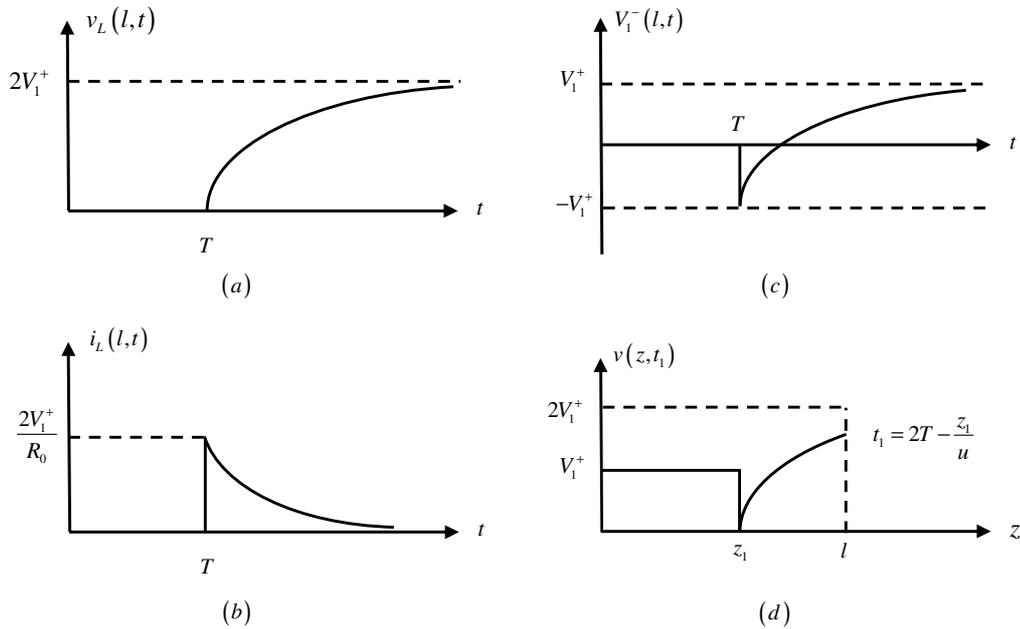
A corrente pode ser obtida de (2.70), tal que:

$$i_L(t) = \frac{2V_1^+}{R_0} \exp\left(-\frac{(t-T)}{R_0 C_L}\right). \quad (2.73)$$

Usando (2.72) em (2.62) temos:

$$V_1^-(t) = 2V_1^+ \left[ \frac{1}{2} - \exp\left(-\frac{(t-T)}{R_0 C_L}\right) \right]. \quad (2.74)$$

A Figura 2.32 ilustra uma representação gráfica para  $v_L(t)$ ,  $i_L(t)$ ,  $V_1^+(l,t)$  e  $v(z,t_1)$ .



**Figura 2.32** – (a) tensão na carga capacitiva como função do tempo; (b) corrente na carga capacitiva como função do tempo; (c) tensão refletiva na carga como função do tempo; (d) tensão ao longo da LT para  $T < t_1 < 2T$ .

## 2.7. Análise das Linhas de Transmissão no Domínio da Freqüência

Para a análise da linha com dependência temporal harmônica, usaremos uma representação fasorial, tomando a função cosseno como referência. Deste modo, podemos escrever a tensão e corrente instantâneas na linha sob a forma:

$$v(z, t) = \text{Re}[V(z) \exp(j\omega t)], \quad (2.75)$$

$$i(z, t) = \text{Re}[I(z) \exp(j\omega t)], \quad (2.76)$$

onde,  $V(z)$  e  $I(z)$  são funções da coordenada espacial  $z$  e ambas podem ser *funções complexas*. Substituindo (2.75) e (2.76) nas Eqs. (2.40) e (2.41), temos:

$$-\frac{d}{dz}V(z) = (R + j\omega L)I(z), \quad (2.77)$$

$$-\frac{d}{dz}I(z) = (G + j\omega C)V(z). \quad (2.78)$$

Combinando (2.77) e (2.78), podemos desacoplar as equações, escrevendo:

$$-\frac{d^2}{dz^2}V(z) = \gamma^2 V(z), \quad (2.79)$$

$$-\frac{d^2}{dz^2}I(z) = \gamma^2 I(z), \quad (2.80)$$

onde,

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad [\text{m}^{-1}], \quad (2.81)$$

As equações (2.77) e (2.78) são as equações da LT no regime harmônico ou *domínio da freqüência*. Estas podem ser obtidas diretamente das Eqs. (2.44) e (2.45), substituindo  $\frac{\partial}{\partial t}$  por  $j\omega$ . O parâmetro  $\gamma$  é chamado *constante de propagação*, cujas partes real e imaginária,  $\alpha$  e  $\beta$ , são as *constante de atenuação* [Np/m] e *constante de fase* [rad/m], respectivamente. Observe que a nomenclatura aqui

empregada é análoga àquela usada no estudo da propagação de ondas planas em meios com perdas (disciplina EE540). Essas quantidades não são totalmente constantes e, em geral, dependem da frequência de forma complicada.

A solução para as Eqs. (2.79) e (2.80) serão:

$$\begin{aligned} V(z) &= V^+(z) + V^-(z), \\ V(z) &= V_0^+ \exp(-\gamma z) + V_0^- \exp(\gamma z), \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} I(z) &= I^+(z) + I^-(z), \\ I(z) &= I_0^+ \exp(-\gamma z) + I_0^- \exp(\gamma z), \end{aligned} \quad (2.83)$$

onde os sinais sobrescritos, (+, -), representam ondas propagando-se nas direções +z e -z, respectivamente. As amplitudes  $(V_0^+, I_0^+)$  e  $(V_0^-, I_0^-)$  estão relacionadas através das Eqs. (2.77) e (2.78), sendo fácil de verificar que:

$$\frac{V_0^+}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{I_0^-} = \frac{R + j\omega L}{\gamma}. \quad (2.84)$$

Para uma linha infinita (realmente uma LT semi-infinita com a fonte na entrada) os termos contendo o fator  $\exp(-\gamma z)$  devem se atenuar até desaparecer. Como não existem ondas refletidas, a linha suportará somente ondas viajando na direção +z. Assim, a tensão e corrente na LT podem ser escritas sob a forma:

$$V(z) = V_0^+ \exp(-\gamma z), \quad (2.85)$$

$$I(z) = I_0^+ \exp(-\gamma z). \quad (2.86)$$

A razão da tensão e a corrente em uma LT infinitamente longa, definida na Eq. (2.84), independe da posição  $z$  e é denominada *impedância característica*,  $Z_0$  [ $\Omega$ ] da LT. Assim:

$$Z_0 = \frac{R + j\omega L}{\gamma} = \frac{\gamma}{G + j\omega C} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}. \quad (2.87)$$

Note que  $\gamma$  e  $Z_0$  são propriedades características da LT, independente de seu comprimento. Tais parâmetros dependem apenas de  $R$ ,  $L$ ,  $G$ ,  $C$  e  $\omega$ , e não do comprimento da linha.

Convém observar que existe uma analogia perfeita entre uma linha de transmissão e as ondas planas uniformes com incidência normal num meio com perdas.

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\omega^2 \tilde{\mu} \tilde{\epsilon}}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\epsilon}}}$$

com,

$$\begin{cases} \tilde{\mu} = \mu' + j\mu'' \\ \tilde{\epsilon} = \epsilon' + j\epsilon'' \end{cases}$$

Vejamos os casos especiais:

1. LT sem perdas ( $R = 0, G = 0$ ):

a. Constante de Propagação:

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{LC}, \quad (2.88)$$

$$\alpha = 0, \quad (2.89)$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \text{ (função linear de } \omega \text{)}. \quad (2.90)$$

b. Velocidade de Fase:

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ (constante)} \quad (2.91)$$

c. Impedância Característica:

$$Z_0 = R_0 + jX_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.92)$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.93)$$

$$X_0 = 0 \quad (2.94)$$

2. LT com baixas perdas ( $R \ll \omega L, G \ll \omega C$ ):

As condições de baixas perdas são mais facilmente satisfeitas para altas frequências.

a. Constante de Propagação:

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{LC} \left[ 1 + \frac{R}{j\omega L} \right]^{1/2} \left[ 1 + \frac{G}{j\omega C} \right]^{1/2}.$$

Usando a expansão,

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} + \theta(x^2), \text{ para } |x| \ll 1,$$

temos,

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} \left[ 1 + \frac{R}{j2\omega L} + \theta\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \right] \left[ 1 + \frac{R}{j2\omega C} + \theta\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \right],$$

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} \left[ 1 + \frac{1}{j2\omega} \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) + \theta\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \right],$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{LC} \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) + j\omega\sqrt{LC} + \theta\left(\frac{1}{\omega}\right),$$

$$\gamma \cong \frac{1}{2} \left( R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}} \right) + j\omega\sqrt{LC}. \quad (2.95)$$

$$\alpha \cong \frac{1}{2} \left( R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}} \right) = \frac{1}{2} \frac{R}{R_0}, \quad (2.96)$$

e,

$$\beta \cong \omega\sqrt{LC} \text{ (aproximadamente uma função linear de } \omega \text{)}. \quad (2.97)$$

Na Eq. (2.96) assumimos que  $\frac{R}{L} \gg \frac{G}{C}$ . Esta relação se aplica na maioria das LTs práticas, por exemplo, para linhas telefônicas bifilares típicas temos:

$$\begin{aligned} R &= 25 \text{ } \Omega/\text{km}, \\ G &= 0,3 \text{ } \mu\text{S}/\text{km}, \\ L &= 2,5 \text{ mH}/\text{km}, \\ C &= 5 \text{ pF}/\text{km}, \\ R_d &= \frac{1}{G} = 3,33 \times 10^6 \text{ } \Omega, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{C}{G} = 0,016666 \text{ e } \frac{L}{R} = 10^{-4}.$$

Assim:

$$\frac{R/L}{G/C} = 166,66,$$

atendendo a condição  $R/L \gg G/C$ . Para cabos coaxiais essa relação é da ordem de  $10^4$ .

b. Velocidade de Fase:

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \cong \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ (aproximadamente constante).}$$

c. Impedância Característica:

$$\begin{aligned} Z_0 &= R_0 + jX_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \left[ 1 + \frac{R}{j\omega L} \right]^{1/2} \left[ 1 + \frac{G}{j\omega C} \right]^{-1/2}, \\ Z_0 &= \sqrt{\frac{L}{C}} \left[ 1 + \frac{1}{j2\omega} \left( \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right) + \theta \left( \frac{1}{\omega^2} \right) \right], \\ Z_0 &\cong \sqrt{\frac{L}{C}} - j \sqrt{\frac{L}{C}} \left( \frac{1}{2\omega} \right) \left( \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right). \end{aligned} \tag{2.98}$$

Assim,

$$R_0 \cong \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (2.99)$$

$$X_0 \cong -\sqrt{\frac{L}{C}} \left( \frac{1}{2\omega} \right) \left( \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right) \cong 0, \quad (2.100)$$

3. LT sem distorção  $\left( \frac{R}{L} = \frac{G}{C} \right)$ :

a. Constante de Propagação

$$\begin{aligned} \gamma = \alpha + j\beta &= \sqrt{(R + j\omega L) \left( \frac{RC}{L} + j\omega C \right)}, \\ \gamma &= \sqrt{\frac{C}{L}} (R + j\omega L). \end{aligned} \quad (2.101)$$

Assim,

$$\alpha = R\sqrt{\frac{C}{L}} \neq 0, \quad (2.102)$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \text{ (função linear de } \omega \text{)}. \quad (2.103)$$

b. Velocidade de Fase

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ (constante)}. \quad (2.104)$$

c. Impedância Característica

$$Z_0 = R_0 + jX_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (2.105)$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ (constante)}, \quad (2.106)$$

$$X_0 = 0. \quad (2.107)$$

Obs.: Neste caso, exceto pelo fato da constante de atenuação ser não-nula, as características de uma LT sem distorção são as mesmas de uma linha de transmissão sem perdas.

Um fenômeno conhecido como *dispersão* surge quando existe dependência da velocidade de fase ( $u_p$ ) com a frequência. A condição  $u_p$  constante é satisfeita pela LT sem perdas e é aproximadamente satisfeita pela linha com baixas perdas. Numa linha de transmissão com perdas as amplitudes das ondas serão atenuadas, e a distorção surgirá quando as diferentes componentes de frequência atenuam-se diferentemente, mesmo quando as mesmas viajam com a mesma velocidade. Em geral, uma LT com perdas é dispersiva, da mesma forma que um dielétrico com perdas.

**Exemplo 2.4:**

A atenuação numa LT de  $50 \Omega$ , sem distorção, é de  $0,01 \text{ [dB/m]}$  e a linha tem uma capacitância de  $0,1 \text{ [nF/m]}$ .

- Calcule resistência, indutância e condutância por unidade de comprimento, da LT.
- Ache a velocidade de propagação da onda na LT.
- Determine a percentagem para a qual a amplitude de uma onda de tensão propagante se reduz em 1 km e 5 km .

*Solução:*

a) Para a LT sem distorção,  $\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$ .

Por outro lado, sabendo que  $\alpha_{dB} = 8,868\alpha_{Np}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 50 \\ \alpha = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 0,01/8,868 = 1,15 \times 10^{-3} \end{array} \right.$$

As relações acima são suficientes para determinar  $R$ ,  $L$  e  $G$ . Assim:

$$\alpha = \frac{R}{R_0} \Rightarrow R = \alpha R_0 = 0,057 \text{ [}\Omega\text{/m]}$$

$$\alpha^2 = R^2 \frac{C}{L} \Rightarrow L = C \left( \frac{R}{\alpha} \right)^2 = 0,25 \text{ [}\mu\text{H/m]}$$

$$G = \frac{RC}{L} \Rightarrow G = \frac{R}{R_0^2} = 22,8 \text{ } [\mu\text{S/m}]$$

b) 
$$u_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2 \times 10^8 \text{ } [\text{m/s}]$$

c) 
$$\frac{V_2}{V_1} = \exp(-\gamma z)$$

$$z = 1 \text{ km} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \exp(-1,15) = 0,317 \Rightarrow 31,7\%$$

$$z = 5 \text{ km} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \exp(-5,75) = 0,0032 \Rightarrow 0,32\%$$

### 2.7.1. Constante de Atenuação a partir de Relações de Potência

Da Eq. (2.81) temos que:

$$\alpha = \text{Re}\{\gamma\} = \text{Re}\left\{\sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}\right\}.$$

Para uma carga casada (ou linha de transmissão infinita),

$$V(z) = V_0 \exp[-(\alpha + j\beta)z], \quad (2.108)$$

$$I(z) = \frac{V_0}{Z_0} \exp[-(\alpha + j\beta)z]. \quad (2.109)$$

Sabendo que a potência média em um ponto qualquer da linha é dada por:

$$P(z) = \frac{1}{2} \text{Re}\{V(z)I^*(z)\},$$

então,

$$P(z) = \frac{|V_0|^2}{2|Z_0|^2} R_0 \exp[-2\alpha z]. \quad (2.110)$$

Como a potência média por unidade de comprimento,  $P_L$ , pode ser calculada por,

$$P_L = -\frac{\partial}{\partial z} P(z), \quad (2.111)$$

então,

$$P_L(z) = 2\alpha P(z),$$

E, assim:

$$\alpha = \frac{P_L(z)}{2P(z)} \left[ \frac{\text{Np}}{\text{m}} \right]. \quad (2.112)$$

**Exemplo 2.5:**

- a. Calcule  $\alpha$  em função de  $R$ ,  $L$ ,  $G$  e  $C$ .

*Solução:*

Considerando uma LT casada:

$$P_L(z) = \frac{1}{2} \left[ R |I(z)|^2 + G |V(z)|^2 \right]$$

$$P_L(z) = \frac{|V_0|^2}{2|Z_0|^2} (R + G |Z_0|^2) \exp[-2\alpha z]$$

$$\alpha = \frac{1}{2R_0} (R + G |Z_0|^2) \left[ \frac{\text{Np}}{\text{m}} \right]$$

- b. Para uma LT com baixas perdas e, considerando  $\left( \frac{R}{L} \gg \frac{G}{C} \right)$ :

$$Z_0 \cong R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \text{ logo:}$$

$$\alpha \cong \frac{1}{2} \left( R \sqrt{\frac{C}{L}} + G \sqrt{\frac{L}{C}} \right) \approx \frac{1}{2} \frac{R}{R_0},$$

onde,

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

O resultado acima coincide com os resultados para altas frequências, onde  $R \ll \omega L$  e  $G \ll \omega C$

c. Para uma LT sem distorção  $\left( \frac{R}{L} = \frac{G}{C} \right)$ :

$$Z_0 = R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ e,}$$

$$\alpha = \frac{1}{2R_0} \left( R + G \frac{L}{C} \right) = \frac{R}{R_0} = R \sqrt{\frac{C}{L}},$$

visto que,

$$R = G \frac{L}{C}.$$

## 2.8. Características das Linhas de Transmissão Descasadas

De (2.82) e (2.83), vimos que:

$$V(z) = V_0^+ \exp(-\gamma z) + V_0^- \exp(\gamma z), \quad (2.113)$$

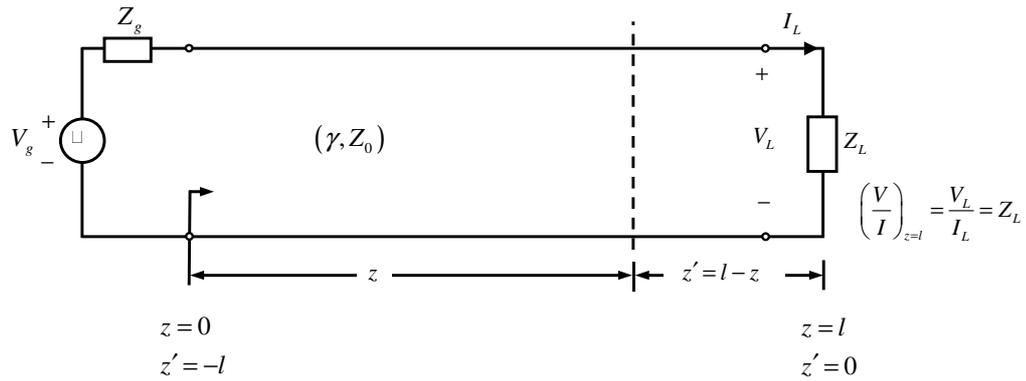
$$I(z) = I_0^+ \exp(-\gamma z) + I_0^- \exp(\gamma z), \quad (2.114)$$

com,

$$\frac{V_0^+}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{I_0^-} = Z_0, \quad (2.115)$$

onde  $V_0^+ \exp(-\gamma z)$  representa a onda se propagando à direita e  $V_0^- \exp(\gamma z)$  a onda se propagando à esquerda. Além disso, conforme visto anteriormente, para ondas lançadas em linhas infinitas (ou LT casadas), não temos ondas refletidas.

Para uma LT com carga arbitrária, conforme ilustrada na Figura 2.33, as Eqs. (2.82) – (2.83) podem ser escritas como função dos parâmetros de carga, isto é,  $V_0^+$  e  $V_0^-$  como função de  $V_L$ ,  $I_L$  e  $Z_L$ .



