IT-309 – Tópicos em Sistemas de Energia Elétrica

José Pissolato Filho / Geraldo Peres Caixeta – 2025

UNICAMP

Métodos Numéricos para Fenômenos Eletromagnéticos

SUMÁRIO

Método numérico TLM – Transmission Line Modeling.

UNICAMP

Modelos usados em eletromagnetismo

Basicamente pode-se considerar três técnicas aplicadas na busca de solução de problemas: **experimental**, **analítica** e **numérica**.

Na maioria das situações, as técnicas experimentais são caras, consomem tempo, são perigosas, inflexíveis quanto a variação de parâmetros.

Modelos usados em eletromagnetismo

Exemplos de soluções analíticas e numéricas:

Métodos analíticos (solução exata)

- separação de variáveis;
- expansão em séries;
- solução integral (Laplace e Transformada de Fourier), etc.

Métodos numéricos (solução aproximada)

- diferenças finitas;
- método dos momentos;
- elementos finitos;
- TLM (Transmission Line Modeling), etc.

Modelos usados em eletromagnetismo

Na formulação de um problema em eletromagnetismo, muitas vezes são usadas expressões que relacionam duas funções, através do operador:

$$L\{\Phi(\mathrm{x})\} = g(x) \quad \begin{cases} g(x) = \text{Função estímulo} \\ \phi(x) = \text{Função resposta} \\ L = \text{Operador} \\ x = \text{variável} \end{cases}$$

Quanto ao domínio, a variável pode estar:

- Domínio do tempo (time-domain – TD method);
- Domínio da frequência (frequency-domain – FD method).

Modelos usados em eletromagnetismo

Exemplo de modelos mais popularmente usados:

- **Domínio do tempo, exemplo:**
  - FDTD (Diferenças Finitas no Domínio do Tempo) – Eqs. Diferenciais
  - TLM (Transmission-Line Modeling or Matrix) – Eqs. Diferenciais
  - TD-FEM (Elementos Finitos no Domínio do tempo) – Eqs. Diferenciais.

  São mais adequados para estudos de **transitórios**, banda larga e problemas não lineares.

- **Domínio da frequência, exemplo:**
  - MoM (Método dos Momentos) – Eqs. Integrais
  - FD-FEM (Elementos Finitos no Domínio da Frequência) – Eqs. Diferenciais

  São mais adequados em aplicações de **regime permanente** e em banda estreita.

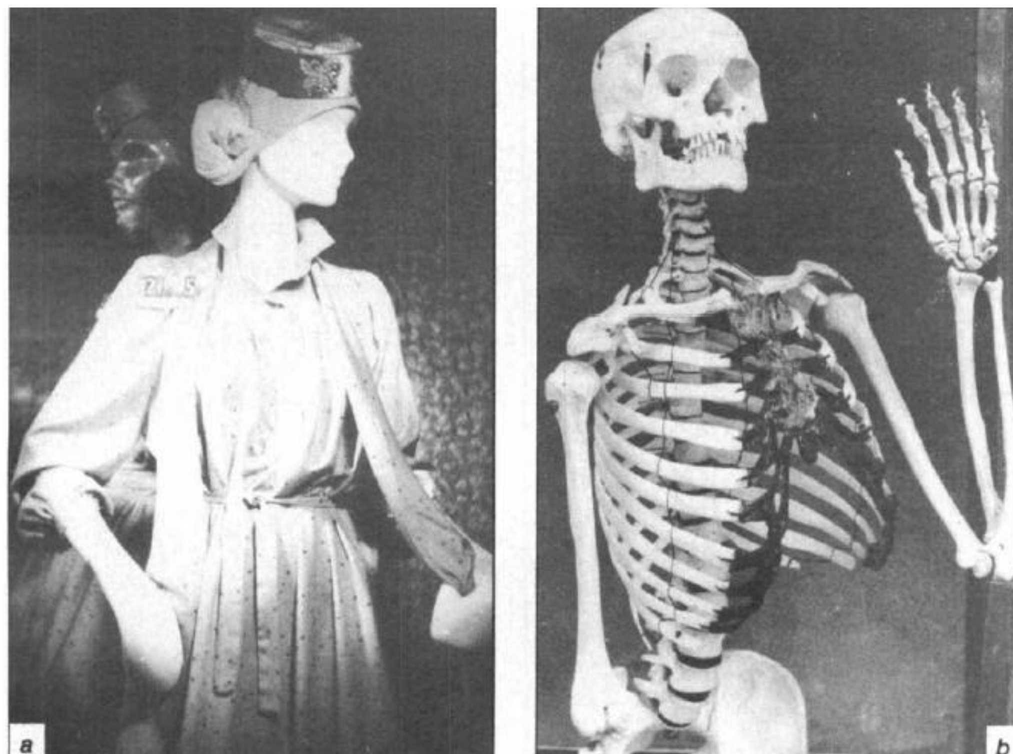
É possível migrar de um domínio a outro recorrendo a **transformadas de Fourier** – só tomar cuidado com o custo computacional.

Modelos usados em ~~eletromagnetismo~~

Exemplo de modelos mais popularmente usados:

“Dois modelos de um humano. (a) modelo com roupas atrativas. (b) modelo mostrando o esqueleto humano”.

JOHNS, P.B. The Art of Modelling. Electronics and Power, Aug., 1979.



1 Two models of the human being

a Model with attractive clothes

b Model showing component parts

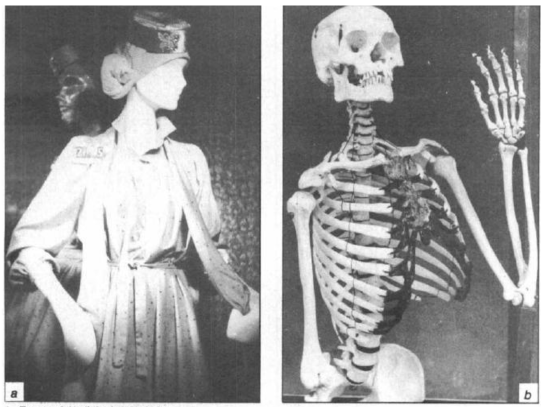
IT-309 – Tópicos em Sistemas de Energia Elétrica

José Pissolato Filho / Geraldo Peres Caixeta – 2025

UNICAMP

Modelos usados em ~~eletromagnetismo~~

Introdução – artigo Peter Johns, The Art of Modelling, 1979*



1 Two models of the human being

a Model with attractive clothes

b Model showing component parts

A arte da modelagem

por P. B. Johns, M.Sc., Ph.D., C.Eng., M.I.E.E.

“Ao longo da história, os seres humanos vêm criando modelos dos fenômenos físicos que observam. Desde pinturas rupestres até a arte surrealista, desde modelos do átomo até modelos do universo, todos buscam destacar ideias específicas para análise ou comunicação com outras pessoas.

Como engenheiros, devemos ser especialmente habilidosos na arte de criar ou escolher os modelos matemáticos de nossos conceitos de engenharia. Propriedades desejáveis de um modelo, como o realce de áreas que requerem análise e a exclusão de áreas sem interesse, parecem óbvias. No entanto, o poder computacional à disposição do engenheiro profissional está crescendo enormemente com a proliferação de calculadoras e computadores. Assim, os métodos para analisar modelos estão mudando, e isso significa que os modelos que escolhemos no passado nem sempre serão os melhores para o presente e o futuro.“

(*) Traduzido com ajuda d DeepSeek V3.

Método numérico TLM – Transmission Line Modeling

Peter Johns [Johns,1971]

Princípio:

- Aplica o modelo de propagação e dispersão de ondas de Huygens (ano 1698), considerando uma malha de linhas de transmissão interligadas por nós.
- Método baseado na analogia entre as equações de Maxwell (ano 1841) e sinais numa linha de transmissão (equações do telegrafista) – discretização do tempo-espaço.

Características:

- Adequado para análise de transitórios e fenômenos de banda larga (**domínio do tempo**)
- Usa uma grade espacial (como em FDTD), mas analisa distribuição de tensão e corrente em vez de campo eletromagnético.

Método numérico TLM – Transmission Line Modeling

Peter Johns [Johns,1971]

Vantagens:

- Mais estável numericamente, mesmo em geometrias irregulares
- Ideal para simular guias de onda, acoplamentos e problemas de compatibilidade eletromagnética
- Flexibilidade em análise de sinais em apenas 1D (EPDA, aterramento, trilhas em PCB...)

Desvantagens:

- Menos intuitivo para análise de campo eletromagnético, comparado ao FDTD.
- Pode ter um alto custo computacional para **estruturas eletricamente grandes(*)**.

(*) Uma solução possível:

TLM + $E(x, y, z, t)$ e $H(x, y, z, t)$: expressões algébricas do campo eletromagnético no domínio do tempo e em coordenadas Cartesianas!

(Tese G.P. Caixeta. Unicamp, 2000)

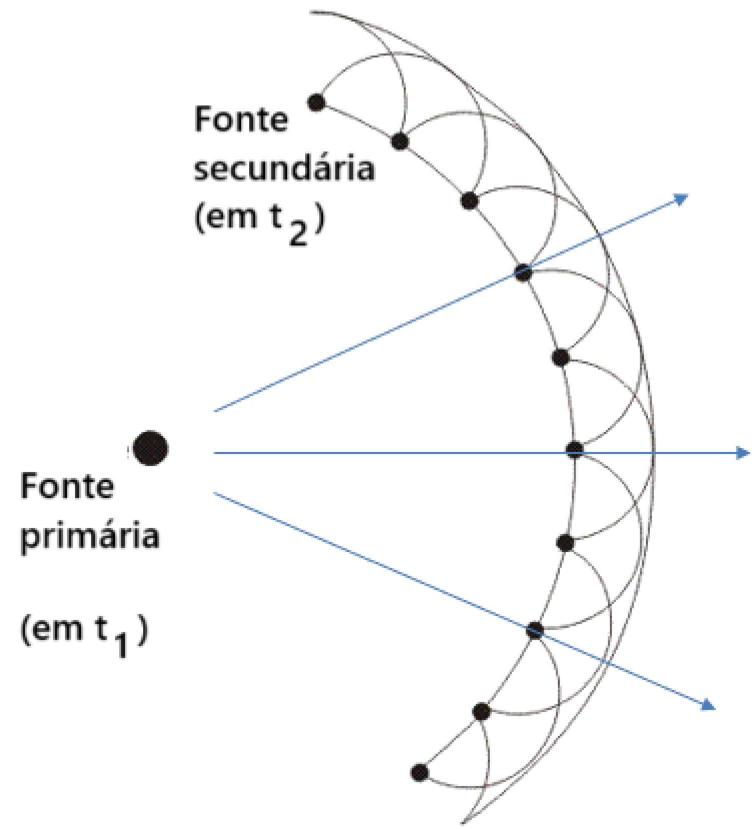
TLM – Equação de onda

$$\begin{cases} E(z,t) & \rightarrow & v(z,t) \\ H(z,t) & \rightarrow & i(z,t) \end{cases}$$

Equações de Maxwell	Equações da LT (sem perdas)	Equações de onda (espaço livre)
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$	$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$
$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_d$	$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}$	$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}$

TLM x Princípio de Huygens

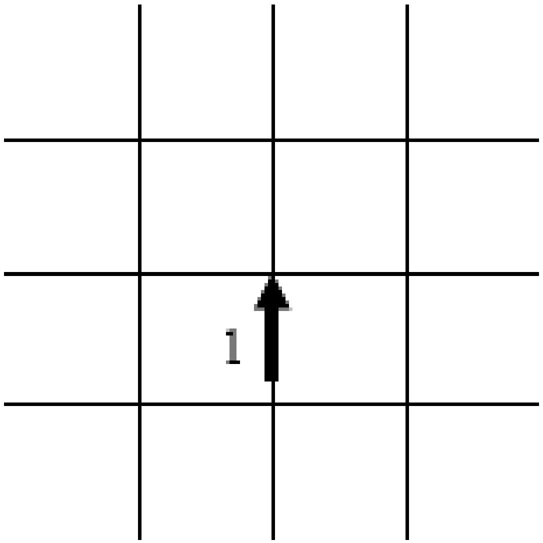
"Cada ponto de uma frente de onda atua como uma fonte de novas ondas secundárias, cuja envoltória determina a propagação da onda em um instante posterior".