**Figura 2.33:** LT finita terminada com uma carga de impedância arbitrária  $Z_L$ .

Assim, fazendo  $z=l$  em (2.113) e (2.114), e lembrando que:

$$V(l) = V_L,$$

$$I(l) = I_L,$$

temos:

$$V_L = V_0^+ \exp(-\gamma l) + V_0^- \exp(\gamma l),$$

$$I_L = \frac{V_0^+}{Z_0} \exp(-\gamma l) - \frac{V_0^-}{Z_0} \exp(\gamma l).$$

Resolvendo as equações acima para  $V_0^+$  e  $V_0^-$ , temos:

$$V_0^+ = \frac{1}{2}(V_L + I_L Z_0) \exp(\gamma l), \quad (2.116)$$

$$V_0^- = \frac{1}{2}(V_L - I_L Z_0) \exp(-\gamma l). \quad (2.117)$$

Lembrando que,  $V_L = I_L Z_L$ , os coeficientes  $V_0^+$  e  $V_0^-$  podem ser reescritos:

$$V_0^+ = \frac{I_L}{2}(Z_L + Z_0)\exp(\gamma l), \quad (2.118)$$

$$V_0^- = \frac{I_L}{2}(Z_L - Z_0)\exp(-\gamma l). \quad (2.119)$$

Observando, ainda, que  $z' = l - z$ , a tensão e a corrente na linha de transmissão podem ser escritas como função da coordenada  $z'$ , medida a partir da carga. Assim:

$$V(z') = \frac{I_L}{2}[(Z_L + Z_0)\exp(\gamma z') + (Z_L - Z_0)\exp(-\gamma z')], \quad (2.120)$$

$$I(z') = \frac{I_L}{2Z_0}[(Z_L + Z_0)\exp(\gamma z') - (Z_L - Z_0)\exp(-\gamma z')]. \quad (2.121)$$

Considerando as relações matemáticas,

$$\exp(\gamma z') + \exp(-\gamma z') = 2 \cosh(\gamma z'),$$

$$\exp(\gamma z') - \exp(-\gamma z') = 2 \sinh(\gamma z'),$$

as Eqs. (2.120) e (2.121) podem ser reescritas na forma hiperbólica, sob a forma:

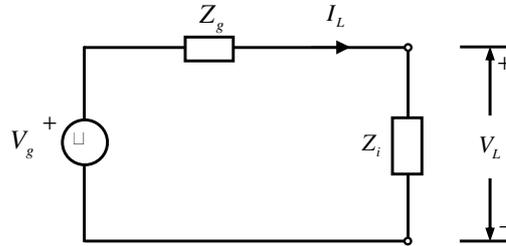
$$V(z') = I_L [Z_L \cosh(\gamma z') + Z_0 \sinh(\gamma z')], \quad (2.122)$$

$$I(z') = \frac{I_L}{Z_0} [Z_L \sinh(\gamma z') + Z_0 \cosh(\gamma z')]. \quad (2.123)$$

A impedância da onda na linha, em um ponto  $z'$  qualquer, pode ser derivada diretamente das Eqs. (2.120) – (2.121) ou (2.122) – (2.123). Assim, na forma hiperbólica a impedância pode ser escrita:

$$Z(z') = \frac{V(z')}{I(z')} = Z_0 \left[ \frac{Z_L + Z_0 \tanh(\gamma z')}{Z_0 + Z_L \tanh(\gamma z')} \right] [\Omega]. \quad (2.124)$$

Na fonte,  $z' = l$ , o gerador “olhando” em direção à carga “vê” uma *impedância de entrada*  $Z_i$ , como ilustrado na Figura 2.34, tal que:



**Figura 2.34:** Circuito equivalente no gerador.

$$Z_i = Z \left( \begin{matrix} z' = l \\ z = 0 \end{matrix} \right) = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh(\gamma l)}{Z_0 + Z_L \tanh(\gamma l)}. \quad (2.125)$$

Obs.: Para outra posição na LT o circuito equivalente da Figura 2.33 não se aplica.

A partir do circuito da Figura 2.34, observamos que a tensão na entrada da linha de transmissão pode ser facilmente determinada através de um divisor de tensão. Portanto:

$$V_i = \frac{Z_i}{Z_g + Z_i} V_g, \quad (2.126)$$

e,

$$I_i = \frac{V_g}{Z_g + Z_i}. \quad (2.127)$$

A potência média aplicada na carga é:

$$(P_{av})_L = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{V_L I_L^*\}_{z=l, z'=0},$$

onde  $V_L$  e  $I_L$  são dados em valores de pico. Lembrando da relação  $V_L = I_L Z_L$ , podemos reescrever a potência entregue à carga sob a forma:

$$(P_{av})_L = \frac{1}{2} R_L \left| \frac{V_L}{Z_L} \right|^2 = \frac{1}{2} R_L |I_L|^2, \quad (2.128)$$

A potência média aplicada na entrada da linha é:

$$(P_{av})_i = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ V_i I_i^* \}_{z=0, z'=l}, \quad (2.129)$$

e para uma linha sem perdas,

$$(P_{av})_i = (P_{av})_L. \quad (2.130)$$

Para o caso particular onde  $Z_L = Z_0$ , a impedância em um ponto  $z'$  qualquer é constante, tal que:

$$Z(z') = Z_0. \quad (2.131)$$

Nesse caso, a tensão e a corrente, definidas em (2.120) e (2.121), respectivamente, podem ser escritas como:

$$V(z) = [I_L Z_0 \exp(\gamma l)] \exp(-\gamma z) = [V_L \exp(\gamma l)] \exp(-\gamma z) = V_i \exp(-\gamma z), \quad (2.132)$$

$$I(z) = [I_L \exp(\gamma l)] \exp(-\gamma z) = I_i \exp(-\gamma z). \quad (2.133)$$

Como podemos observar as Eqs. (2.132) e (2.133) correspondem a um par tensão/corrente que propaga na LT no sentido  $+z$  (gerador para carga), sem a presença de ondas refletidas da carga. Esta situação diz-se que a linha de transmissão está *casada*, simulando uma linha infinita.

### **Exemplo 2.6:**

Um gerador de sinais com  $R_g = 1 \text{ } [\Omega]$  e tensão  $v_g(t) = 0,3 \cos(2\pi \times 10^8 t) \text{ } [V]$  é conectado a uma LT sem perdas de  $50 \text{ } [\Omega]$ . O comprimento da LT é de  $4 \text{ m}$  e a velocidade de propagação da onda

é de  $2,5 \times 10^8$  [m/s]. Para uma carga casada, determine: (a) as expressões instantâneas da tensão e corrente em um ponto qualquer da linha; (b) as expressões instantâneas para a tensão e a corrente na carga; (c) a potência transferida à carga.

*Solução:*

$$a. \quad V_g = 0,3 \angle 0^\circ \text{ [V]} \text{ (fasor tendo como referência o cosseno)}$$

$$Z_g = R_g = 1 \text{ [\Omega]}$$

$$Z_0 = R_0 = 50 \text{ [\Omega]}$$

$$\omega = 2\pi \times 10^8 \text{ [rad/s]}$$

$$u_p = 2,5 \times 10^8 \text{ [m/s]}$$

$$l = 4 \text{ [m]}$$

Na situação casada,  $Z_L = Z_0 = 50$  [ $\Omega$ ], temos apenas ondas se propagando à direita, ou em direção à carga. Assim:

$$V_i = \frac{50}{1+50} \times 0,3 \angle 0^\circ = 0,294 \angle 0^\circ \text{ [V]}$$

$$I_i = \frac{0,3 \angle 0^\circ}{1+50} = 0,0059 \angle 0^\circ \text{ [A]}$$

$$\beta = \frac{\omega}{u_p} = \frac{2\pi \times 10^8}{2,5 \times 10^8} = 0,8\pi \text{ [rad/m]}$$

$$V(z) = 0,294 \exp(-j0,8\pi z) \text{ [V]}$$

$$I(z) = 0,0059 \exp(-j0,8\pi z) \text{ [A]}$$

As expressões instantâneas correspondentes são:

$$v(z,t) = \text{Re}\left\{0,294 \exp\left[j(2\pi \times 10^8 t - 0,8\pi z)\right]\right\} = 0,294 \cos(2\pi \times 10^8 t - 0,8\pi z) \text{ [V]}$$

$$i(z,t) = \text{Re}\left\{0,0059 \exp\left[j(2\pi \times 10^8 t - 0,8\pi z)\right]\right\} = 0,0059 \cos(2\pi \times 10^8 t - 0,8\pi z) \text{ [A]}$$

b. Na carga  $z = l = 4$  [m]. Assim:

$$v(4, t) = 0,294 \cos(2\pi \times 10^8 t - 3,2\pi) \text{ [V]}$$

$$i(4, t) = 0,0059 \cos(2\pi \times 10^8 t - 3,2\pi) \text{ [A]}$$

c. Usando a Eqs. (2.129),

$$(P_{av})_L = (P_{av})_i = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{V(z)I^*(z)\}$$

$$(P_{av})_L = (P_{av})_i = \frac{1}{2}(0,294 \times 0,0059)$$

$$(P_{av})_L = (P_{av})_i = 8,7 \times 10^{-4} \text{ [W]}$$

$$(P_{av})_L = (P_{av})_i = 0,87 \text{ [mW]}$$

## 2.9. Linhas de Transmissão como Elementos de Circuito

As linhas de transmissão, além de serem utilizadas como guias de ondas para transferir informação e potência entre dois pontos podem, na faixa UHF (frequências na faixa 300 [MHz] a 3 [GHz] e comprimentos de onda entre 1 [m] a 0,1 [m]), serem utilizadas como elementos de circuitos.

Como discutimos anteriormente, para uma LT sem perdas temos que:  $\gamma = j\beta$  e  $Z_0 = R_0$ . Lembrando que:

$$\tanh(\gamma l) = \tanh(j\beta l) = j \tan(\beta l),$$

a impedância  $Z_i$ , a uma distância  $l$  da carga,  $Z_L$  será:

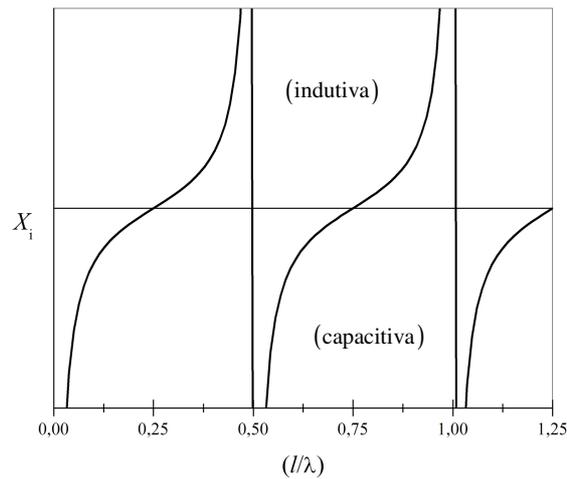
$$Z_i = R_0 \frac{Z_L + jR_0 \tan(\beta l)}{R_0 + jZ_L \tan(\beta l)}. \quad (2.134)$$

. **Terminação em Circuito Aberto** ( $Z_L \rightarrow \infty$ )

Levando a condição  $Z_L \rightarrow \infty$  na Eq. (2.134),

$$Z_i = jX_i = -j \frac{R_0}{\tan(\beta l)} = -jR_0 \cot(\beta l). \quad (2.135)$$

Lembrando que  $\beta l = 2\pi l/\lambda$ , a Eq. (2.135) mostra que a impedância de entrada de uma linha sem perdas, terminada em circuito aberto, é *puramente reativa*, podendo ser tanto indutiva como capacitiva, dependendo de seu comprimento  $l$ , visto que  $-\infty < \cot(\beta l) < \infty$ . A Figura 2.35 mostra o gráfico da reatância de entrada  $X_i = -R_0 \cot(\beta l)$  como função do comprimento normalizado ( $l/\lambda$ ). Para  $\beta l \ll 1$ ,  $\tan(\beta l) \approx \beta l$ .



**Figura 2.35:** Reatância de entrada para uma seção de LT com os terminais em aberto.

Assim:

$$Z_i = jX_i \cong -j \frac{R_0}{\beta l} = -j \frac{\sqrt{L/C}}{\omega l \sqrt{LC}} = -j \frac{1}{\omega C l},$$

e,

$$X_i = -\frac{1}{\omega C l}. \quad (2.136)$$

### 2.9.2. Terminação em Curto – Circuito ( $Z_L = 0$ )

Levando a condição  $Z_L = 0$  na Eq. (2.134) temos,

$$Z_i = jX_i = jR_0 \tan(\beta l). \quad (2.137)$$

Assim como para a terminação em aberto, a Eq. (2.137) mostra que a impedância de entrada de uma LT sem perdas, terminada em curto-circuito, é puramente reativa, podendo ser tanto indutiva como capacitiva, dependendo de seu comprimento  $l$ , uma vez que  $-\infty < \tan(\beta l) < \infty$ . A Figura 2.36 apresenta o gráfico da reatância de entrada  $X_i = R_0 \tan(\beta l)$  como função do comprimento normalizado ( $l/\lambda$ ). Se  $\beta l \ll 1$ ,  $\tan(\beta l) \approx \beta l$  e,

$$Z_i = jX_i \cong jR_0 \beta l = j\omega l \sqrt{LC} \sqrt{\frac{L}{C}} = j\omega Ll,$$

e,

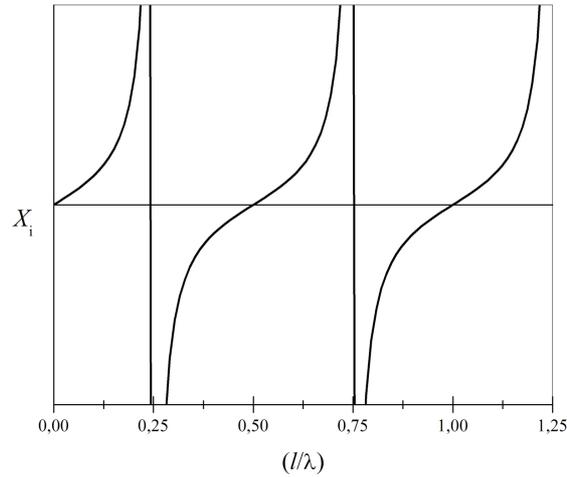
$$X_i = \omega Ll. \quad (2.138)$$

### 2.9.3. Seção de Quarto-de-Onda

Quando o comprimento da LT é um múltiplo ímpar de quarto-de-onda, isto é,

$$l = (2n-1) \frac{\lambda}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

então,



**Figura 2.36:** Reatância de entrada para uma seção de LT com os terminais em curto-circuito.

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda}(2n-1)\frac{\lambda}{4} = (2n-1)\frac{\pi}{2}.$$

Lembrando que:

$$\tan(\beta l) = \tan\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \pm\infty,$$

a impedância de entrada, Eq. (2.125), pode ser reescrita como,

$$Z_i = \frac{R_0^2}{Z_L}. \quad (2.139)$$

A Eq. (2.139) mostra que uma linha de transmissão sem perdas, de comprimento múltiplo ímpar de quarto de comprimento de onda, transforma a impedância da carga para a entrada como sua inversa multiplicada pelo quadrado da resistência característica, sendo denominado *transformador de quarto-de-onda*. Assim,

$$\text{Carga em circuito aberto } (Z_L \rightarrow \infty) \Rightarrow Z_i = 0,$$

$$\text{Carga em curto-circuito } (Z_L = 0) \Rightarrow Z_i \rightarrow \infty.$$

Em geral como  $R_0 \neq 0$ , quando  $Z_L = 0$  a impedância  $Z_i$  é muito alta, similar a de um *circuito paralelo ressonante*.

#### 2.9.4. Seção de Meia-Onda

Quando comprimento da linha de transmissão é um múltiplo inteiro de meio comprimento de onda, isto é,  $l = n \frac{\lambda}{2}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , então,

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \left( n \frac{\lambda}{2} \right) = n\pi.$$

Lembrando que,

$$\tan(\beta l) = \tan[n\pi] = 0, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots,$$

a impedância de entrada, Eq. (2.125), pode ser reescrita como,

$$Z_i = Z_L. \tag{2.140}$$

A Eq. (2.140) estabelece que *uma seção de meio comprimento de onda transfere a impedância de carga para os terminais de entrada*. Convém observar que, segundo a Eq. (2.125), para uma linha de meio comprimento de onda com perdas a igualdade será válida somente se  $Z_L = Z_0$ .

Medindo a impedância de entrada de uma LT qualquer, com os terminais de carga em curto e em aberto, podemos determinar a *impedância característica* e a *constante de propagação* na linha. Usando a Eq. (2.125) obteremos, para os terminais de carga em aberto ( $Z_L \rightarrow \infty$ ),

$$Z_{ia} = Z_0 \coth(\gamma l). \tag{2.141}$$

Da mesma forma, para os terminais de carga em curto-circuito ( $Z_L = 0$ ),

$$Z_{ic} = Z_0 \tanh(\gamma l). \tag{2.142}$$

Multiplicando as Eqs. (2.141) e (2.142), e resolvendo para  $Z_0$ , temos:

$$Z_0 = \sqrt{Z_{ia}Z_{ic}}. \quad (2.143)$$

Dividindo (2.141) por (2.142), e resolvendo para  $\gamma$ , teremos:

$$\gamma = \frac{1}{l} \tanh^{-1} \left( \sqrt{\frac{Z_{ic}}{Z_{ia}}} \right). \quad (2.144)$$

As Eqs. (2.143) e (2.144) se aplicam a qualquer linha de transmissão, com ou sem perdas.

**Exemplo 2.7:**

As impedâncias medidas na entrada de uma seção de linha sem perdas, de comprimento  $l = 1,5 \text{ [m]} < \lambda/4$ , com os terminais de carga em aberto e curto-circuitados, são:  $Z_{ia} = -j54,6 \text{ [\Omega]}$  e  $Z_{ic} = j103 \text{ [\Omega]}$ , respectivamente. (a) Calcule  $Z_0$  e  $\gamma$ ; (b) Sem mudar a frequência de operação, encontre as impedâncias de entrada para terminais de carga em aberto e em curto, para  $l' = 2l \text{ [m]}$ . (c) Qual o comprimento da LT curto-circuitada de forma que a sua impedância de entrada se comporte como um circuito-aberto.

*Solução:*

a. 
$$Z_0 = \sqrt{Z_{ia}Z_{ic}} = \sqrt{54,6 \times 103} = 75 \text{ [\Omega]}$$

$$\gamma = \frac{1}{l} \tanh^{-1} \left( \sqrt{\frac{Z_{ic}}{Z_{ia}}} \right) = \frac{1}{1,5} \tanh^{-1} \left( \sqrt{\frac{j103}{-j54,6}} \right) = \frac{j}{1,5} \tan^{-1}(1,373) = j0,628 \text{ [rad/m]}$$

b. Para uma LT curto-circuitada com  $l' = 2l = 3 \text{ [m]}$ :

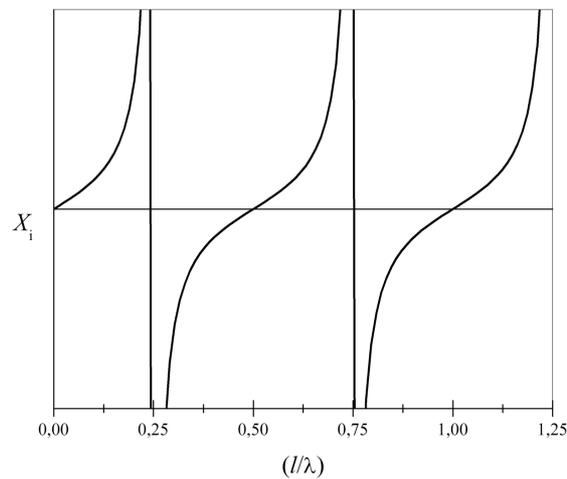
$$\gamma l' = j0,628 \times 3,0 = j1,884 \text{ [rad]}$$

$$Z_{ia} = Z_0 \coth(\gamma l) = j \frac{75}{\tan(1,884)} = j24,35 \text{ } [\Omega] \Rightarrow \text{impedância indutiva}$$

$$Z_{ic} = Z_0 \tanh(\gamma l) = j75 \tan(1,884) = -j231 \text{ } [\Omega] \Rightarrow \text{impedância capacitiva}$$

Dos resultados acima podemos concluir que:  $1,5 < \frac{\lambda}{4} < 3,0 \text{ } [\text{m}]$ .