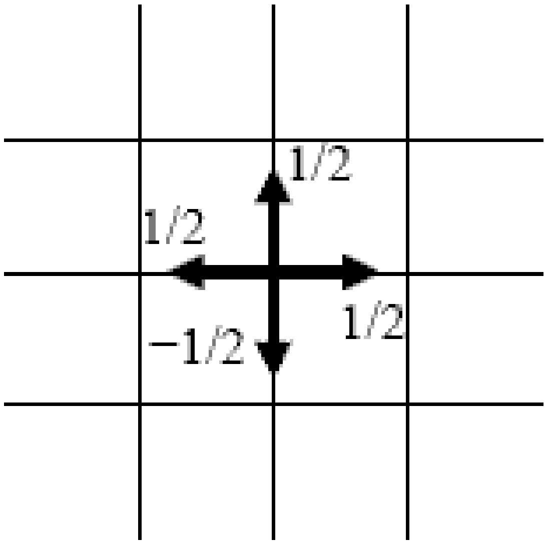


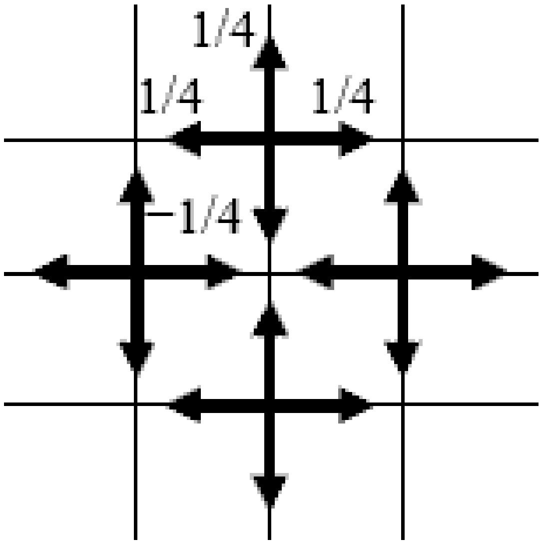
TLM – a partir dos sinais de tensão e corrente numa LT

Modelo de malha TLM em 2D → um pulso de 1 pu incidindo no nó central, sendo parcialmente refletido e transmitido (LT)

$$\begin{cases} V_i = 1\,pu \\ V_S = 0{,}5\,pu\ (transmitido)\ e\ -0{,}5\,pu\ (refletido) \end{cases}$$







TLM – a partir dos sinais de tensão e corrente numa LT

Discretização do meio (em princípio homogêneo) como Linhas de Transmissão interconectas (todas com a mesma Zc), então:

- o pulso incidente vê efetivamente três LTs em paralelo, com uma impedância equivalente $Z_{eq} = \frac{Z_C}{3}$

- Coeficiente de reflexão e de transmissão dados por:

$$K_R = \frac{Z_C/3 - Zc}{Z_C/3 + Zc} = -0{,}5 \qquad K_T = 2\frac{Z_C/3}{Z_C/3 + Zc} = 0{,}5$$

- Energias associadas ao pulso incidente e aos pulsos espalhados:

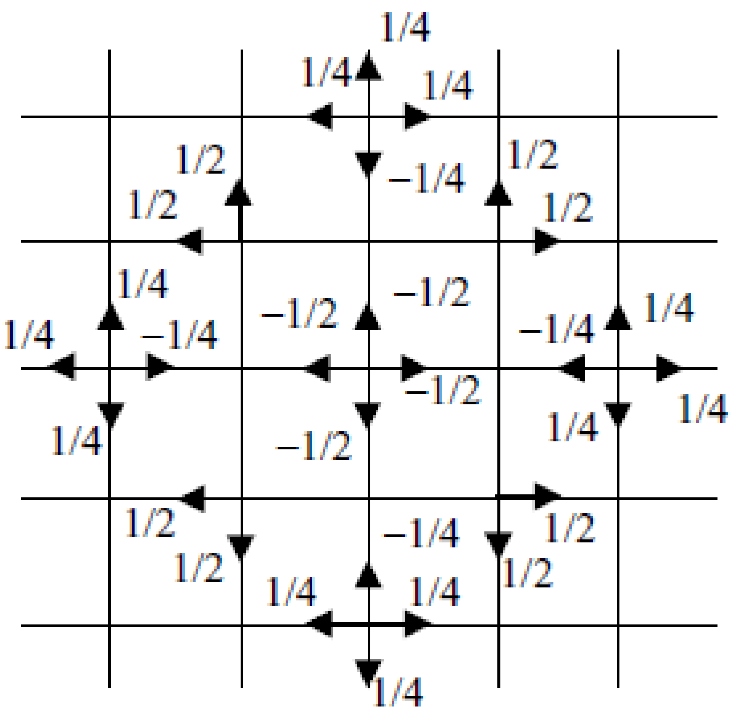
$$\epsilon_I = V_i^2 \times \Delta t/Zc = (1pu) \times \Delta t/Zc = \Delta t/Zc$$

$$\epsilon_S = [(-0{,}5)^2 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2] \times \Delta t/Zc = \Delta t/Zc$$

TLM – a partir dos sinais de tensão e corrente numa LT

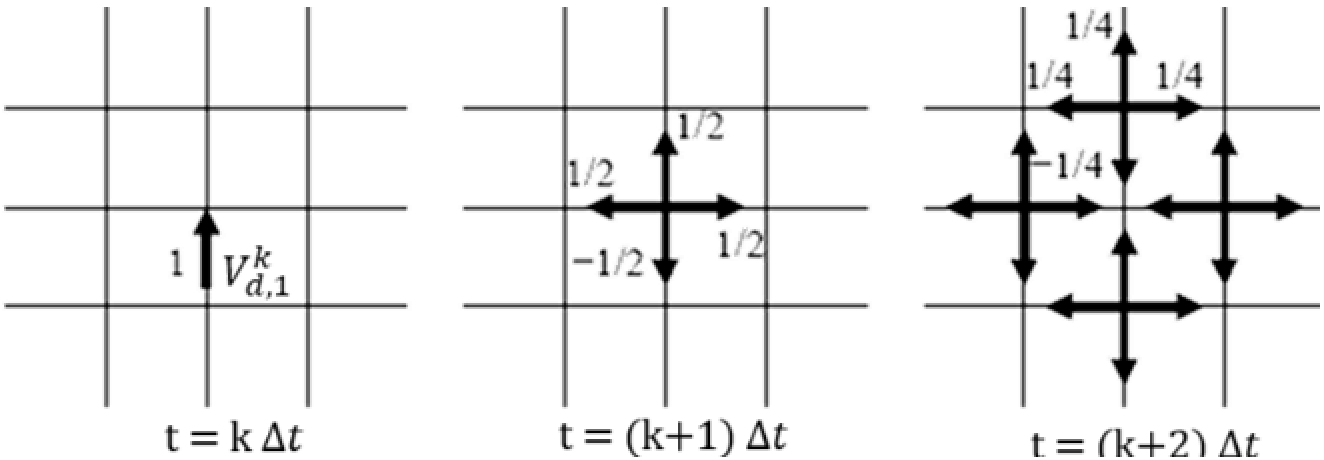
O próximo evento de espalhamento ocorre pela incidência de pulsos que foram anteriormente espalhados.

Em outras palavras, pulsos espalhados num nó, se tornam pulsos incidentes nos nós adjacentes, e assim sucessivamente.