- c. Para que a impedância de entrada de uma LT curto-circuitada esteja em aberto é necessário que a seção de LT tenha comprimento múltiplo ímpar de quarto-de-onda, como mostra a Figura 2.37.



**Figura 2.37:** Reatância de entrada para uma seção de LT com os terminais em curto-circuito.

Como  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{0,628} = 10 \text{ } [\text{m}]$ , então:

$$l = (2n-1) \frac{\lambda}{4} = \frac{10}{4} (2n-1), \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$l = 2,5 + 5(n-1) \text{ } [\text{m}]$$

Vamos, agora, analisar uma seção de linha de transmissão com perdas de comprimento  $l$  e com os terminais curto-circuitados. Nesse caso, a impedância de entrada será:

$$Z_i = Z_0 \tanh(\gamma l) = Z_0 \frac{\sinh[(\alpha + j\beta)l]}{\cosh[(\alpha + j\beta)l]} = Z_0 \frac{\sinh(\alpha l) \cos(\beta l) + j \cosh(\alpha l) \sin(\beta l)}{\cosh(\alpha l) \cos(\beta l) + j \sinh(\alpha l) \sin(\beta l)}. \quad (2.145)$$

Para  $l = n\frac{\lambda}{2}$ ,  $\beta l = n\pi$  e  $\sinh(\beta l) = \sin(\beta l) = 0$ . Dessa forma, a Eq. (2.145) reduz-se a,

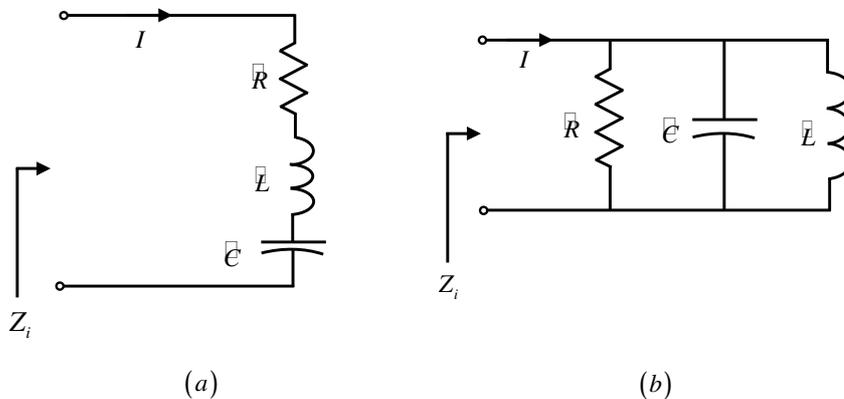
$$Z_{ic} = Z_0 \tanh(\alpha l).$$

Assumindo uma LT com baixas perdas (contudo, não nulas), isto é,  $\alpha l \ll 1$ , então:

$$Z_{ic} = Z_0 \tanh(\alpha l) \cong Z_0 (\alpha l), \quad (2.146)$$

onde  $Z_{ic}$  é pequeno, porém não-nulo. Assim, para  $l = n\lambda/2$  temos um *circuito ressonante em série*, como ilustra a Figura 2.38(a), onde, na ressonância,

$$Z_i = R.$$



**Figura 2.38:** (a) Circuito ressonante em série; (b) circuito ressonante paralelo.

Para uma seção de LT com perdas de comprimento múltiplo ímpar de  $\lambda/4$ , a impedância de entrada  $Z_i$  não tende a infinito, como mostra a Figura 2.35. Fazendo  $l = (2n-1)\lambda/4$ ,  $\beta l = [(2n-1)\pi]/2$  e  $\cos(\beta l) = 0$  na Eq. (2.145), assumindo, ainda,  $\alpha l \ll 1$ , temos:

$$Z_{ic} = \frac{Z_0}{\tanh(\alpha l)} \cong \frac{Z_0}{\alpha l}. \quad (2.147)$$

Como mostra a Eq. (2.147), para uma seção de comprimento  $l = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$  a impedância  $Z_{ic}$  é grande, porém finita, o que caracteriza um *circuito ressonante em paralelo*, Figura 2.38(b). Esse circuito é, portanto, um circuito seletivo em frequência e, sendo assim, podemos determinar seu *fator de qualidade* – Q, determinando sua *largura de banda de meia potência* ou *largura de banda*.

Em um circuito ressonante paralelo a largura de banda,  $\Delta f$ , é definida como:

$$\Delta f = f_2 - f_1$$

onde,

$$f_1 = f_0 - \frac{\Delta f}{2},$$

$$f_2 = f_0 + \frac{\Delta f}{2},$$

são as frequências de meia potência e  $f_0$  é a frequência ressonante.

Considerando o circuito paralelo da Figura 2.38(b) e utilizando os conhecimentos de teoria de circuitos elétricos, a impedância de entrada,  $Z_{ic}$ , pode ser calculada tal que,

$$Z_{ic} = \frac{1}{\bar{G} + j\bar{X}} = \frac{1}{\bar{G} - j\left(\frac{1}{\omega\bar{L}} - \omega\bar{C}\right)}, \quad (2.148)$$

onde,  $\bar{G} = 1/\bar{R}$  é a admitância do circuito na ressonância e  $\omega$  a frequência de operação. Sabendo que a potência média transferida ao circuito é

$$P_{av} = \frac{1}{2}|I|^2 \operatorname{Re}\{Z_{ic}\},$$

e que,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\{Z_{ic}\} &= \frac{1}{2}(Z_{ic} + Z_{ic}^*), \\ \operatorname{Re}\{Z_{ic}\} &= \frac{1}{2} \frac{2G}{G^2 + X^2}, \\ \operatorname{Re}\{Z_{ic}\} &= G|Z_{ic}|^2 = \frac{1}{R}|Z_{ic}|^2,\end{aligned}\tag{2.149}$$

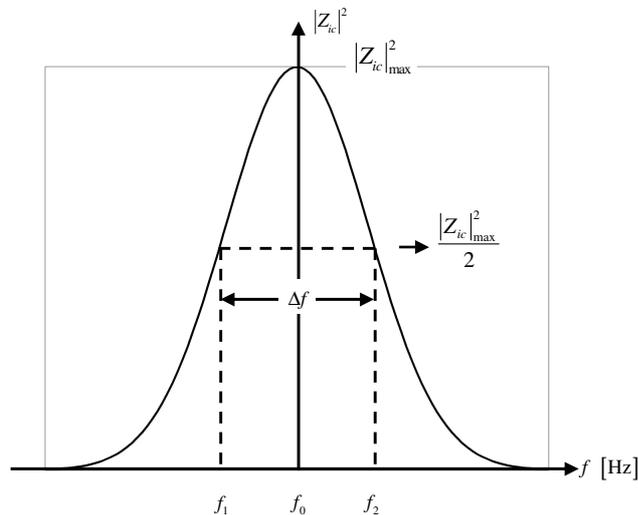
então:

$$P_{av} = \frac{1}{2R}|I|^2|Z_{i-c}|^2.\tag{2.150}$$

Assim, conforme mostra a Eq. (2.150), em um circuito paralelo potência média é diretamente proporcional à impedância de entrada  $Z_{ic}$  e, portanto, podemos determinar a largura de banda da seção de LT diretamente da curva  $|Z_{ic}|^2 \times f$ , como mostra a Figura 2.39.

Vamos assumir que  $f = f_0 + \delta f$ , onde  $\delta f$  é um pequeno desvio a partir da frequência de ressonância. Dessa forma,

$$\beta l = \frac{2\pi f}{u_p} l = \frac{2\pi(f_0 + \delta f)}{u_p} l.$$



**Figura 2.39:** Variação da impedância de entrada versus frequência em um circuito ressonante paralelo.

Tomando,

$$l = n \frac{\lambda}{4}, \quad \text{para } n = 1, 3, 5, \dots,$$

então,

$$\beta l = \frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2} \left( \frac{\delta f}{f_0} \right), \quad \text{para } n = 1, 3, 5, \dots \quad (2.151)$$

Lembrando que  $\frac{2\pi f_0}{u} = \frac{\omega_0}{u} = \frac{2\pi}{\lambda} = \beta_0$ , e assumindo  $\left( \frac{\delta f}{f_0} \right) \ll 1$ , temos:

$$\cos(\beta l) = -\text{sen} \left[ \frac{n\pi}{2} \left( \frac{\delta f}{f_0} \right) \right] \cong -\frac{n\pi}{2} \left( \frac{\delta f}{f_0} \right), \quad (2.152)$$

$$\text{sen}(\beta l) = \cos \left[ \frac{n\pi}{2} \left( \frac{\delta f}{f_0} \right) \right] \cong 1. \quad (2.153)$$

Substituindo as Eqs. (2.152) – (2.153) em (2.145), considerando ainda  $\alpha l \ll 1$ , obtemos:

$$\begin{aligned} Z_{ic} &\cong Z_0 \frac{j}{\cos(\beta l) + j \tanh(\alpha l)}, \\ Z_{ic} &\cong Z_0 \frac{j}{\cos(\beta l) + j\alpha l} = \frac{Z_0}{-j \cos(\beta l) + \alpha l}, \\ Z_{ic} &= \frac{Z_0}{\alpha l + j \frac{n\pi}{2} \left( \frac{\delta f}{f_0} \right)}, \end{aligned} \quad (2.154)$$

e,

$$|Z_{ic}|^2 = \frac{|Z_0|^2}{(\alpha l)^2 + \left[ \frac{n\pi}{2} \left( \frac{\delta f}{f_0} \right) \right]^2}. \quad (2.155)$$

Em  $f = f_0$ ,  $\delta f = 0$  e, portanto,  $|Z_{ic}|_{\max}^2$  será:

$$|Z_{ic}|_{\max}^2 = |Z_{ic}|_{f=f_0}^2 = \frac{|Z_0|^2}{(\alpha l)^2}.$$

Desta forma,

$$\frac{|Z_{ic}|^2}{|Z_{ic}|_{\max}^2} = \frac{P_{av}}{(P_{av})_{\max}} = \frac{1}{1 + \left[ \frac{n\pi}{2\alpha l} \left( \frac{\delta f}{f_0} \right) \right]^2}. \quad (2.156)$$

Quando  $\delta f = \pm \frac{\Delta f}{2}$  temos  $\frac{n\pi}{2\alpha l} \left( \frac{\delta f}{f_0} \right) = 1$  e, dessa forma, as frequências  $f_1$  e  $f_2$  são chamadas *frequências de meia potência*. Como  $\frac{n\pi}{2l} = \beta_0$ , nas frequências de meia potência podemos escrever,

$$\frac{n\pi}{2\alpha l} \left( \frac{\Delta f}{2f_0} \right) = \frac{\beta_0}{2\alpha} \frac{\Delta f}{f_0} = 1, \quad \text{para } n=1, 3, 5, \dots. \quad (2.157)$$

Desde modo, o fator de qualidade,  $Q$ , de um circuito ressonante paralelo, de uma seção de linha de transmissão com perdas e de comprimento múltiplo ímpar de quarto-de-onda, será:

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\beta_0}{2\alpha}. \quad (2.158)$$

Lembrado que, para uma linha de transmissão com baixas perdas,

$$\beta_0 = \omega\sqrt{LC},$$

e

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}} \right),$$

observando, ainda, que  $\frac{R}{L} \gg \frac{G}{C}$ , temos:

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \left( R + \frac{GL}{C} \right),$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} L \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right),$$

$$\alpha \cong \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} R = \frac{R}{2R_0}.$$

Sendo assim, a Eq. (2.158) pode ser reescrita como:

$$Q = \frac{\omega L}{R}. \quad (2.159)$$

A Tabela 2.2 apresenta um resumo dos resultados obtidos anteriormente.

**Tabela 2.2** – Características das seções de LT com baixas perdas.

	$l = n\lambda/4, n=1,3,5,\dots$	$l = n\lambda/2, n=1,2,3,\dots$
curto-circuito	ressonante paralelo	ressonante série
circuito aberto	ressonante série	ressonante paralelo

**Exemplo 2.8:**

O coeficiente de atenuação de uma linha coaxial, medida em 400 MHz, é 0,01 dB/m. Determine a o fator de qualidade,  $Q$ , e a largura de banda,  $\Delta f$ , uma seção de quarto-de-onda com terminação curto-circuitada.

*Solução:*

$$f_0 = 4 \times 10^8 \text{ [Hz]}$$

$$\lambda = \frac{c}{f_0} = \frac{3 \times 10^8}{4 \times 10^8} = 0,75 \text{ [cm]}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 8,38 \text{ [rad/m]}$$

$$\alpha = 0,01 \frac{\text{dB}}{\text{m}} = \frac{0,01}{8,69} = 0,0012 \left[ \frac{\text{Np}}{\text{m}} \right]$$

Assim, o fator de qualidade será:

$$Q = \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{8,38 \times 8,69}{2 \times 0,01} = 3641,$$

que é um o fator de qualidade muito maior do que se obteria em um circuito ressonante paralelo com parâmetro concentrados, operando em 400 MHz.

A largura de banda (banda passante) do sistema será:

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q} = 0,11 \text{ [MHz]} \text{ ou } 110 \text{ [kHz]}$$

## 2.10. Linhas de Transmissão com Terminação Resistiva

Quando a linha de transmissão é terminada com uma impedância de carga  $Z_L$  diferente da impedância característica da linha ( $Z_0$ ), existirão na linha ondas propagantes (que se propagam do gerador para a carga) e ondas contra-propagantes (propagando-se a partir da carga). Da Eq. (2.120), temos:

$$\begin{aligned} V(z') &= V^+(z') + V^-(z'), \\ V(z') &= V^+(z') \left[ 1 + \frac{V^-(z')}{V^+(z')} \right] = V^+(z') [1 + \Gamma(z')], \\ V(z') &= \frac{I_L}{2} [(Z_L + Z_0) \exp(\gamma z') + (Z_L - Z_0) \exp(-\gamma z')] \\ V(z') &= \frac{I_L}{2} (Z_L + Z_0) \exp(\gamma z') [1 + \Gamma_L \exp(-2\gamma z')], \\ V(z') &= \frac{I_L}{2} (Z_L + Z_0) \exp(\gamma z') [1 + \Gamma(z')], \end{aligned} \tag{2.160}$$

onde,

$$\Gamma(z') = \Gamma_L \exp(-2\gamma z'), \quad (2.161)$$

$$\Gamma_L = \Gamma(0) = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\Gamma_L| \exp(j\theta_r). \quad (2.162a)$$

$$Z_L = Z_0 \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L} \quad (2.162b)$$

O parâmetro  $\Gamma(z')$  é adimensional e é denominado *coeficiente de reflexão de tensão* na linha de transmissão. O parâmetro  $\Gamma_L$ , o *coeficiente de reflexão de tensão na carga* é, normalmente, uma grandeza complexa e com  $|\Gamma_L| < 1$ . A corrente correspondente à Eq. (2.160) será,

$$I(z') = \frac{I_L}{2Z_0} (Z_L + Z_0) \exp(\gamma z') [1 + \Gamma'(z')], \quad (2.163)$$

onde,

$$\Gamma'(z') = -\Gamma(z'), \quad (2.164)$$

é o *coeficiente de reflexão de corrente*, definido tal que:

$$\Gamma'(z') = \frac{I^-}{I^+} = -\frac{V^-}{V^+}. \quad (2.165)$$

Para uma linha de transmissão sem perdas,  $\gamma = j\beta$  e, portanto:

$$V(z') = \frac{I_L}{2} (Z_L + R_0) \exp(j\beta z') [1 + \Gamma_L \exp(-j2\beta z')],$$

$$V(z') = \frac{I_L}{2} (Z_L + R_0) \exp(j\beta z') \{1 + |\Gamma_L| \exp[j(\theta_r - 2\beta z')]\},$$

ou,

$$V(z') = \frac{I_L}{2} (Z_L + R_0) \exp(j\beta z') [1 + |\Gamma_L| \exp(j\phi)], \quad (2.166)$$

e,

$$I(z') = \frac{I_L}{2R_0} (Z_L + R_0) \exp(j\beta z') [1 - |\Gamma_L| \exp(j\phi)], \quad (2.167)$$

onde,

$$\phi = \theta_r - 2\beta z'. \quad (2.168)$$

Na forma hiperbólica temos que:

$$V(z') = I_L [Z_L \cosh(\gamma z') + Z_0 \sinh(\gamma z')], \quad (2.169)$$

$$I(z') = \frac{I_L}{Z_0} [Z_L \sinh(\gamma z') + Z_0 \cosh(\gamma z')]. \quad (2.170)$$

Para uma linha sem perdas, lembrando que  $\cosh(j\theta) = \cos(\theta)$ ,  $\sinh(j\theta) = j\sin(\theta)$  e considerando  $V_L = I_L R_L$ , temos:

$$V(z') = I_L Z_L \cos(\beta z') + j I_L R_0 \sin(\beta z'), \quad (2.171)$$

$$I(z') = I_L \cos(\beta z') + j \frac{V_L}{R_0} \sin(\beta z'). \quad (2.172)$$

Se a terminação é puramente resistiva  $Z_L = R_L$ , então:

$$|V(z')| = V_L \sqrt{\cos^2(\beta z') + \left(\frac{R_0}{R_L}\right)^2 \sin^2(\beta z')}, \quad (2.173)$$

$$|I(z')| = I_L \sqrt{\cos^2(\beta z') + \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^2 \sin^2(\beta z')}. \quad (2.174)$$

onde  $R_0 = \sqrt{L/C}$ .

Analogamente ao caso das ondas planas, podemos definir a razão entres os máximos e mínimos (tensão e/ou corrente) na linha de transmissão. Assim:

$$S = \frac{|V_{\max}|}{|V_{\min}|} = \frac{|I_{\max}|}{|I_{\min}|} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}, \quad (2.175)$$

onde  $S$  é um parâmetro adimensional, denominado: SWR (*standing-wave ratio*), TOE (*taxa de onda estacionária*) ou ainda ROE (*razão de onda estacionária*). A relação inversa à Eq. (2.175) define o módulo do coeficiente de reflexão. Assim:

$$|\Gamma| = \frac{S-1}{S+1}. \quad (2.176)$$

Normalmente, a taxa de onda estacionária é informada em dB, tal que,

$$S_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(S). \quad (2.177)$$

A Tabela 2.3 apresenta, a partir das Eqs. (2.175) e (2.176), os resultados comparativos para três cargas.

Obs.: Quando  $S$  é grande isso indica que existe um descasamento grande na carga (grande diferença entre a impedância característica e a impedância de carga), o que é indesejável.

**Tabela 2.3** – Coeficiente de reflexão e TOE para três tipo de carga em LT sem perdas.

CARGA	$Z_L$	$\Gamma_L$	$S$
casada	$Z_0$	0	+1
curto	0	-1	$\infty$
aberto	$\infty$	+1	$\infty$

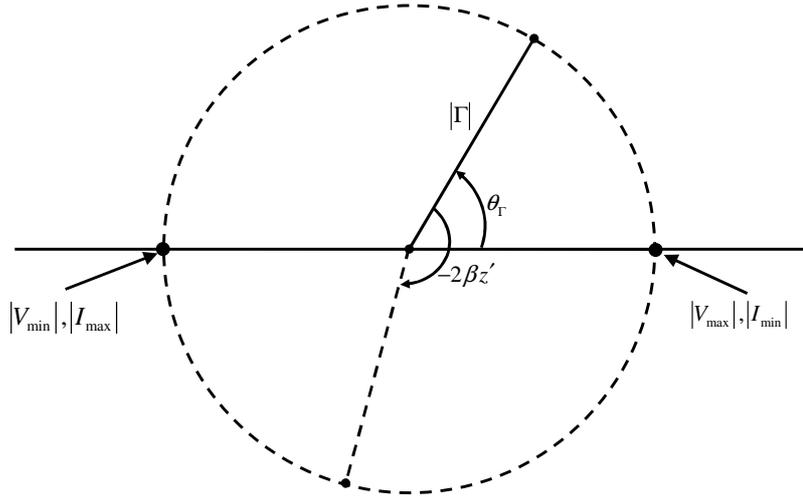
Examinando as Eqs. (2.166) e (2.167), observamos que  $|V_{\max}|$  e  $|I_{\min}|$  ocorrem quando,

$$\theta_{\Gamma} - 2\beta z'_m = -2n\pi, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots. \quad (2.178)$$

Por outro lado,  $|V_{\min}|$  e  $|I_{\max}|$ , ocorrem quando,

$$\theta_{\Gamma} - 2\beta z'_m = -(2n+1)\pi, \quad \text{para } n=0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.179)$$

As relações apresentadas nas Eqs. (2.178) e (2.179) podem ser facilmente retiradas da representação fasorial, ilustrada na Figura 2.40 para tensão e/ou corrente na linha como função de  $\theta_{\Gamma}$  e  $z'$ .



**Figura 2.40:** Representação fasorial para tensão e corrente ao longo da linha.

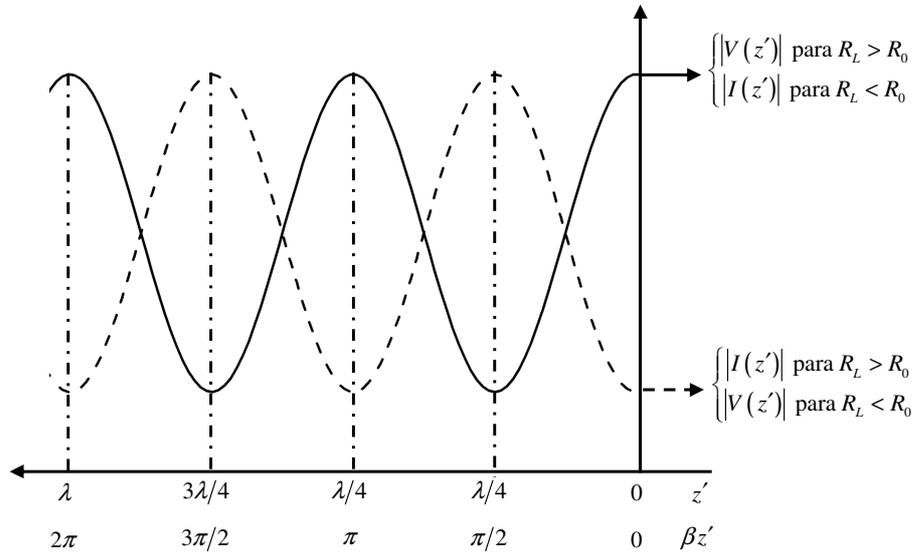
Para uma LT sem perdas e com carga resistiva, isto é,  $Z_0 = R_0$  e  $Z_L = R_L$ , podemos reescrever a Eq. (2.162), tal que:

$$\Gamma_L = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}. \quad (2.180)$$

Nesse caso, o coeficiente de reflexão é puramente real, e dois casos são possíveis:

- a.  $R_L > R_0$  – aqui  $\Gamma_L > 0$  e, portanto,  $\theta_{\Gamma} = 0$ . No ponto  $z' = 0$  a condição (2.178) é satisfeita para  $n=0$ , significando um máximo de tensão (mínimo de corrente) sobre a carga resistiva. Outro máximo de tensão da onda estacionária estará localizado no ponto  $z' = n\lambda/2$ , para  $n=1, 2, \dots$ , medido a partir da carga;
- b.  $R_L < R_0$  – aqui  $\Gamma_L < 0$  e, portanto,  $\theta_{\Gamma} = -\pi$ . No ponto  $z' = 0$  a condição (2.179) é satisfeita para  $n=0$ , significando um mínimo de tensão (máximo de corrente) sobre a carga resistiva. Outro mínimo de tensão da onda estacionária estará localizado no ponto  $z' = n\lambda/2$ , para  $n=1, 2, \dots$ , medido a partir da carga.

A Figura 2.41 ilustra o padrão de onda estacionária típico para uma carga resistiva, obtido diretamente das Eqs. (2.173) e (2.174), respectivamente. Assim, para  $R_L > R_0$ ,



**Figura 2.41:** Padrão de onda estacionária de tensão e corrente para uma linha sem perdas e com carga resistiva.

$$|V_{\max}| = V_L \text{ e } |I_{\min}| = I_L, \quad (2.181)$$

então,

$$|V_{\min}| = \frac{R_0}{R_L} V_L \text{ e } |I_{\max}| = \frac{R_L}{R_0} I_L, \quad (2.182)$$

Para  $R_L < R_0$ ,

$$|V_{\min}| = V_L \text{ e } |I_{\max}| = I_L, \quad (2.183)$$

e, portanto,

$$|V_{\max}| = \frac{R_0}{R_L} V_L \text{ e } |I_{\min}| = \frac{R_L}{R_0} I_L, \quad (2.184)$$

O padrão de onda estacionária para uma carga em aberto é similar ao padrão para uma carga  $R_L > R_0$ , exceto pelo fato de que as curvas  $|V(z')|$  e  $|I(z')|$  são funções senoidais da posição  $z'$ .

Assim, tomando as Eqs. (2.173) e (2.174) e fazendo  $R_L \rightarrow \infty$ , temos:

$$|V(z')| = V_L |\cos(\beta z')|, \quad (2.185a)$$

$$|I(z')| = \frac{V_L}{R_0} |\text{sen}(\beta z')|. \quad (2.185b)$$

De forma similar, padrão de onda estacionária para uma carga curto-circuitada, ilustrado na Figura 2.42, é similar àquele apresentado para uma carga  $R_L < R_0$ , sendo as curvas  $|V(z')|$  e  $|I(z')|$  funções senoidais da posição  $z'$ . Assim, tomando as Eqs. (2.173) e (2.174) e fazendo  $R_L = 0$ , temos:

$$|V(z')| = I_L R_0 |\text{sen}(\beta z')|, \quad (2.186a)$$

$$|I(z')| = I_L |\cos(\beta z')|. \quad (2.186b)$$

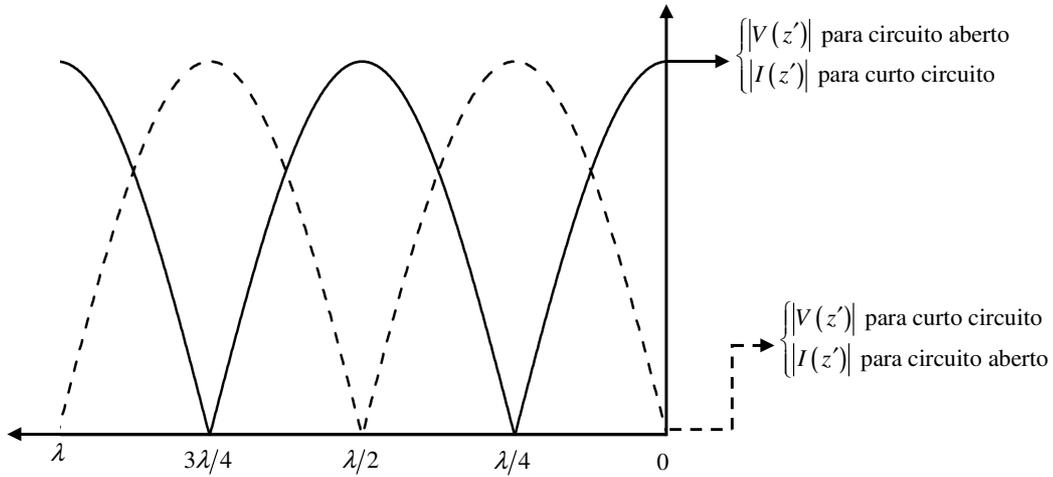
A partir de (2.185) podemos verificar que para terminais de carga em aberto ( $R_L \gg 1$ ),  $|I(0)| = I_L = 0$ , contudo,  $|V(0)| = V_L$  é finita. De forma dual, as Eqs. (2.186) mostram que, para os terminais em curto ( $R_L \ll 1$ )  $|V(0)| = V_L = 0$ , enquanto a corrente na carga é finita e igual a:  $|I(0)| = I_L$ .

### **Exemplo 2.9:**

A taxa de onda estacionária de uma LT é facilmente mensurável através de um medidor de SWR – SWRM (“standing-wave ratio meter”). (a) Mostre como o valor de uma carga  $R_L$  pode ser determinado a partir da medida de  $S$ ; (b) Qual a impedância da linha “vista em direção à carga”, a uma distância  $z' = \lambda/4$ ?

*Solução:*

(a.1) Se  $R_L > R_0$ , então  $\theta_\Gamma = 0$  e, portanto  $|V_{\max}|$  e  $|I_{\min}|$  ocorrem para  $\beta z' = 0$ , enquanto  $|V_{\min}|$  e  $|I_{\max}|$  ocorrem para  $\beta z' = \pi/2$ . Usando as Eqs. (2.171) e (2.172), temos:



**Figura 2.42:** Padrão de onda estacionária para uma LT sem perdas com terminais em curto e em aberto.

$$|V_{\max}| = V_L \quad \text{e} \quad |I_{\min}| = I_L,$$

$$|V_{\min}| = \frac{R_0}{R_L} V_L \quad \text{e} \quad |I_{\max}| = \frac{R_L}{R_0} I_L.$$

Assim,

$$S = \frac{|V_{\max}|}{|V_{\min}|} = \frac{|I_{\max}|}{|I_{\min}|} = \frac{R_L}{R_0},$$

$$R_L = SR_0$$

(a.2) Se  $R_L < R_0$ , então  $\theta_{\Gamma} = -\pi$  e,  $|V_{\min}|$  e  $|I_{\max}|$  ocorrem para  $\beta z' = 0$ , enquanto  $|V_{\max}|$  e  $|I_{\min}|$  ocorrem para  $\beta z' = \pi/2$ . Usando as Eqs. (2.181) e (2.182), temos:

$$|V_{\min}| = V_L \quad \text{e} \quad |V_{\max}| = \frac{R_0}{R_L} V_L,$$

$$|I_{\max}| = I_L \quad \text{e} \quad |I_{\min}| = \frac{R_L}{R_0} I_L,$$

e,

$$S = \frac{|V_{\max}|}{|V_{\min}|} = \frac{|I_{\max}|}{|I_{\min}|} = \frac{R_0}{R_L}, \quad R_L = \frac{R_0}{S}$$

(b) Como em  $z' = \lambda/4$ ,  $\beta z' = \pi/2$ ,  $\cos(\beta z') = 0$  e  $\sin(\beta z') = 1$ . Assim, levando tais condições nas Eqs. (2.171) e (2.172), temos:

$$V(\lambda/4) = jI_L R_0 \text{ e } I(\lambda/4) = j \frac{V_L}{R_0}, \text{ logo,}$$

$$Z_i(\lambda/4) = \frac{V(\lambda/4)}{I(\lambda/4)} = \frac{I_L R_0^2}{V_L} = \frac{R_0^2}{R_L}$$

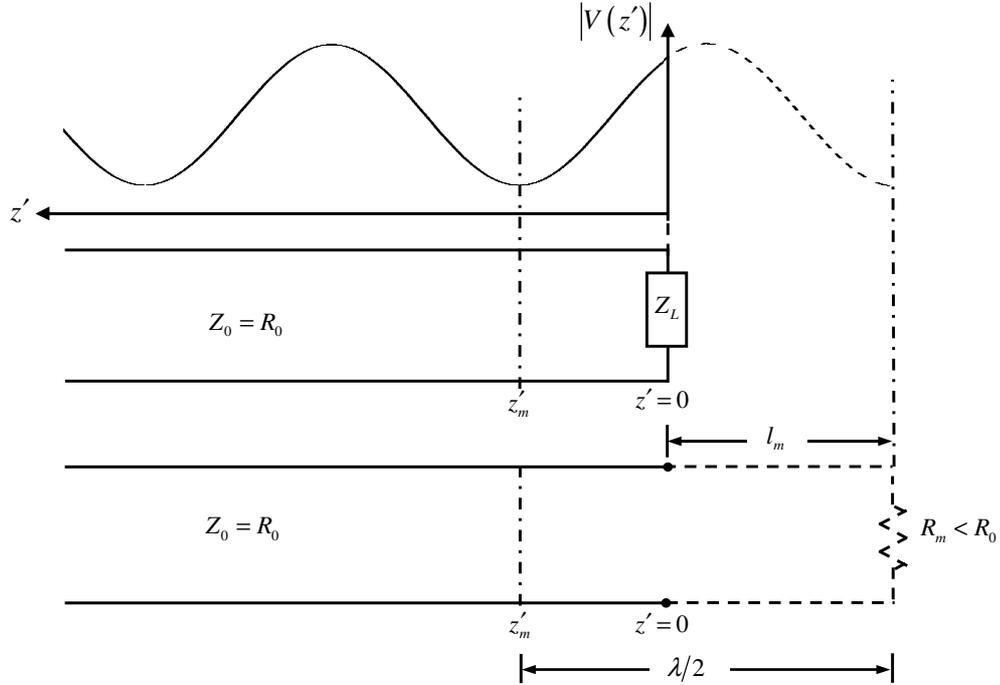
$$Z_i(\lambda/4) = \frac{R_0^2}{R_L}.$$

Obs: O resultado acima lembra o “transformador de quarto-de-onda”.

## 2.11. Linhas com Terminação Arbitrária

As análises anteriores foram realizadas considerando-se linhas de transmissão sem perdas e com cargas puramente resistivas, de tal maneira que sobre a carga havia sempre um máximo de tensão (e mínimo de corrente) se  $R_L > R_0$  e um mínimo de tensão (e máximo de corrente) se  $R_L < R_0$ . Nesta seção analisaremos uma situação geral, quando a linha é terminada com uma carga arbitrária, discutindo o que acontece na linha quando a carga não é puramente resistiva. Vamos assumir que uma impedância de carga  $Z_L = R_L + jX_L$ , gerando o padrão de onda estacionária mostrado na Figura 2.42. Como podemos observar, sobre a carga, em  $z' = 0$ , não há máximo ou mínimo de tensão. Considerando a característica periódica do padrão de onda estacionária, se assumirmos que este se prolonga por uma distância  $l_m$  à direita da carga, então alcançará um mínimo de tensão, conforme ilustra a parte pontilhada do padrão de onda estacionária mostrado na Figura 2.42, caso a carga  $Z_L$  fosse substituída por uma seção de LT de comprimento  $l_m$  e com

terminação  $R_m$ , ( $R_m < R_0$ ). Convém observar que a distribuição de tensão na linha, à esquerda do ponto  $z' = 0$ , não seria alterada por essa mudança.



**Figura 2.40:** Padrão de onda estacionária de tensão para uma LT sem perdas com carga arbitrária e linha equivalente com seção de comprimento  $l_m$  e terminal resistivo.

Segundo a Eq. (2.125), a impedância de uma seção de uma LT sem perdas, de comprimento  $l_m$ , e terminada com carga  $R_m$ , será:

$$Z_i = Z_L = R_0 \frac{R_m + jR_0 \tan(\beta l_m)}{R_0 + jR_m \tan(\beta l_m)}. \quad (2.187)$$

Sabendo que

$$R_m = \frac{R_0}{S}, \quad (2.188)$$

então,

$$Z_i = Z_L = R_0 \frac{1 + jS \tan(\beta l_m)}{S + j \tan(\beta l_m)}. \quad (2.189)$$

Como,

$$l_m = \frac{\lambda}{2} - z'_m, \quad (2.190)$$

então a Eq. (2.189) pode ser reescrita como,

$$Z_i = Z_L = R_0 \frac{1 - jS \tan(\beta z'_m)}{S - j \tan(\beta z'_m)}. \quad (2.191)$$

O procedimento descrito acima e resumido na Eq. (2.191), onde a impedância  $Z_L$  é expressa em termos da razão de onda estacionária ( $S$ ) na linha e a distância da carga ao primeiro mínimo ( $z'_m$ ) pode ser realizado experimentalmente. A seguir apresentamos os passos para tal procedimento:

1. Determinar  $|\Gamma_L|$  a partir da Eq. (2.176),

$$|\Gamma| = \frac{S-1}{S+1}.$$

2. Calcular  $\theta_\Gamma$  a partir de  $z'_m$  usando a Eq. (2.179), para  $n=0$ , isto é:

$$\theta_\Gamma = 2\beta z'_m - \pi.$$

3. Determinar  $Z_L$  a partir da razão entre as Eqs. (2.166) e (2.167) em  $z'=0$ , tal que:

$$Z_L = R_L + jX_L = R_0 \frac{1 + |\Gamma| \exp(j\theta_\Gamma)}{1 - |\Gamma| \exp(j\theta_\Gamma)}. \quad (2.192a)$$

$$Z_L = R_0 \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \quad (2.192b)$$

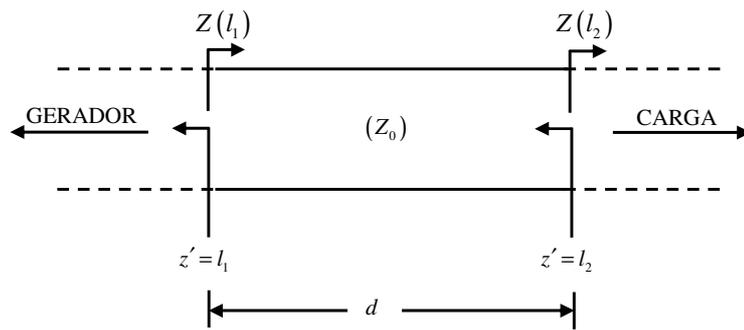
onde  $\Gamma = |\Gamma| \exp(j\theta_\Gamma)$ . Conforme comentado anteriormente, o valor de  $R_m$  pode ser determinado a partir da medição de  $S$ , tal que  $R_m = R_0/S$ , onde  $R_0$  é a resistência característica da linha sem perdas.

O procedimento anterior mostra como determinar a impedância de carga usando  $S$ ,  $z'_m$  e a determinação da distância entre a carga e o primeiro mínimo de tensão ( $l_m$ ). Obviamente, o mesmo procedimento pode ser adotado tomando como referência o primeiro máximo de tensão ( $R_m > R_0$ ) à esquerda da carga. Para tanto, basta observar que, para  $R_m > R_0$ ,  $z'_m + l_m = \lambda/2$  e  $R_m = SR_0$ .