TLM – matriz de espalhamento

$V_{d,1}^{k} = 1\,pu$ = Amplitude do sinal direto (ou incidente) no nó 1, no instante k Δt.
Observe que se esta for a condição inicial, $V_{d,2}^{k} = V_{d,3}^{k} = V_{d,4}^{k} = 0$.



Considerando que $K_R = -0{,}5\ e\ \ K_T = 0{,}5$, conforme visto anteriormente, então a relação entre sinais refletidos e direto no nó 1, fica na forma:

$$V_{r,1}^{k} = 0{,}5\left(-V_{d,1}^{k} + V_{d,2}^{k} + V_{d,3}^{k} + V_{d,4}^{k}\right)$$

TLM – matriz de espalhamento

Na forma matricial, considerando os domínios de um espaço pré-estabelecidos:

$$\boldsymbol{V}_{r,\ell}^{k} = \boldsymbol{S}_k \boldsymbol{V}_{d,\ell}^{k}$$

$\boldsymbol{V}_{r,\ell}^{k}$ = Vetor amplitude do sinal refletido/reverso na linha ℓ

$\boldsymbol{V}_{d,\ell}^{k}$ = Vetor amplitude do sinal direto/incidente na linha ℓ

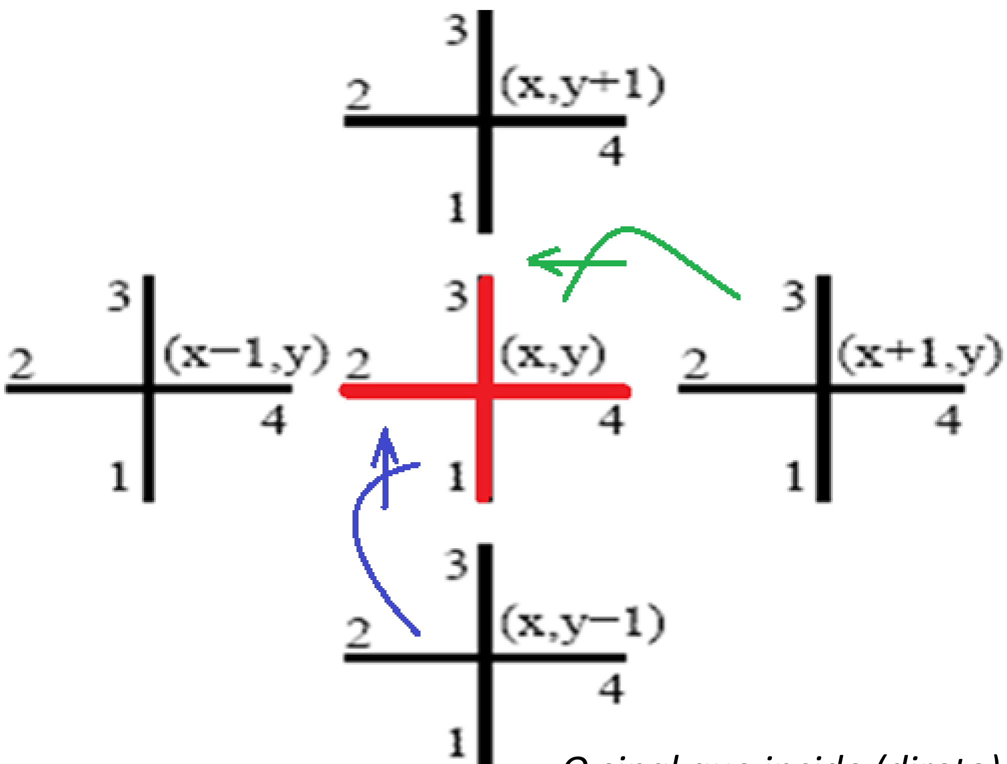
$\boldsymbol{S}_k$ = Matriz espalhamento na ponta da linha ℓ, dada por:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

TLM – matriz de espalhamento

Os nós adjacentes estão relacionados pela matriz de espalhamento.

Os sinais que incidem em cada nó, no instante posterior $(k+1)\,\Delta t$, é o sinal que é refletido a partir do nó adjacente no instante anterior k Δt (espaço-tempo):



$$V_{d,1}^{k+1}(x,y) = V_{r,3}^{k}(x,y-1)$$

$$V_{d,2}^{k+1}(x,y) = V_{r,4}^{k}(x-1,y)$$

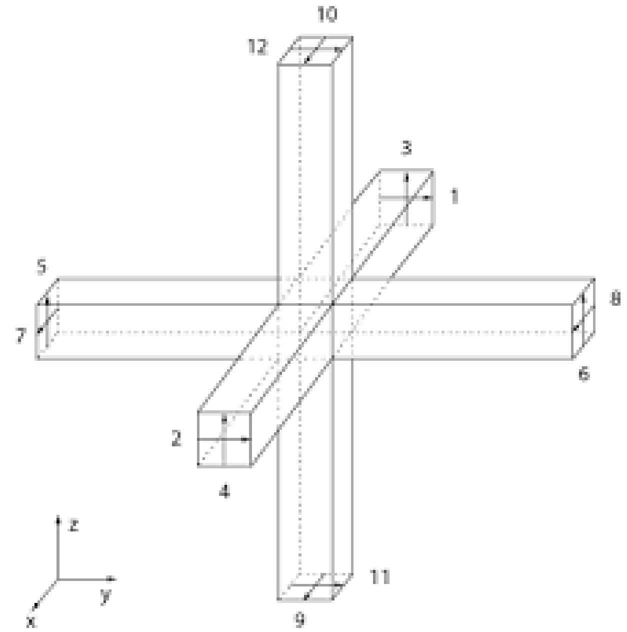
$$V_{d,3}^{k+1}(x,y) = V_{r,1}^{k}(x,y+1)$$

$$V_{d,4}^{k+1}(x,y) = V_{r,2}^{k}(x+1,y)$$

O sinal que incide (direto) na linha 1 no instante $(k+1)\Delta t$ é igual ao sinal que é refletido da linha 3, localizada em $(x,y-1)$ no instante anterior $k\Delta t$

TLM – considerações adicionais

- A discretização do espaço/tempo em 2D ou 3D faz essas mesmas considerações e são consideradas a partir da definição das matrizes envolvidas na análise.



- Considerações para meios não-homogêneos e com perdas, pode ser acrescidas a partir da matriz de espalhamento $\boldsymbol{S}_k$.

- Diferentes condições de contorno (conexão de fontes, cargas, etc) podem ser consideradas com ajustes das equações que relacionam os sinais diretos e refletidos.