Os resultados descritos anteriormente podem ser generalizados para uma situação arbitrária. Para demonstrar tal propriedade, vamos considerar o circuito da Figura 2.43. A partir da Eq. (2.125), a impedância no ponto  $l_1$  pode ser determinada, conhecendo-se a impedância no ponto  $l_2$ , o comprimento da seção e seus parâmetros característicos (impedância característica e constante de propagação). Portanto, para uma linha sem perdas:

$$Z(l_1) = R_0 \frac{Z(l_2) + jR_0 \tan[\beta(l_1 - l_2)]}{R_0 + jZ(l_2) \tan[\beta(l_1 - l_2)]}. \quad (2.193)$$

De forma simétrica, a impedância no ponto  $l_2$  pode ser determinada, conhecendo-se a impedância no ponto  $l_1$ , o comprimento da seção e seus parâmetros característicos (impedância característica e constante de propagação). Assim:



**Figura 2.44:** Seção de linha de transmissão de comprimento  $d$ .

$$Z(l_2) = R_0 \frac{Z(l_1) + jR_0 \tan[\beta(l_2 - l_1)]}{R_0 + jZ(l_1) \tan[\beta(l_2 - l_1)]}. \quad (2.194)$$

Entretanto,

$$\tan[\beta(l_2 - l_1)] = -\tan[\beta(l_1 - l_2)],$$

$$l_1 - l_2 = d,$$

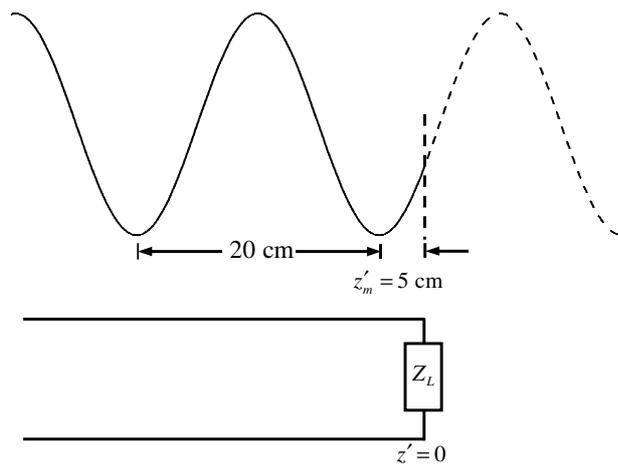
logo,

$$Z(l_1) = R_0 \frac{Z(l_2) + jR_0 \tan[\beta d]}{R_0 + jZ(l_2) \tan[\beta d]}, \quad (2.195a)$$

$$Z(l_2) = R_0 \frac{Z(l_1) - jR_0 \tan[\beta d]}{R_0 - jZ(l_1) \tan[\beta d]}. \quad (2.195b)$$

**Exemplo 2.10:**

A taxa de onda estacionária de uma LT sem perdas de  $50 [\Omega]$ , em cujos terminais de carga está conectada uma carga desconhecida, é igual a 3,0. A distância entre dos mínimos de tensão adjacentes é  $20 [\text{cm}]$ , e o primeiro mínimo está localizado a  $5 [\text{cm}]$  da carga. (a) Determine o coeficiente de reflexão  $\Gamma$ . (b) Determine a impedância de carga  $Z_L$ . (c) Calcule o comprimento de uma seção equivalente e como sua carga resistiva, tal que sua impedância de entrada seja igual a  $Z_L$ .



*Solução:*

(a)  $\lambda = 2 \times 0,2 = 0,4$  [m],  $|\Gamma| = \frac{S-1}{S+1} = 0,5$ ,  $\theta_\Gamma = 2\beta z'_m - \pi = -0,5\pi$  [rad], logo:

$$\Gamma = |\Gamma| \exp(j\theta_\Gamma) = -j0,5$$

(b) Usando a Eq. (2.192) temos que:  $Z_L = 50 \left( \frac{1-j0,5}{1+j0,5} \right)$

$$Z_L = 30 - j40 \text{ } [\Omega]$$

(c) Sabendo que,  $l_m + z'_m = \lambda/2$  e  $R_m = R_0/S$ , tomamos o primeiro mínimo à direita. Assim:

$$l_m = 0,15 \text{ } [\text{m}].$$

$$R_m = 16,7 \text{ } [\Omega]$$

Outra solução pode ser encontrada considerando o *primeiro máximo* à direita. Assim, sabendo que  $z'_m + l'_m = \lambda/4$ , então,  $l'_m$ , a distância da carga ao primeiro máximo à direita, será:

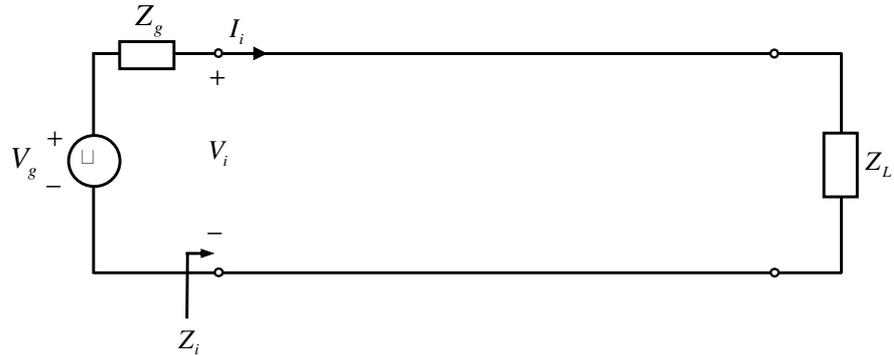
$$l'_m = 0,05 \text{ } [\text{m}]$$

A impedância  $R'_m = SR_0$  será:

$$R'_m = 150 \text{ } [\Omega]$$

## 2.12. Linha de Transmissão como Circuito – Solução Completa

Até aqui nossa análise em regime estacionário tem considerado apenas uma das condições de contorno para a solução geral (2.113) – (2.114), a condição de contorno da carga,  $V_L = I_L Z_L$ , cuja solução fechada é apresentada nas Eqs. (2.120) – (2.121). Entretanto, a solução em regime estacionário para tensão e corrente em uma linha de transmissão pode, também, ser apresentada a partir de sua segunda condição de contorno, os *efeitos do gerador* sobre a linha de transmissão.



**Figura 2.44:** Circuito da linha de transmissão em função dos parâmetros de entrada.

Analisando o circuito da Figura 2.44 podemos facilmente determinar a tensão na linha em  $z = 0$ , onde  $V_i$  será:

$$V_i = V_g - I_i Z_g. \quad (2.196)$$

A partir da determinação da tensão de entrada podemos determinar  $V(z)$  e  $I(z)$  completamente, em termos de  $V_g$ ,  $Z_g$ ,  $\gamma$ ,  $Z_0$ ,  $l$  e  $Z_L$ . Das Eqs. (2.160) e (2.163), fazendo  $z' = l$ , temos que:

$$V_i = \frac{I_L}{2} (Z_L + Z_0) \exp(\gamma l) [1 + \Gamma_L \exp(-2\gamma l)], \quad (2.197a)$$

$$I_i = \frac{I_L}{2Z_0} (Z_L + Z_0) \exp(\gamma l) [1 - \Gamma_L \exp(-2\gamma l)] \quad (2.197b)$$

Substituindo (2.197a) e (2.197b) em (2.196), temos:

$$\frac{I_L}{2} (Z_L + Z_0) \exp(\gamma l) = \frac{Z_0 V_g}{Z_g + Z_0} \frac{1}{[1 - \Gamma_g \Gamma_L \exp(-2\gamma l)]}, \quad (2.198)$$

onde  $\Gamma_g$  é o coeficiente de reflexão no gerador, tal que,

$$\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0}. \quad (2.199)$$

Substituindo (2.198) nas Eqs. (2.160) e (2.163), temos,

$$V(z') = \frac{Z_0 V_g}{Z_g + Z_0} \exp(-\gamma z) \frac{1 + \Gamma_L \exp(-2\gamma z')}{[1 - \Gamma_g \Gamma_L \exp(-2\gamma l)]}, \quad (2.200a)$$

$$I(z') = \frac{V_g}{Z_g + Z_0} \exp(-\gamma z) \frac{1 - \Gamma_L \exp(-2\gamma z')}{[1 - \Gamma_g \Gamma_L \exp(-2\gamma l)]}, \quad (2.200b)$$

onde  $z = l - z'$ .

As Eqs. (2.200) são expressões fasoriais que descrevem a variação de tensão e corrente na linha de transmissão como função dos parâmetros do gerador e, embora não sejam expressões simples, podem ser utilizadas para uma interpretação do fenômeno transmissão que ocorre nas LT's. Para tal análise tomaremos da tensão na linha, descrita pela Eq. (2.200a), como objeto de estudo e, obviamente, a análise da corrente, através da Eq. (2.200b), é similar. Desta forma, assumindo que  $|\Gamma_g \Gamma_L| < 1$ , podemos expandir o fator  $[1 - \Gamma_g \Gamma_L \exp(-2\gamma l)]^{-1}$  em uma série geométrica, tal que:

$$\frac{1}{[1 - \Gamma_g \Gamma_L \exp(-2\gamma l)]} = 1 + \Gamma_g \Gamma_L \exp(-2\gamma l) + \Gamma_g^2 \Gamma_L^2 \exp(-4\gamma l) + \dots \quad (2.201)$$

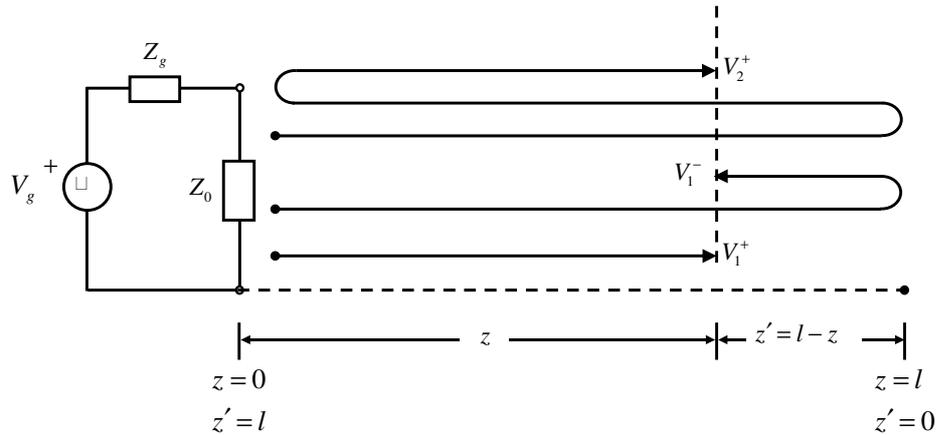
Substituindo (2.201) em (2.200a), temos,

$$V(z') = \frac{Z_0 V_g}{Z_g + Z_0} \exp(-\gamma z) [1 + \Gamma_L \exp(-2\gamma z')] [1 + \Gamma_g \Gamma_L \exp(-2\gamma l) + \Gamma_g^2 \Gamma_L^2 \exp(-4\gamma l) + \dots],$$

$$V(z') = \frac{Z_0 V_g}{Z_g + Z_0} \left\{ \exp(-\gamma z) + [\Gamma_L \exp(-\gamma l)] \exp(-\gamma z') + \Gamma_g [\Gamma_L \exp(-2\gamma l)] \exp(-\gamma z) + \dots \right\} \quad (2.202)$$

A Eq. (2.202) pode ser reescrita de forma compacta, em termos das ondas propagantes na linha (nas direções  $+z$  e  $-z$ ), como ilustra a Figura 2.45, tal que:

$$V(z') = V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^- + \dots, \quad (2.203)$$



**Figura 2.45:** Circuito da linha de transmissão e as ondas propagantes.

onde,

$$V_1^+ = V_M \exp(-\gamma z), \quad (2.204a)$$

$$V_1^- = \Gamma_L [V_M \exp(-\gamma l)] \exp(-\gamma z'), \quad (2.204b)$$

$$V_2^+ = \Gamma_g [\Gamma_L V_M \exp(-2\gamma l)] \exp(-\gamma z), \quad (2.204c)$$

⋮

e,

$$V_M = \frac{Z_0 V_g}{Z_g + Z_0}. \quad (2.204d)$$

Assim, se  $Z_L = Z_0$  (carga casada),  $\Gamma_L = 0$ , não há reflexões e apenas a onda de tensão  $V_1^+$  se propaga na linha. Se  $Z_L \neq Z_0$ , mas  $Z_g = Z_0$ , então  $\Gamma_L \neq 0$   $\Gamma_g = 0$ , há apenas as ondas  $V_1^+$  e  $V_1^-$ .

**Exemplo 2.11:**

Um gerador operando em 100 [MHz], com  $V_g = 10 \angle 0^\circ$  [V] e  $Z_g = 50$  [ $\Omega$ ] está conectado a uma LT isolada a ar, com  $Z_0 = 50$  [ $\Omega$ ] e 3,6 [m] de comprimento, em cujos terminais está conectada uma carga  $Z_L = 25 + j25$  [ $\Omega$ ]. Determine: (a)  $V(z)$ , onde  $z$  é a coordenada referenciada à entrada. (b) As tensões  $V_i$  e  $V_L$ . (c) a taxa de onda estacionária na linha. (d) a potência média entregue à carga.

Solução:

$$\begin{aligned} V_g &= 10\angle 0^\circ \text{ [V]}, & Z_g &= 50 \text{ [\Omega]} & f &= 10^8 \text{ [Hz]} \\ Z_0 &= 50 \text{ [\Omega]} & Z_L &= 35,36\angle 45^\circ \text{ [\Omega]} & l &= 3,6 \text{ [m]} \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \times 10^8}{3 \times 10^8} = \frac{2\pi}{3} \text{ [rad/m]} \qquad \beta l = 2,4\pi \text{ [rad]}$$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 0,447\angle 116,6^\circ = 0,447\angle 0,648\pi$$

(a) Levando os dados acima na Eq. (2.198)

$$V(z) = 5 \left\{ \exp\left(-j\frac{2\pi}{3}z\right) + 0,447 \exp\left[j\left(\frac{2}{3}z - 0,152\right)\pi\right] \right\} \text{ [V]}$$

(b) Levando os dados acima na Eq. (2.194)

$$V_i = V(0) = 7,06\angle -8,43^\circ \text{ [V]} \text{ em } z = 0$$

$$V_L = V(l) = 4,47\angle -45,5^\circ \text{ [V]} \text{ em } z = l$$

(c) 
$$\text{VSWR} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = 2,62$$

(d) 
$$P_{av} = \frac{1}{2} \left| \frac{V_L}{Z_L} \right|^2 R_L$$

$$P_{av} = \frac{1}{2} \left| \frac{4,47}{35,36} \right|^2 \times 25 = 0,2 \text{ [W]}$$

Vamos comparar o resultado anterior com a potência entregue à uma carga  $Z_L = 50 \text{ [\Omega]}$  e, portanto,  $\Gamma_L = 0$ . Dessa forma,

$$|V_L| = |V_i| = \frac{V_g}{2} = 5 \text{ [V]}.$$

Dessa forma, a potência máxima transferida à carga será:

$$P_{av} = \frac{V_L^2}{2R_L} = \frac{5^2}{2 \times 50} = 0,25 \text{ [W]},$$

que é maior que a potência média calculada para uma linha descasada, pois, para uma linha de transmissão sem perdas, com carga casada no gerador,

$$1 - \frac{P_{av}}{P_{av}|_{\max}} = |\Gamma_L|^2, \text{ ou } 1 + T = R$$

onde  $T = \frac{P_{av}}{P_{av}|_{\max}}$  e  $R = |\Gamma_L|^2$ . Assim, a diferença entre a potência máxima e a potência entregue

a uma carga descasada será,

$$P_{av}|_{\max} - P_{av} = |\Gamma_L|^2 P_{av}|_{\max}$$

$$P_{av}|_{\max} - P_{av} = 0,05 \text{ [W]}$$

## 2.13. Carta de Smith

### 2.13.1. Carta de Smith para uma Linha sem Perdas

Os cálculos envolvendo dos parâmetros da linha de transmissão – impedância, tensão, corrente, etc., envolvem trabalhos manipulações de números complexos que podem ser minimizadas através de métodos gráficos. O melhor e mais difundido método gráfico, conhecido como *carta de Smith*, foi desenvolvido por P. H. Smith em 1944.

Sucintamente, a carta de Smith é a representação gráfica, no plano do coeficiente de reflexão, da impedância (ou admitância) normalizada. Para entender o processo de cálculo, para uma linha sem perdas, através da carta de Smith é conveniente discutirmos o processo de construção da carta. Para tal, vamos examinar o coeficiente de reflexão de tensão na carga, definido na Eq. (2.162),

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\Gamma_L| \exp(j\theta_\Gamma). \quad (2.205)$$

Normalizando a impedância de carga  $Z_L$ , com relação à impedância característica  $Z_0$ , temos:

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{R_L}{Z_0} + j \frac{X_L}{Z_0} = r + jx, \quad (2.206)$$

onde  $r$  e  $x$  são a resistência e a reatância normalizadas, respectivamente. A partir do resultado apresentado em (2.206), a Eq. (2.205) pode ser reescrita em função da impedância de carga normalizada, isto é,

$$\Gamma_L = \Gamma_r + j\Gamma_i = \frac{z_L - 1}{z_L + 1}, \quad (2.207)$$

onde  $\Gamma_r$  e  $\Gamma_i$  são as partes real e imaginária do coeficiente de reflexão de tensão, respectivamente. A Eq. (2.207) pode ser escrita de forma inversa, tal que,

$$z_L = r + jx = \frac{(1 + \Gamma_r) + j\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r) - j\Gamma_i}. \quad (2.208)$$

Multiplicando (2.208) por seu complexo conjugado e separando as partes reais e imaginárias, obtemos:

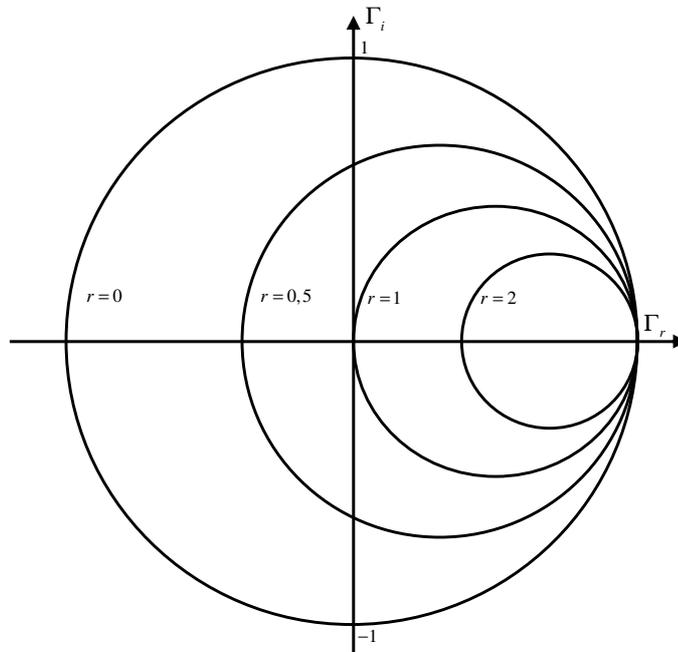
$$r = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2}, \quad (2.209)$$

$$x = \frac{2\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2}. \quad (2.210)$$

A Eq. (2.209) pode ser rearranjada, tal que,

$$\left( \Gamma_r - \frac{r}{1+r} \right)^2 + \Gamma_i^2 = \left( \frac{1}{1+r} \right)^2. \quad (2.211)$$

A Eq. (2.211) representa, no plano  $\Gamma_r \times \Gamma_i$ , o lugar geométrico para  $r$  constante – circunferência de raio  $1/(1+r)$ , centrada nos pontos  $\Gamma_r = r/(1+r)$  e  $\Gamma_i = 0$ . Assim, variando-se os valores de  $r$  obteremos uma família de circunferências, conforme ilustrado na Figura 2.46.