- A seguir, esse princípio será adotado na dedução de equações para modelar o comportamento de sinais em Linhas de Transmissão.

TLM – Cuidados nas aplicações do modelo

- As equações algébricas de onda são exatas, e suas soluções são exatas para o modelo e, aproximadas para aplicações práticas.

- Devemos ter cuidados na hora de segmentar o espaço. Aqui vamos considerar onda unidirecional – propagação ao longo do eixo “z” – e considerar segmentos em cascata de comprimentos Δz.

- Da eq. de onda TEM: $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}(m/s)$ e $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ Ω

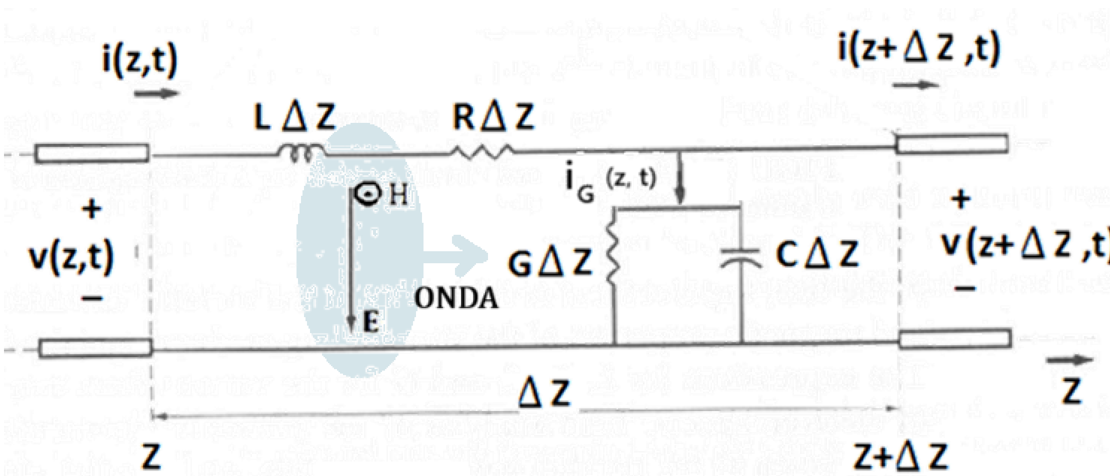
- Da equação da LT: $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ m/s e $Z_c = \sqrt{L/C}$ Ω

TLM – Cuidados nas aplicações do modelo

Para evitar dispersão numérica, é necessário relacionar a discretização espacial com a discretização no tempo

$$\Delta z \;\; \leftrightarrow \Delta t \;\; (?)$$

TLM – modelo Circuital de uma Linha de Transmissão:



TLM – Cuidados nas aplicações do modelo

Para evitar dispersão (numérica) do sinal, em geral a relação abaixo é satisfatória:

$$\frac{\beta\,\Delta z}{2} \ll 1$$

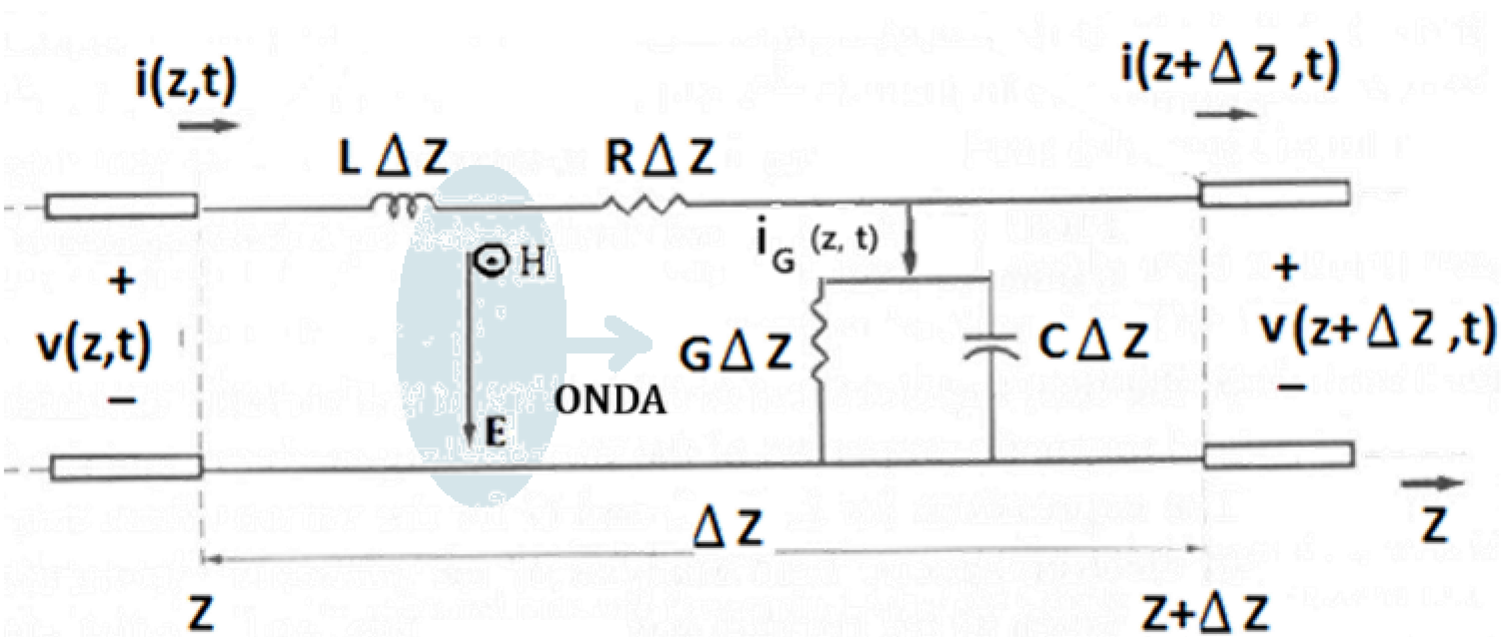
Nessas condições, o comprimento do segmento espacial (Δz) será muito menor que o comprimento de onda da maior frequência de interesse, ou seja:

$$\frac{\pi\,\Delta z}{\lambda} \ll 1 \qquad \longrightarrow \qquad \Delta z \ll \frac{\lambda}{\pi}$$

Adota-se: $$\boldsymbol{\Delta z} \leq \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{\lambda}}{\mathbf{10}}, & \textbf{em geral} \\ \dfrac{\boldsymbol{\lambda}}{\mathbf{100}}, & \textbf{para modelos mais sensíveis.} \end{cases}$$