**Figura 2.46:** Lugar geométrico para valores constantes de  $r$ .

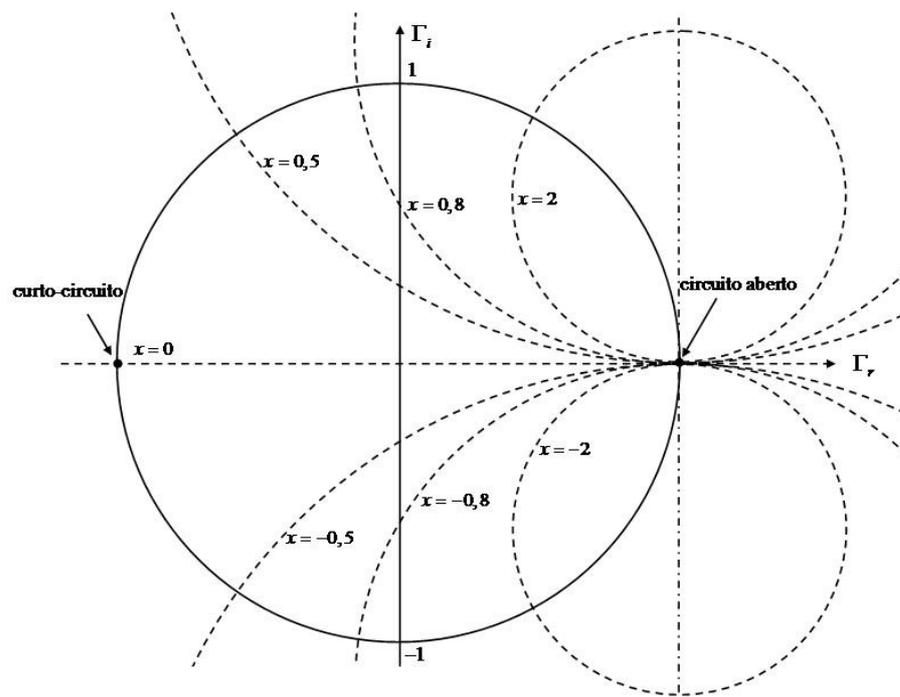
Convém, ainda, ressaltar algumas características importantes da família de circunferência descritas pela Eq. (2.211):

1. Os centros de todas as circunferências localizam-se sobre o eixo  $\Gamma_r$ ;
2. A circunferência  $r = 0$  tem raio unitário e está centrada no ponto  $(0,0)$ ;
3. As circunferências tornam-se progressivamente menores com o aumento da resistência normalizada  $r$ ;
4. A circunferência  $r \rightarrow \infty$  tem raio nulo e está centrada no ponto circunferências;
5. Todas as circunferências passam pelo ponto circunferências,

Da mesma maneira, a Eq. (2.210) pode ser rearranjada tal que,

$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2. \quad (2.212)$$

A Eq.(2.212) descreve o lugar geométrico para a reatância normalizada,  $x$ , constante, sendo uma equação de circunferência de raio  $1/|x|$ , com centro nos pontos  $\Gamma_r = 1$  e  $\Gamma_i = 1/x$ . Assim, diferentes valores da reatância normalizada  $x$  geram circunferências com diferentes raios, todas centradas em  $(1, 1/x)$ . A família de circunferências, geradas a partir da Eq. (2.212), está ilustrada na Figura 2.47 (curva pontilhada) para alguns valores de  $x$ .



**Figura 2.47:** Lugar geométrico para valores constantes de  $x$ .

Assim, como no caso anterior, convém observar algumas características dessa família de curvas:

1. Os centros de todas as circunferências estão localizados na reta  $\Gamma_r = 1$ . As circunferências associadas aos valores  $x > 0$  (reatância indutiva) estão localizadas acima do eixo  $\Gamma_r$ , enquanto as circunferências associadas aos valores  $x < 0$  (reatância capacitiva) estão localizadas abaixo do eixo  $\Gamma_r$ ;
2. Para  $x = 0$  a circunferência coincide com o eixo  $\Gamma_r$ ;

3. As circunferências tornam-se progressivamente menores com o aumento de  $|x|$ ;
4. A circunferência  $x \rightarrow \pm\infty$  tem raio nulo e está centrada no ponto  $(1,0)$ ;
5. Todas as circunferências passam pelo ponto  $(1,0)$ .

A carta de Smith é uma carta de impedâncias, composta pela superposição dos lugares geométricos para  $r$  e  $x$  constantes, ilustrados individualmente nas Figuras 2.46 e 2.47, respectivamente, para  $|\Gamma| \leq 1$ . A Figura 2.48 apresenta um modelo da carta elaborada por P. H. Smith. Pode ser provado que as circunferências  $r$  e  $x$  são ortogonais entre si em qualquer ponto. A intersecção uma circunferência  $r$  e uma circunferência  $x$  define um ponto  $P$  que representa uma impedância normalizada  $z = r + jx$ . Como o módulo do coeficiente de reflexão é constante, em uma LT sem perdas, este pode ser representado na carta de Smith como uma circunferência de raio  $|\Gamma| = |\Gamma_L|$ . Observe ainda que a carta possui quatro escalas (raias) externas indicando os *ângulos dos coeficientes de transmissão e reflexão* (em graus), além das *distâncias medidas do gerador para a carga e da carga para o gerador* (normalizadas em relação ao comprimento de onda).

Até aqui baseamos nossa discussão e a construção da carta de Smith na definição do coeficiente de reflexão de tensão na carga. Entretanto, sabendo que a impedância medida a uma distância  $d$  da carga é a razão entre  $V(d)$  e  $I(d)$ , usando as Eqs. (2.166) e (2.167) para  $z' = d$ , temos que:

$$Z(d) = Z_0 \left[ \frac{1 + \Gamma \exp(-j2\beta d)}{1 - \Gamma \exp(-j2\beta d)} \right]. \quad (2.213)$$

A impedância no ponto  $d$ , normalizada em relação à  $Z_0$  será,

$$z = \frac{Z(d)}{Z_0} = \left[ \frac{1 + \Gamma \exp(-j2\beta d)}{1 - \Gamma \exp(-j2\beta d)} \right],$$

ou

$$z = \left[ \frac{1 + |\Gamma| \exp(j\phi)}{1 - |\Gamma| \exp(j\phi)} \right], \quad (2.214)$$

onde,

$$\phi = \theta_r - 2\beta d. \quad (2.215)$$

A Eq. (2.175) mostra a relação entre as tensões máxima e mínima em uma LT descasada, onde:

$$S = \frac{1 + |\Gamma_r|}{1 - |\Gamma_r|}. \quad (2.216)$$

Fazendo  $\phi = 0$  na Eq. (2.214) e comparando com (2.216), vemos que a taxa de onda estacionária  $S$ , pode ser lida da carta no ponto onde a circunferência  $|\Gamma|$  intercepta o eixo  $\Gamma_r$ .

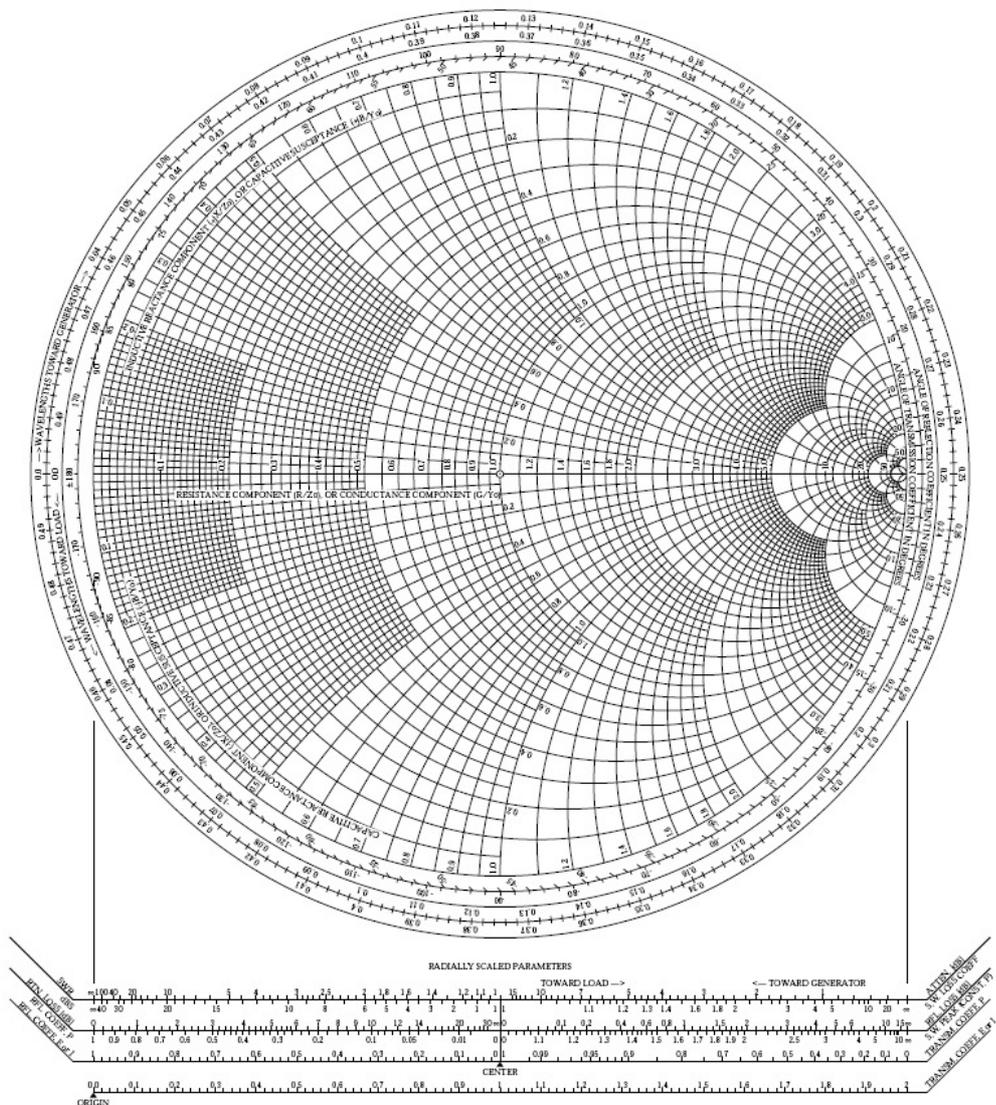


Figura 2.48: Carta de Smith

**Exemplo 2.12:**

Use a carta de Smith para determinar a impedância de entrada de uma seção de LT sem perdas de  $50 \text{ } [\Omega]$ , de comprimento igual a um décimo de comprimento de onda curto-circuitada em seus terminais de carga.

Solução:  $Z_L = 0 \text{ } [\Omega]$   $Z_0 = 50 \text{ } [\Omega]$   $\frac{l}{\lambda} = 0,1$

- ✓ Marcamos na carta de Smith a interseção das curvas  $r = 0$  e  $x = 0$  (ponto  $P_{SC}$  no extremo esquerdo da carta – veja a Figura 2.49;
- ✓ Percorremos, ao longo do perímetro da carta ( $|\Gamma| = 1$ ), a distância  $0,1\lambda$  no sentido “em direção ao gerador” (sentido horário) e marque um ponto  $P_1$ ;
- ✓ Em  $P_1$  lemos os valores da impedância normalizada –  $r = 0$  e  $x \cong \sim 0,725$ , ou  $z_i = j0,725$ .
- ✓ A impedância na entrada da LT é determinada multiplicando a impedância normalizada  $z_i$  pela impedância característica da linha. Assim:

$$Z_i = Z_0 z_i = 50(j0,725) = j36,3 \text{ } [\Omega]$$

Obs: Este resultado por ser determinado a partir da Eq. (2.125)

$$Z_i = jZ_0 \tan(\beta l) = j50 \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} 0,1\lambda\right)$$

$$Z_i = j50 \tan(0,2\pi) = j36,3 \text{ } [\Omega]$$

**Exemplo 2.13:**

Uma linha de transmissão sem perdas, de comprimento normalizado  $0,434\lambda$  e impedância característica  $100 \text{ } [\Omega]$ , possui em seus terminais uma carga  $Z_L = 260 + j180 \text{ } [\Omega]$ . Encontre: (a) o

coeficiente de reflexão de tensão na entrada; (b) a taxa de onda estacionária, (c) a impedância de entrada, (d) a localização do(s) máximo(s) de tensão na linha.

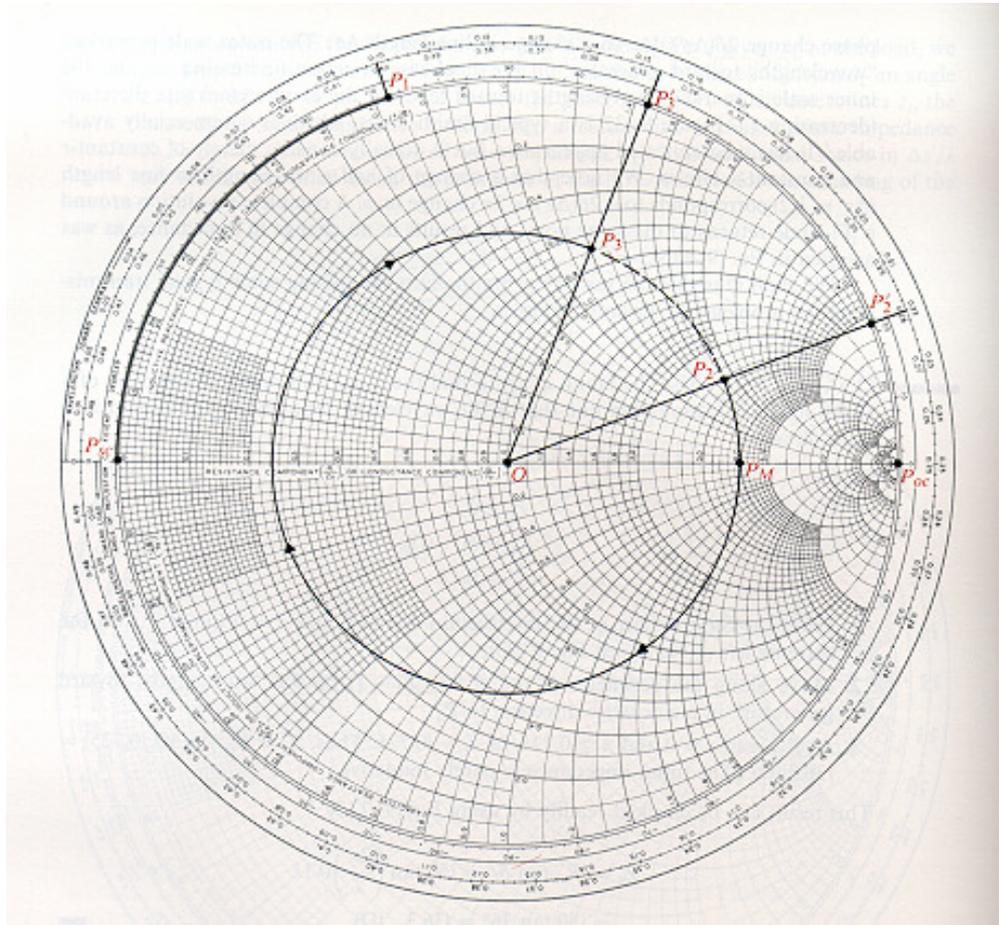


Figura 2.49: Cálculos na carta de Smith para os exemplos 2.12 e 2.13.

Solução:

$$Z_L = 260 + j180 \text{ } [\Omega] \quad Z_0 = 100 \text{ } [\Omega] \quad \frac{l}{\lambda} = 0,434$$

Normalizando a impedância de carga em relação à impedância de entrada, temos:

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_0} = 2,60 + j1,80.$$

b. Para determinarmos o coeficiente de reflexão na entrada seguimos os seguintes passos:

- ✓ Marcamos  $z_L = 2,6 + j1,8$  na carta de Smith, indicado pelo ponto  $P_2$  na Figura 2.49;

- ✓ Com um compasso centrado no ponto  $O$ ,  $(1,0)$ , traçamos uma circunferência de raio  $\overline{OP_2} = |\Gamma_L| = 0,60$  (o raio da carta é unitário);
- ✓ Traçamos uma linha reta  $OP_2'$ , estendendo-a até o ponto  $P_2'$ , onde lemos  $0,220$  na escala “comprimentos de onda para o gerador”. O ângulo de fase do coeficiente de reflexão pode ser lido diretamente:  $\theta_r \cong 21^\circ$ . Assim:

$$\Gamma_L = |\Gamma_L| \exp(j\theta_r) = 0,60 \angle 21^\circ.$$

- c. No ponto onde a circunferência de raio  $|\Gamma_L| = 0,60$  intercepta eixo real  $OP_{OC}$  lemos diretamente a taxa de onda estacionária. Assim:

$$S = 4.$$

- d. Para determinarmos a impedância de entrada procedemos da seguinte maneira:
- ✓ Caminhamos sobre a circunferência de raio  $|\Gamma_L| = 0,60$  a partir do ponto  $P_2'$ , na escala “em direção ao gerador”, uma distância igual ao comprimento da linha normalizado, isto é,  $0,434$ . Como uma volta completa na carta é igual à  $0,5\lambda$ , então o ponto de entrada na LT será determinado no ponto  $P_3'$ , onde lemos  $0,154$  na escala “comprimento de onda para o gerador”.
  - ✓ Traçamos uma reta  $OP_3'$ , e no ponto onde essa reta intercepta a circunferência de raio  $|\Gamma_L| = 0,60$ , marcamos o ponto  $P_3$ ;
  - ✓ Lemos a impedância definida pelo ponto  $P_3$ , onde  $r \cong 0,69$  e  $x \cong 1,2$ . Assim:

$$Z_i = Z_0 z_i = 100(0,69 + j1,2) = 69 + j120 \text{ } [\Omega].$$

- e. Como podemos observar, ao nos deslocarmos, na carta, do ponto  $P_2$  ao ponto  $P_3$  cruzamos duas vezes o eixo real, uma em  $r = 0,24$  e outra em  $r = 4$ , onde existe um mínimo e um máximo de tensão, respectivamente. Assim, entre a carga e a entrada da LT existe apenas um máximo de tensão.

### Exemplo 2.14:

Resolver o problema apresentado no Exemplo 2.10 usando a carta de Smith.