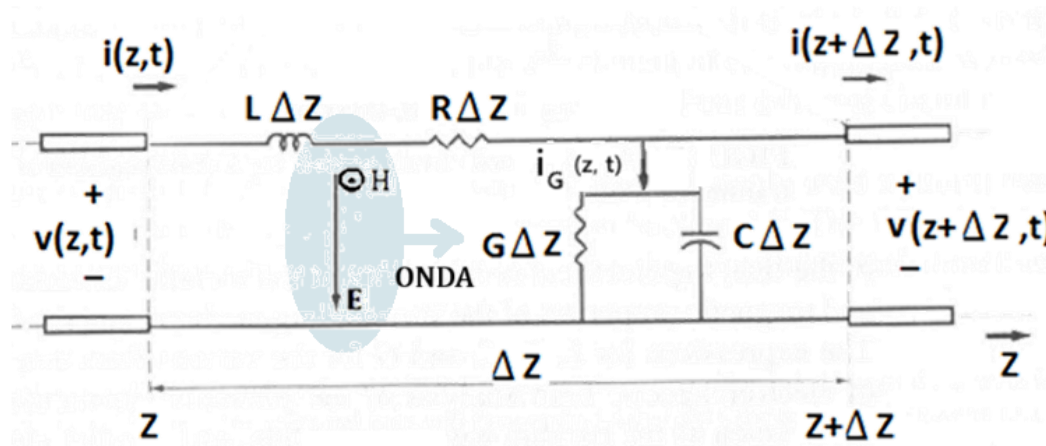
TLM em 1D x Linha de Transmissão (LT)

Aplicação do TLM na modelagem de uma Linha de Transmissão com perdas e parâmetros distribuídos



TLM em 1D x Linha de Transmissão (LT)

A partir do modelo de uma Linha de Transmissão com parâmetros distribuídos...



O tempo que um sinal leva para percorrer um segmento Δz da LT é:

$$\Delta t = \Delta z / v = \Delta z\sqrt{L_d C_d} = \sqrt{LC}$$

L_d e C_d são parâmetros por unidade de comprimento da LT ;
L e C são parâmetros de todo o segmento Δz da LT.

Método numérico TLM em 1D

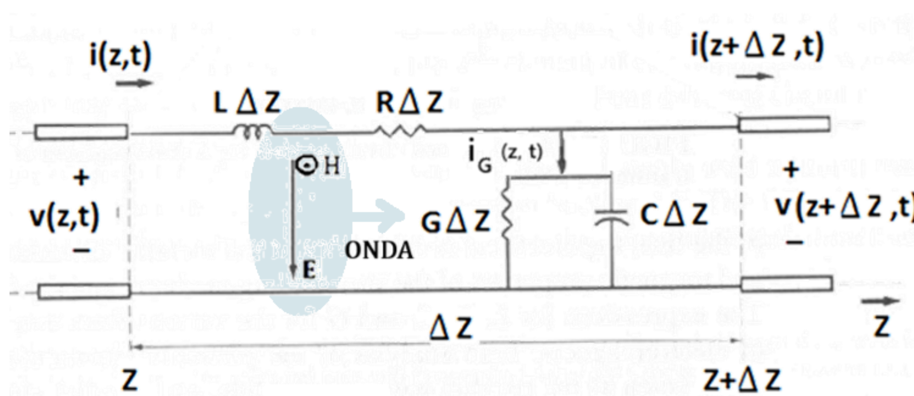
Impedância característica da LT:

$$Z_C = \sqrt{\frac{L/\ell}{C/\ell}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\ \ \Omega$$

Assim, L e C podem ser determinados se conhecida Zc e Δt:

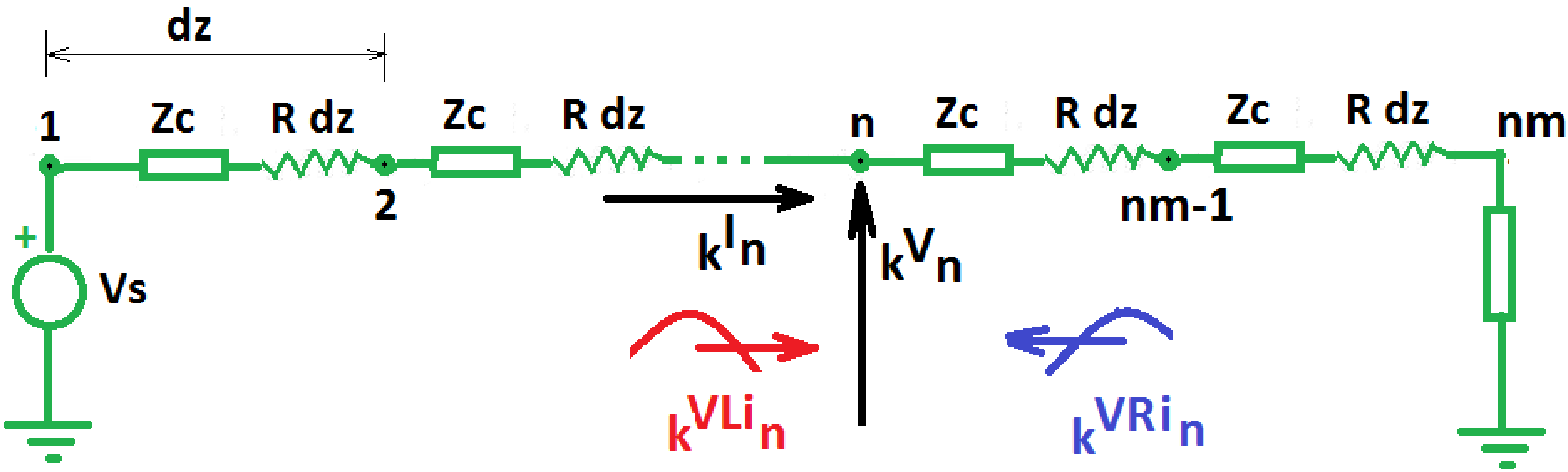
$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\Delta t . Z_C} \qquad \boldsymbol{e} \qquad \boldsymbol{C} = \frac{\boldsymbol{\Delta t}}{\boldsymbol{Z_C}}$$

Ou seja, definido o tempo de propagação (Δt) na LT e Zc, C e L ficam implicitamente definidas.



TLM – considerações iniciais para o equacionamento

Para LT – parâmetros distribuídos:



VLi (n,k) = tensão incidente sobre o nó "n" pela esquerda, no instante k dt.

VRi (n,k) = tensão incidente sobre o nó "n" pela direita, no instante k dt.