*Solução:*

- a. No semi-eixo real-positivo  $OP_{OC}$ , localizamos o ponto  $P_M$ , definido por  $r = S = 3,0$ , como mostra a Figura 2.50. Assim, o segmento  $\overline{OP_M}$  define o módulo do coeficiente de reflexão na LT sem perdas, isto é:  $\overline{OP_M} = |\Gamma| = 0,5$ ;

- b. Para determinarmos a impedância de carga procedemos da seguinte maneira:

- ✓ Traçamos uma circunferência de raio  $\overline{OP_M}$ , que intercepta o semi-eixo  $P_{SC}O$  no ponto  $P_m$ , posição de um mínimo de tensão;
- ✓ Como  $z'_m = 0,05 / 0,4 = 0,125$ , a partir do ponto  $P_{SC}$ , nos deslocamos 0,125 na escala “comprimentos de onda para a carga” (sentido anti-horário) até o ponto  $P'_L$ ;
- ✓ Traçamos uma reta  $OP'_L$ , que intercepta a circunferência  $|\Gamma| = 0,5$  em  $P_L$ . Este ponto representa a impedância de carga normalizada;
- ✓ O ângulo do coeficiente de reflexão pode ser lido diretamente da carta, tal que,  $\theta_r = -90^\circ$ . Assim:

$$\Gamma = 0,5 \angle -90^\circ = -j0,5.$$

- ✓ A impedância de carga é lida diretamente a partir do ponto  $P_L$ , pois:  $z_L = 0,60 - j0,80$ . Assim:

$$Z_L = 30 - j40 \text{ } [\Omega].$$

- c. O comprimento de seção equivalente e assim como sua carga resistiva para que sua impedância de entrada seja igual a  $Z_L$  pode ser determinado facilmente:

$$l_m = \frac{\lambda}{2} - z'_m = 0,2 - 0,05 = 0,15 \text{ } [\text{m}],$$

$$R_m = \frac{R_0}{S} = \frac{50}{3} = 16,7 \text{ } [\Omega].$$

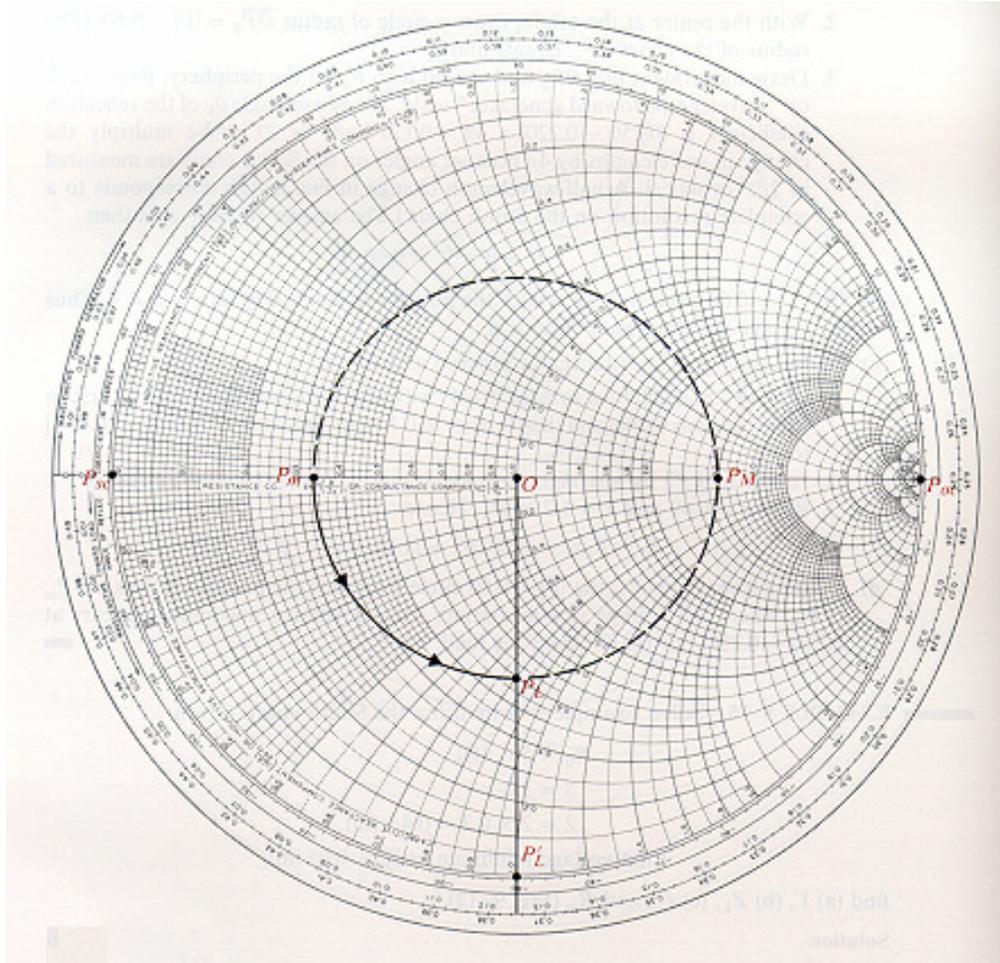


Figura 2.50: Cálculos na carta de Smith para o exemplo 2.14.

### 2.13.2. Carta de Smith em uma Linha com Perdas

Na discussão da seção anterior, nos cálculos utilizando a carta de Smith consideramos uma linha sem perdas. Para uma seção de linha dissipativa de baixas perdas ( $\alpha \ll 1$ ), de comprimento  $d$ , se o fator de atenuação  $2\alpha d$  não puder ser desprezado quando comparado com a unidade, o módulo do coeficiente de reflexão no ponto qualquer  $z' = d$  pode ser calculado diretamente da Eq. (2.161), tal que,

$$|\Gamma(d)| = |\Gamma_L| \exp(-2\alpha d). \quad (2.217)$$

Assim, a Eq. (2.214) deve ser corrigida para levar em conta as perdas na linha. isto é,

$$z = \left[ \frac{1 + |\Gamma_L| \exp(-2\alpha d) \exp(-j2\beta d)}{1 - |\Gamma_L| \exp(-2\alpha d) \exp(-j2\beta d)} \right]$$

ou, como

$$z = \left[ \frac{1 + |\Gamma_L| \exp(-2\alpha d) \exp(j\phi)}{1 - |\Gamma_L| \exp(-2\alpha d) \exp(j\phi)} \right], \quad (2.218)$$

onde  $\phi$  é dado pela Eq. (2.215). A Eq. (2.218) mostra que para encontrar a impedância normalizada  $z$  a partir de  $z_L$ , não podemos simplesmente percorrer a circunferência  $|\Gamma|$  de um ângulo  $\phi$ . Um cálculo auxiliar faz-se necessário para determinar o valor do módulo do coeficiente de reflexão no ponto  $z' = d$ . É fundamental observar, ainda, que na carta de Smith as distâncias são normalizadas em função do comprimento de onda de operação  $\lambda$ .

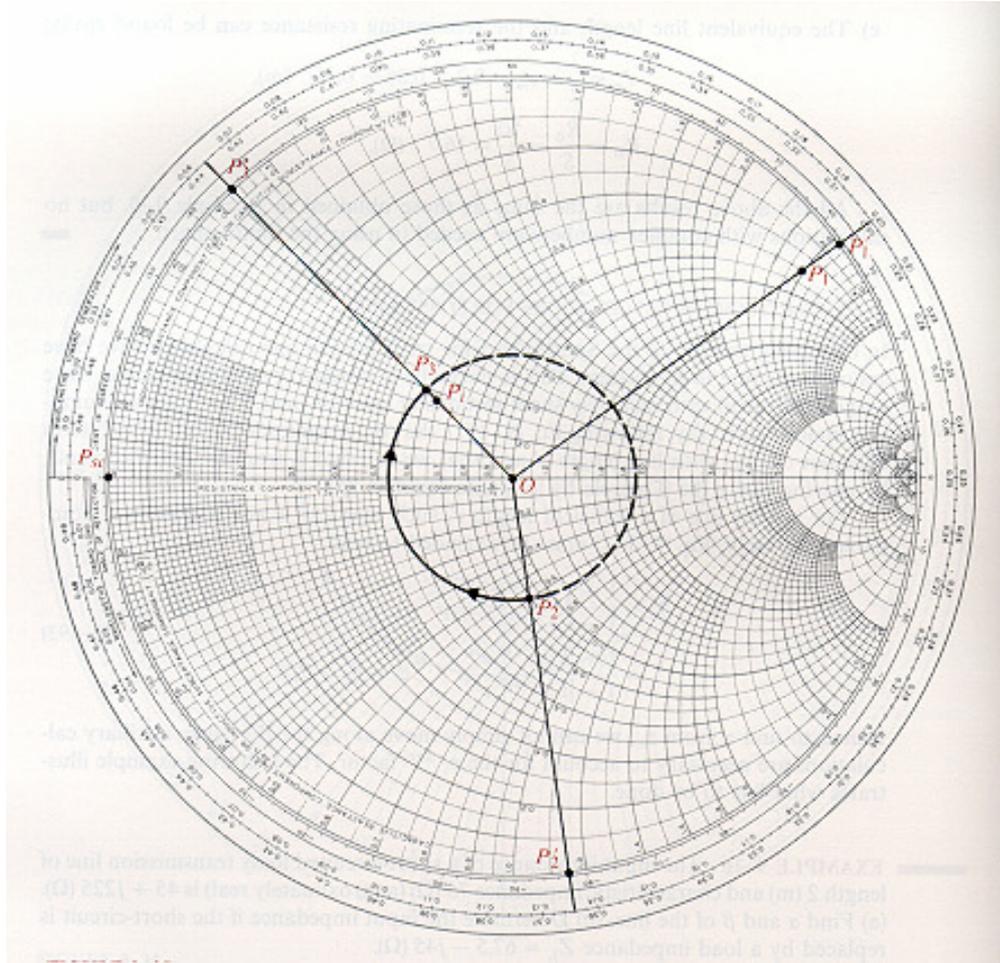
### **Exemplo 2.15:**

A impedância de entrada de uma LT com perdas, com 2 [m] de comprimento e impedância característica de 75 [ $\Omega$ ] (aproximadamente real), curto-circuitada em seus terminais, é  $45 + j225$  [ $\Omega$ ]. (a) Determine  $\alpha$  e  $\beta$  da LT. (b) Determine a impedância de entrada se o curto-circuito é substituído pela impedância  $Z_L = 67,5 - j45$  [ $\Omega$ ].

*Solução:*

- a. O curto-circuito é marcado na carta no ponto  $P_{sc}$  (ponto extremo esquerdo na carta de Smith).
  - ✓ Marcamos  $z_{il} = 0,60 + j3,0$  na carta de Smith, indicado pelo ponto  $P_1$  (veja Fig. 2.51);
  - ✓ Traçamos uma linha reta a partir do ponto  $O$ , através de  $P_1$ , até do ponto  $P'_1$ ;
  - ✓ Sabendo que  $\overline{OP_1}/\overline{OP'_1} = \exp(-2\alpha l) = 0,89$ , então:

$$\alpha = \frac{1}{2l} \ln \left( \frac{1}{0,89} \right) = \frac{1}{4} \ln(1,124) = 0,029 \text{ [Np/m]};$$



**Figura 2.51:** Cálculos na carta de Smith uma LT com perda – exemplo XV.

- ✓ Observando que o arco  $P_{sc}P'_1$  é igual a 0,20 (na escala “comprimento de onda para o gerador”) então,  $l/\lambda = 0,20$  e  $2\beta l = 4\pi l/\lambda = 0,8\pi$ . Assim:

$$\beta = \frac{0,8\pi}{2l} = \frac{0,8\pi}{4} = 0,2\pi \text{ [rad/m]}.$$

- b. Para determinar a impedância de entrada para a carga  $Z_L = 67,5 - j45 \text{ } [\Omega]$ :
- ✓ Entramos com  $z_L = Z_L/Z_0 = 0,9 - j0,6$  na carta, marcando com o ponto  $P_2$ ;
  - ✓ Traçamos uma linha reta a partir do ponto  $O$ , através de  $P_2$ , até do ponto  $P'_2$ , onde na escala “comprimentos de onda para o gerador” lemos 0,364;

- ✓ Com o auxílio de um compasso traçamos uma circunferência centrada no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_2}$ ;
- ✓ Deslocamos o ponto  $P_2'$  de uma distância  $0,20$ , longo da escala “comprimento de onda para o gerador”, até o ponto  $P_3'$ , onde lemos  $0,364 + 0,20 = 0,564$  ou  $0,064$ ;
- ✓ Unimos o ponto  $P_3'$  ao ponto  $O$  através de uma linha reta, intersectando a circunferência traçada anteriormente no ponto  $P_3$ ;
- ✓ Sabendo que  $\overline{OP_i}/\overline{OP_3} = \exp(-2\alpha l) = 0,89$ , marcamos o ponto  $P_i$  sobre a reta  $\overline{OP_3}$ ;
- ✓ No ponto  $P_i$  lemos a impedância de entrada normalizada  $z_i = 0,64 + j0,27$ . Assim:

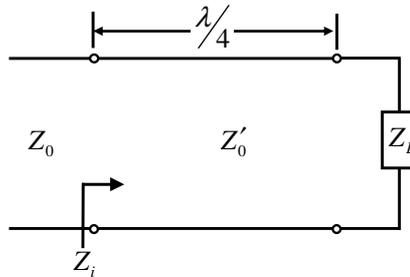
$$Z_i = 48,0 + j20,3 \text{ } [\Omega].$$

## 2.14. Casamento de Impedância em Linhas de Transmissão

Conforme mencionamos anteriormente, as linhas de transmissão são usadas para transmitir potência e informação. Em radiofrequências (transmissão de informação), além da condição de perdas mínimas, é altamente desejável que o máximo de potência seja transmitida do gerador para a carga e que o mínimo de potência seja dissipada na linha. Isto exige que a linha esteja casada, de tal maneira que a taxa de onda estacionária seja unitária, ou o mais próximo possível da unidade. Para transmissão de informação é essencial que a linha esteja casada, uma vez que as reflexões provenientes do descasamento da carga distorcerão a informação transmitida. A seguir discutiremos alguns métodos para o casamento de impedância em linhas de transmissão sem perdas. Contudo, convém ressaltar que tais métodos não produzirão os mesmos efeitos em linhas de transmissão de potência ( $60 \text{ [Hz]}$ ), visto que as perdas são consideráveis e, geralmente, essas linhas têm um pequeno comprimento quando comparado ao comprimento de onda (da ordem de  $10^6 \text{ [m]}$ ) e, por este motivo, as linhas de potência são analisadas em termos de uma rede equivalente a parâmetros concentrados.

### 2.14.1. Casamento de Impedância com Transformador de Quarto-de-Onda

Como vimos na seção 2.9.3, um método simples para o casamento de uma carga resistiva  $Z_L = R_L$  com uma LT sem perdas de característica  $Z_0$  é a inserção de um *transformador de quarto-de-onda* com impedância característica  $Z'_0$ . Assim, se:



$$Z_i = \frac{(Z'_0)^2}{Z_L},$$

$$Z'_0 = \sqrt{Z_i Z_L},$$

e, sendo

$$Z_i = Z_0,$$

$$Z'_0 = R'_0,$$

então:

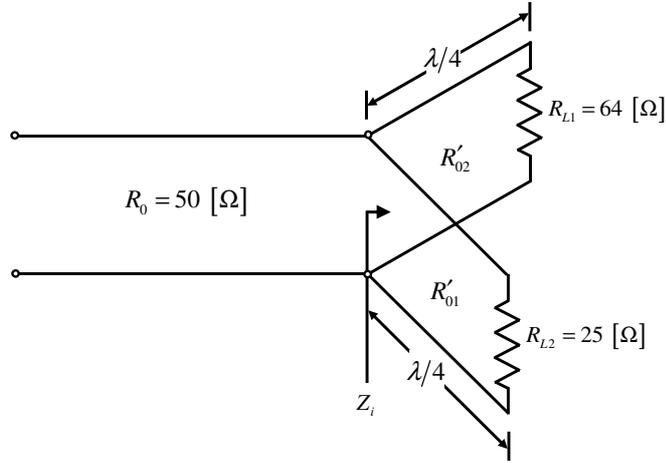
$$R'_0 = \sqrt{R_0 R_L}. \quad (2.219)$$

Entretanto, como o comprimento da seção depende do comprimento de onda, esta técnica de casamento é sensível à frequência como os outros métodos discutidos à seguir.

### **Exemplo 2.16:**

Um gerador de sinais é utilizado para alimenta igualmente duas cargas,  $R_{L1} = 64 [\Omega]$  e  $R_{L2} = 25 [\Omega]$ , através de uma LT sem perdas de  $R_0 = 50 [\Omega]$ . Para tanto, são usados transformadores de quarto-de-onda, como ilustra a Figura 2.52. (a) Determine as impedâncias características dos transformadores de quarto-de-onda. (b) Determine a taxa de onda estacionária nas seções de quarto-de-onda.

Solução:  $R_{L1} = 64 \text{ } [\Omega]$   $R_{L2} = 25 \text{ } [\Omega]$   $R_0 = 50 \text{ } [\Omega]$



**Figura 2.52:** Casamento de impedância com transformador de quarto-de-onda.

a. Para alimentar igualmente as duas cargas, a impedância de entrada na junção dos transformadores e a linha principal deve ser igual a  $Z_i = R_0$  e, para isso, visto que os terminais de entrada das seções de quarto-de-onda estão em paralelo,  $R_{i1} = R_{i2} = 2R_0 = 100 \text{ } [\Omega]$ . Assim:

$$R'_{01} = \sqrt{R_{i1}R_{L1}} = \sqrt{100 \times 64} = 80 \text{ } [\Omega],$$

$$R'_{02} = \sqrt{R_{i2}R_{L2}} = \sqrt{100 \times 25} = 50 \text{ } [\Omega].$$

b. Sob a condição de casamento não há ondas estacionárias na LT principal ( $S = 1$ ). As taxas de ondas estacionárias nas duas seções de linhas são calculadas como segue.

Seção 1:

$$\Gamma_1 = \frac{R_{L1} - R'_{01}}{R_{L1} + R'_{01}} = \frac{64 - 80}{64 + 80} = -0,11,$$

$$S_1 = \frac{1 + |\Gamma_1|}{1 - |\Gamma_1|} = \frac{1 + 0,11}{1 - 0,11} = 1,25.$$

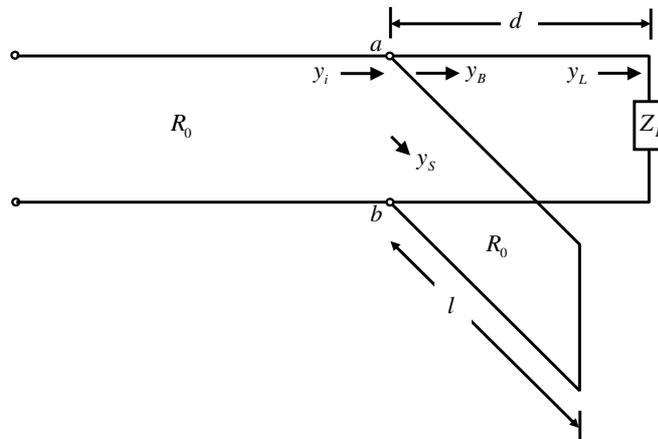
Seção 2:

$$\Gamma_2 = \frac{R_{L2} - R'_{02}}{R_{L2} + R'_{02}} = \frac{25 - 50}{25 + 50} = -0,33,$$

$$S_2 = \frac{1 + |\Gamma_2|}{1 - |\Gamma_2|} = \frac{1 + 0,33}{1 - 0,33} = 1,99.$$

### 2.14.2. Casamento de Impedância com Toco-Simples

Quando a inserção de um transformador de quarto-de-onda não é viável, o casamento de impedância pode ser obtido pela colocação de pequenas seções de linha de transmissão, com os terminais em curto ou em aberto, em série ou paralelo com a linha principal. Este método é conhecido como casamento de impedância com *toco-simples* (em inglês, single-stub method). Tal processo consiste em determinar o comprimento  $l$  do toco e sua distância da carga,  $d$ , de maneira que a impedância no ponto de conexão do toco seja igual à impedância característica da linha principal; a Figura 2.53 ilustra o método apresentando o casamento de impedância com um toco curto-circuitado conectado em paralelo à linha no ponto a – b.



**Figura 2.53:** Casamento de impedância pelo método do toco simples.

A conexão em paralelo da linha com carga  $Z_L$  e um toco-simples no ponto a – b visto na Figura 2.53, sugere que é mais simples analisar o circuito em termos de admitâncias. A exigência básica é,

$$Y_i = Y_B + Y_S, \quad (2.220a)$$

$$Y_i = Y_0 = \frac{1}{R_0}. \quad (2.220b)$$

Em termos de admitâncias normalizadas, a Eq. (2.220a), combinada com (2.220b), pode ser escrita como:

$$1 = y_B + y_S, \quad (2.221)$$

onde  $y_B = R_0 Y_B = g_B + jb_B$  é a admitância de entrada da seção de carga e  $y_S = R_0 Y_S$  é a admitância de entrada do toco. De qualquer modo, como a admitância de entrada do toco é puramente susceptiva,  $y_S$  é puramente imaginário. Como consequência, a Eq. (2.221) pode ser satisfeita somente se

$$y_B = 1 + jb_B, \quad (2.222)$$

e,

$$y_S = -jb_B, \quad (2.223)$$

onde  $b_B$  pode ser positivo ou negativo. Nosso objetivo é, então, encontrar o comprimento  $d$  tal que a admitância  $y_B$  tenha uma *componente real unitária* e encontrar o comprimento do stub,  $l$ , necessário para cancelar a *parte imaginária da admitância*  $y_B$ .

Usando a carta de Smith como uma carta de admitância, os seguintes procedimentos são necessários para os cálculos do toco-simples:

1. Localizar  $y_L$  na carta;
2. Caminhar na carta em direção ao gerador até interceptar, em dois pontos, a circunferência  $g_B = 1$ . Nesses pontos  $y_{B1} = 1 + jb_{B1}$  e  $y_{B2} = 1 + jb_{B2}$  – ambas são soluções possíveis;
3. Anotar os comprimentos das seções de linha de comprimento  $d_1$  e  $d_2$  e os valores das admitâncias normalizadas  $y_{B1}$  e  $y_{B2}$ ;
4. Localizar a admitância de saída do toco (zero ou infinita);
5. Caminhar na carta em direção ao gerador até localizar os pontos  $jb_{B1}$  e  $jb_{B2}$  e determine os respectivos comprimentos  $l_1$  e  $l_2$ .



- ✓ Marcamos  $z_L$  na carga se Smith, indicado pelo ponto  $P_1$  na Figura 2.54;
- ✓ Traçamos uma circunferência  $|\Gamma|$ , centrada em  $O$  e com raio  $\overline{OP_1}$ ;
- ✓ Traçamos uma linha reta a partir do ponto  $P_1$ , passando pelo ponto  $O$ , até o ponto  $P'_2$ , intersectando a circunferência  $|\Gamma|$  em  $P_2$ , que representa  $y_L$ . No ponto  $P'_2$  lemos na escala “comprimentos de onda para o gerador”, 0,109;
- ✓ Anotamos os valores de admitância nos dois pontos onde a circunferência  $|\Gamma|$  intersecta o círculo  $g = 1$ :

$$\text{Em } P_3: y_{B1} = 1 + j1,2 = 1 + jb_{B1},$$

$$\text{Em } P_4: y_{B1} = 1 - j1,2 = 1 + jb_{B2};$$

- ✓ Para determinar a posição do toco:

$$\text{Para } P_3 \text{ (de } P'_2 \text{ a } P'_3): d_1 = (0,168 - 0,109)\lambda = 0,059\lambda,$$

$$\text{Para } P_4 \text{ (de } P'_2 \text{ a } P'_4): d_2 = (0,332 - 0,109)\lambda = 0,223\lambda;$$

- ✓ Para determinar o comprimento do toco curto-circuitado tal que  $y_S = -jb_B$ :

Para  $P_3$  (de  $P_{SC}$  até  $P''_3$ , que representa  $-jb_{B1} = -j1,2$ ):

$$l_{B1} = (0,361 - 0,250)\lambda = 0,111\lambda;$$

Para  $P_4$  (de  $P_{SC}$  até  $P''_4$ , que representa  $-jb_{B2} = j1,2$ ):

$$l_{B2} = (0,139 + 0,250)\lambda = 0,389\lambda.$$

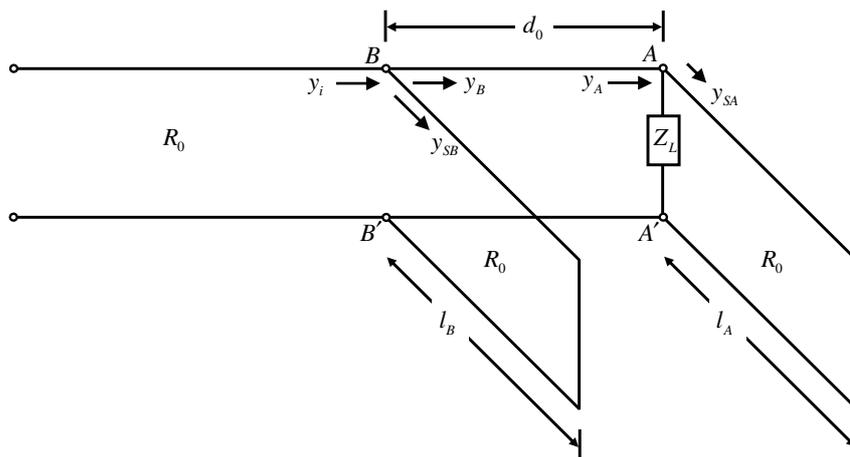
Obs: em geral, a solução utilizando o menor comprimento é preferível a menos que existam impedimentos práticos.

### 2.14.3. Casamento de Impedância com Toco-Duplo

O método de casamento de impedância através de toco simples, descrito na seção anterior, pode ser usado para casar uma carga arbitrária (não-nula e de impedância finita) à resistência característica da linha de transmissão. Entretanto, este método exige que o toco seja conectado à linha principal em um ponto específico, que varia com a impedância de carga ou quando a frequência de operação é alterada. Esta exigência muitas vezes apresenta dificuldades de ordem

prática, uma vez que a conexão LT/toco pode ocorrer em um ponto indesejável do ponto de vista mecânico. Além disso, é muito difícil construir uma linha com comprimento variável e impedância característica constante. Em tais casos uma técnica alternativa pode ser usada, utilizando dois tocos curto-circuitados conectados à linha principal em posições fixas, como ilustrado na Figura 2.53, onde a distancia  $d_0$  é fixa e escolhida arbitrariamente ( $\lambda/16, \lambda/8, 3\lambda/16, 3\lambda/8$ , etc.) e os comprimentos dos dois tocos ( $l_A, l_B$ ) são ajustados para casar uma determinada impedância de carga  $Z_L$  com a linha principal. Esta técnica é conhecida como *método do toco-duplo* (double-stub method) para casamento de impedância.

No arranjo mostrado na Figura 2.55 o toco de comprimento  $l_A$  está conectado diretamente em paralelo com a impedância de carga  $Z_L$  nos terminais  $A-A'$ , e o segundo toco, de comprimento  $l_B$ , está conectado nos terminais  $B-B'$ , fixado a uma distância  $d_0$  da carga.



**Figura 2.55:** Casamento de impedância pelo método do toco duplo.

Para o casamento de impedância com a linha principal, com impedância característica  $R_0$ , é necessário que a admitância de entrada nos terminais  $B-B'$ , vista em direção à carga, seja igual à condutância característica da linha principal, isto é,

$$Y_i = Y_0 = \frac{1}{R_0} = Y_B + Y_{SB}. \quad (2.224)$$

Nomalizando a Eq. (2.224) temos:

$$1 = y_B + y_{SB}. \quad (2.225)$$

Como a admitância de entrada  $y_{SB}$  de um toco curto-circuitado é puramente imaginária, a Eq. (2.225) pode ser satisfeita somente se,

$$y_B = 1 + jb_B, \quad (2.226)$$

e

$$y_{SB} = -jb_B, \quad (2.227)$$

Convém observar que tais exigências são as mesmas para o casamento com toco-simples.

Na carta de Smith de admitância, o ponto representando  $y_B$  deve estar contido na circunferência  $g = 1$ . Esta exigência deve ser transladada de  $d_0/\lambda$  “comprimentos de onda para a carga”, isto é, o ponto representando  $y_A$ , nos terminais  $A - A'$ , deve estar contido na circunferência  $g = 1$  rotacionada de um ângulo  $4\pi d_0/\lambda$  na direção anti-horária. Como a admitância de entrada  $y_{SA}$  de um toco curto-circuitado é puramente imaginária, a parte real de  $y_A$  deve ter apenas a contribuição da parte real da impedância de carga normalizada,  $g_L$ . A solução (ou soluções) é determinada pela intersecção (ou intersecções) da circunferência  $g_L$  com a circunferência rotacionada  $g = 1$ . Os procedimentos para a resolução de um problema de casamento de impedância usando toco-duplo são apresentados a seguir.

1. Traçar a circunferência  $g = 1$  (onde o ponto representado  $y_B$  deve estar contido);
2. Rotacionar a circunferência  $g = 1$  no sentido anti-horário por um valor  $d_0/\lambda$  “comprimentos de onda para a carga” (onde o ponto representando  $y_A$  deve estar contido);
3. Entrar com o ponto representando a admitância de carga normalizada,  $y_L = g_L + jb_L$ ;
4. A circunferência  $g = g_L$ , intersecta a circunferência rotationada  $g = 1$  em um ou dois pontos, onde  $y_A = g_L + jb_A$ ;
5. Marcar o ponto correspondente a  $y_B$  na circunferência  $g = 1$ :  $y_B = 1 + jb_B$ ;
6. Determinar o comprimento  $l_A$  do toco conectado à carga a partir da distância entre os pontos representando  $y_A$  e  $y_L$ ;

7. Determinar o comprimento  $l_B$  do toco conectado nos terminais  $B-B'$  a partir da distância entre os pontos representando  $-jb_B$  e  $P_{SC}$ .

**Exemplo 2.18:**

Uma linha de transmissão de  $50 [\Omega]$  possui em seus terminais uma impedância de carga  $Z_L = 80 + j80 [\Omega]$ . Um sintonizador com toco-duplo espaçado por  $\lambda/8$  é usado para casar a carga à linha, como mostra a Figura 2.55. Determinar os comprimentos dos tocos curto-circuitados.

*Solução:* Dados:

$$R_0 = 50 [\Omega],$$

$$Z_L = 80 + j80 [\Omega],$$

$$y_L = 0,30 - j0,40.$$

A partir desses dados seguiremos os procedimentos descritos anteriormente, usando a carta de Smith como uma carta de admitância.

- ✓ Traçamos a circunferência  $g = 1$  (veja Figura 2.56);
- ✓ Rotacionamos a circunferência  $g = 1$  de  $1/8$  de “comprimentos de onda para a carga” no sentido anti-horário. O ângulo de rotação é  $4\pi/8$  [rad] ou  $90^\circ$ ;
- ✓ Entrar com o ponto  $P_L$ , referente à  $y_L = 0,30 - j0,40$ ;
- ✓ Marcamos os dois pontos  $P_{A1}$  e  $P_{A2}$ , definidos a partir da intersecção entre a circunferência  $g_L = 0,30$  e a circunferência rotacionada  $g = 1$ ;

$$\text{Em } P_{A1} \text{ lemos: } y_{A1} = 0,30 + j0,29,$$

$$\text{Em } P_{A2} \text{ lemos: } y_{A2} = 0,30 + j1,75.$$

- ✓ Usando um compasso centrado no ponto  $O$  marcamos os pontos  $P_{B1}$  e  $P_{B2}$  na circunferência  $g = 1$ , correspondente aos pontos  $P_{A1}$  e  $P_{A2}$ , respectivamente;

$$\text{Em } P_{B1} \text{ lemos: } y_{B1} = 1 + j1,38,$$

$$\text{Em } P_{B2} \text{ lemos: } y_{B2} = 1 - j3,5.$$

- ✓ Determinamos os comprimentos  $l_{A1}$  e  $l_{A2}$  dos tocos a partir de:

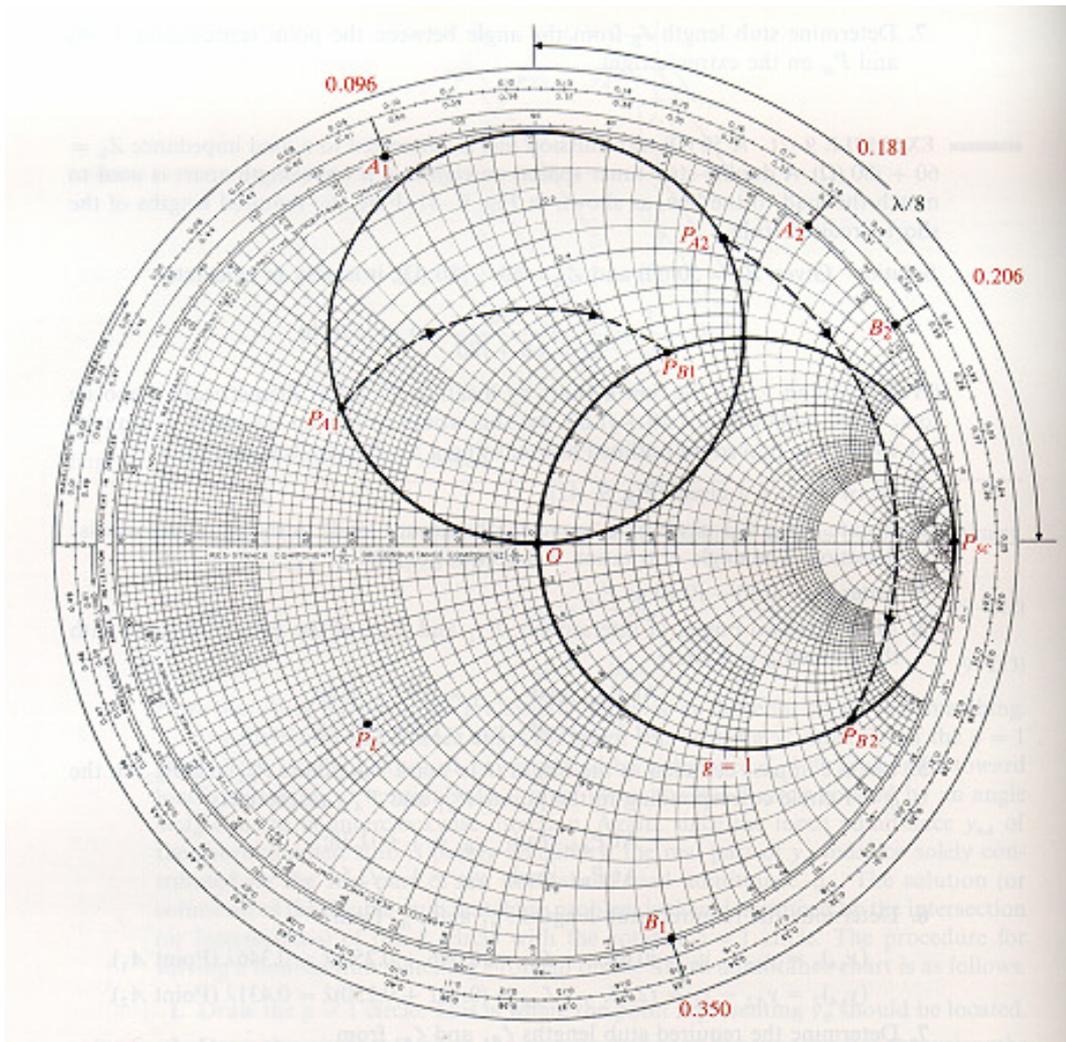
$$(y_{SA})_1 = y_{A1} - y_L = j0,69, \quad l_{A1} = (0,096 + 0,250)\lambda = 0,346\lambda \text{ (ponto } A_1),$$

$$(y_{SA})_2 = y_{A2} - y_L = j2,15, \quad l_{A2} = (0,181 + 0,250)\lambda = 0,431\lambda \text{ (ponto } A_2);$$

✓ Determinamos os comprimentos  $l_{B1}$  e  $l_{B2}$  dos tocos a partir de:

$$(y_{SB})_1 = -j1,38, \quad l_{B1} = (0,350 - 0,250)\lambda = 0,100\lambda \text{ (ponto } B_1),$$

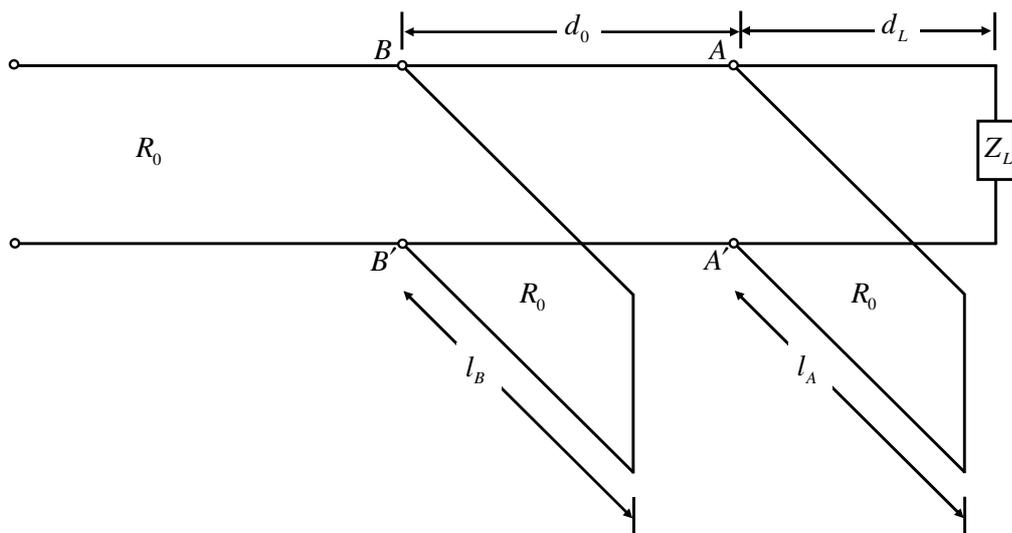
$$(y_{SB})_2 = j3,5, \quad l_{B2} = (0,206 + 0,250)\lambda = 0,456\lambda \text{ (ponto } B_2);$$



**Figura 2.56:** Construção do casamento de impedância por toco-duplo usando carta de Smith.

Um exame da construção da solução pela carta de Smith, ilustrado na Figura 2.56, mostra que se o ponto  $P_L$  (representando a impedância normalizada  $y_L = g_L + jb_L$ ) estiver contido na circunferência

$g = 2$  (se  $g_L > 2$ ), então a circunferência  $g = g_L$  não intersecta a circunferência rotacionada  $g = 1$  e não existe solução para toco-duplo espaçado de  $d_0 = \lambda/8$ . A região onde não há solução possível varia com a escolha da distância  $d_0$  entre os tocos. Em tais casos, o casamento de impedância pela técnica de toco-duplo pode ser obtido inserindo uma seção de linha entre a carga  $Z_L$  e os terminais  $A - A'$ , como ilustra a Figura 2.57.



**Figura 2.57:** Casamento de impedância com toco-duplo adicionando uma linha seção de linha entre a carga e os terminais  $A - A'$ .

## Apêndice A – Coeficiente de Reflexão de Corrente

O coeficiente de reflexão de corrente ( $\Gamma_c$ ) ao longo da linha de transmissão pode ser definido como a razão,

$$\Gamma_c \left( z - \frac{t}{u} \right) = \frac{I^-(z-t/u)}{I^+(z-t/u)}. \quad (\text{A.01})$$

A impedância em um ponto qualquer da LT pode ser escrita sob a forma,

$$Z \left( z - \frac{t}{u} \right) = \frac{V^+ + V^-}{I^+ + I^-} = R_0 \frac{I^+ - I^-}{I^+ + I^-}, \quad (\text{A.02})$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{Z}{R_0} &= \frac{I^+ - I^-}{I^+ + I^-} + 1 - 1, \\ \frac{Z}{R_0} &= \frac{2I^+}{I^+ + I^-} - 1, \\ \frac{Z}{R_0} &= \frac{2}{1 + \left( \frac{I^-}{I^+} \right)} - 1. \end{aligned} \quad (\text{A.03})$$

Usando a Eq. (A.01) podemos reescrever (A.03),

$$\frac{Z}{R_0} + 1 = \frac{2}{1 + \Gamma_c},$$

e, assim,

$$\begin{aligned} \Gamma_c &= \frac{2}{\left( \frac{Z + R_0}{R_0} \right)} - 1, \\ \Gamma_c &= \frac{2R_0}{Z + R_0} - 1, \\ \Gamma_c &= \frac{2R_0 - Z - R_0}{Z + R_0}, \end{aligned}$$

$$\Gamma_c\left(z - \frac{t}{u}\right) = -\frac{Z(z - t/u) - R_0}{Z(z - t/u) + R_0}. \quad (\text{A.04})$$

A Eq. (A.04) apresenta o coeficiente de reflexão de corrente como função da resistência característica da linha e a impedância  $Z$ . Comparando a Eq. (A.04) com (2.53b), vemos que:

$$\Gamma\left(z - \frac{t}{u}\right) = -\Gamma_c\left(z - \frac{t}{u}\right). \quad (\text{A.05})$$