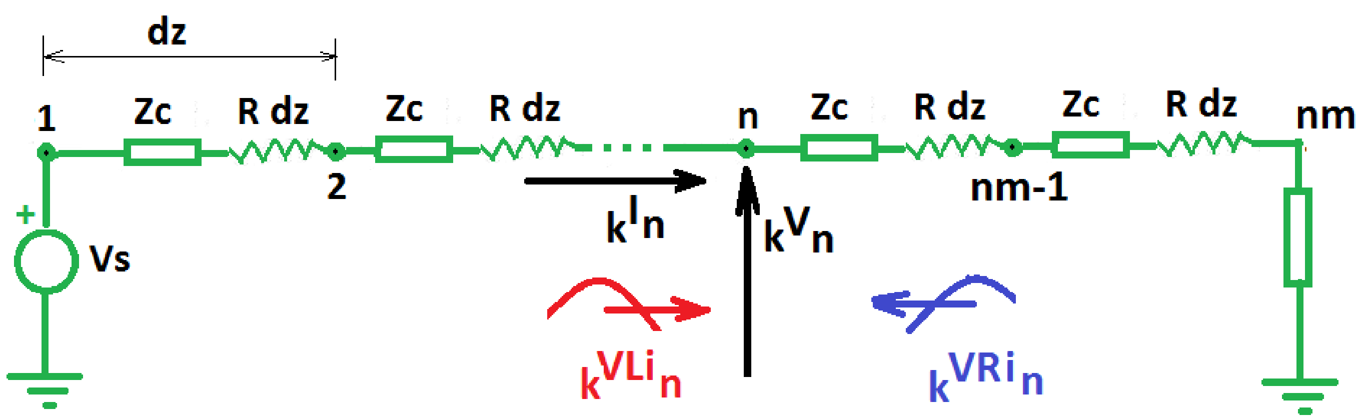
V(n,k) = tensão resultante sobre o nó "n".

i(n,k) = corrente resultante sobre o nó "n".

TLM – considerações iniciais para o equacionamento

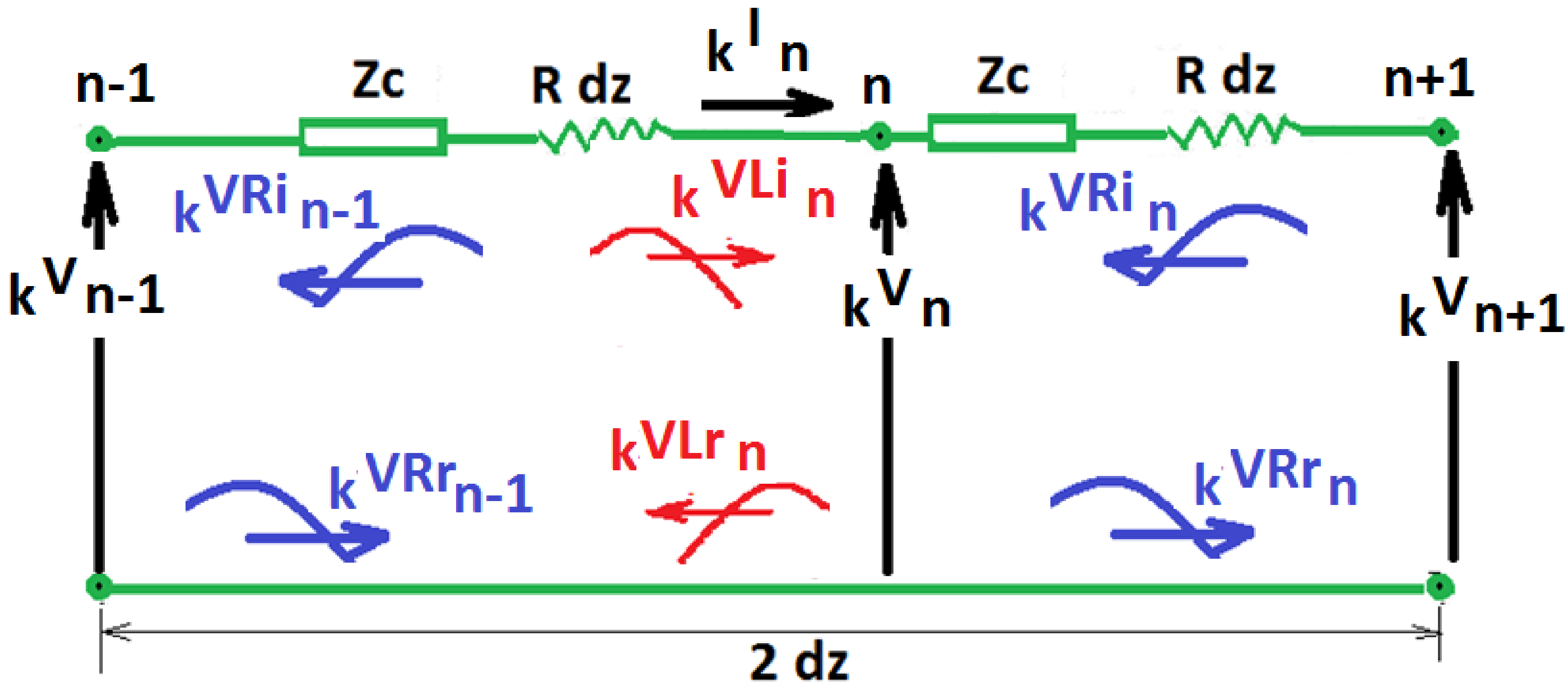
O equacionamento deve considerar as equações de tensões e correntes:

1) No início da LT – fonte, carga ou outra(s) LT(s)
2) Ao longo da LT – com ou sem perdas
3) No final da LT – fonte, carga ou outra(s) LT(s).



TLM – considerações iniciais para o equacionamento

TLM ao longo de uma LT – instante "k"



κVRi n-1 → Tensão incidente sobre o nó (n-1) pela direita no instante k

κVli n → Tensão incidente sobre o nó (n) pela esquerda no instante k

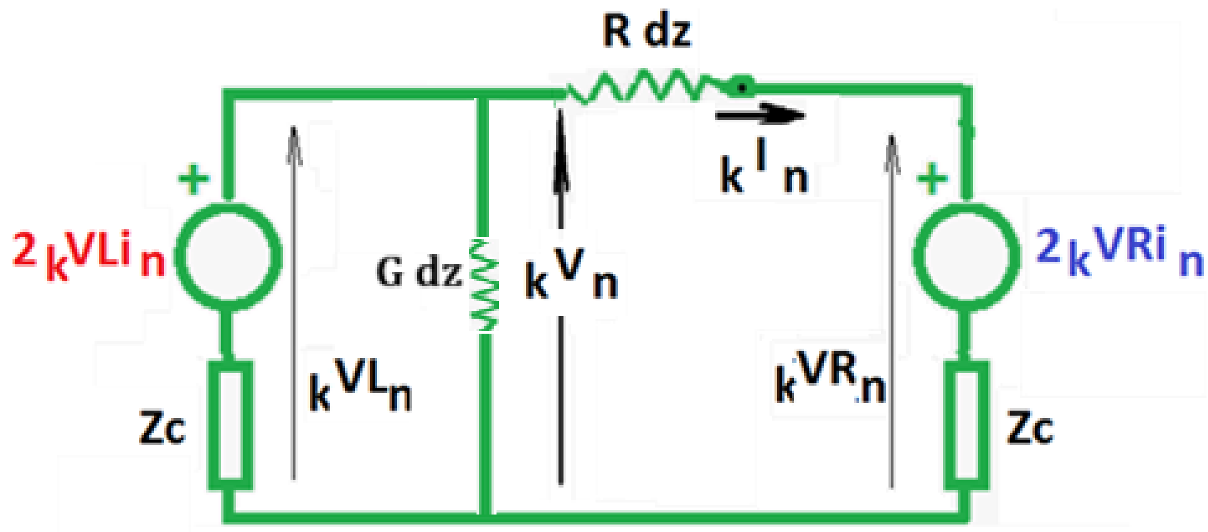
TLM – considerações iniciais para o equacionamento

TLM ao longo de uma LT – instante "k"

Equivalente Thevenin

Lado esquerdo

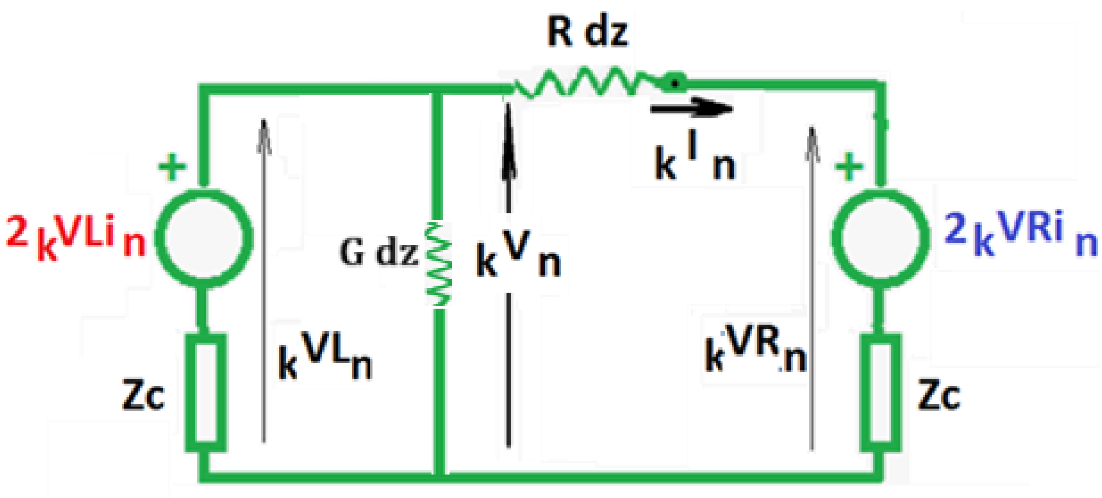
Lado direito



Equivalente Thevenin é obtido considerando um segmento da LT aberta → $I = 0$ na ponta oposta, e $V = 2V^+$

$V^+ =$ tensão incidente pela esquerda ou pela direita

Equacionamento TLM ao longo de uma LT – instante “k”



$$_kV_n = \frac{\dfrac{2\ \ _kVL_n^i}{Z_C} + \dfrac{2\ \ _kVR_n^i}{Z_C + R}}{\dfrac{1}{Z_C} + \dfrac{1}{R + Z_C} + G}$$

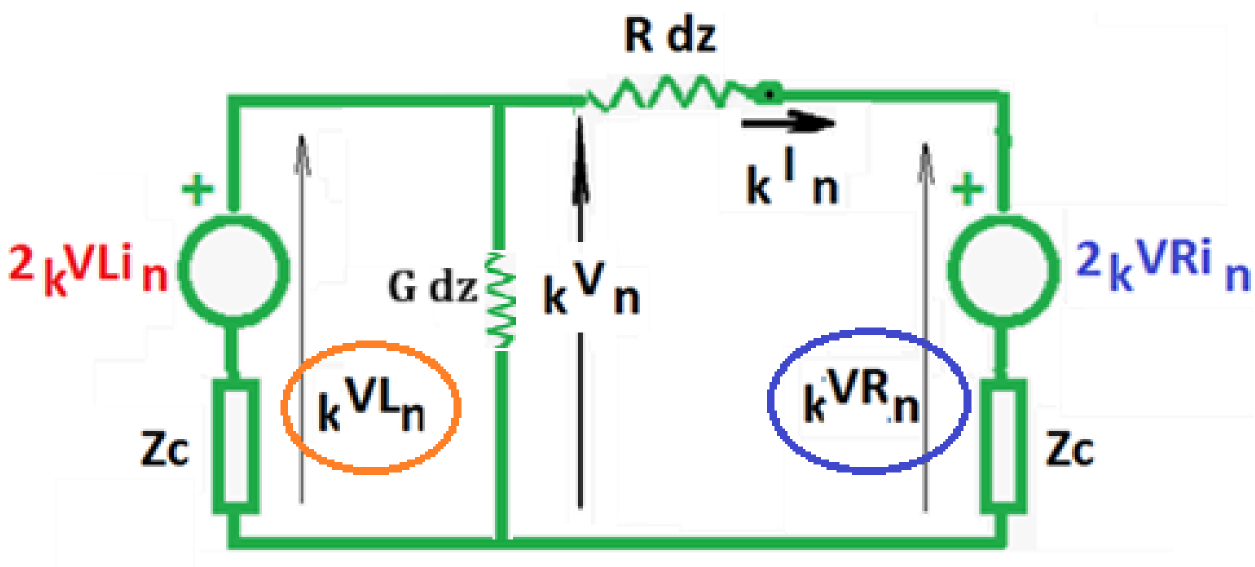
$$_kI_n = \frac{_kV_n - 2\ \ _kVR_n^i}{R + Z_C}$$

VLi(n,k): Tensão incidente da esquerda no instante $k\Delta t$.

VRi(n,k): Tensão incidente da direita no instante $k\Delta t$.

Equacionamento TLM ao longo de uma LT – instante “k”

Tensão **resultante** na entrada do nó “n”, à esquerda e à direita:



$$ {}_k\boldsymbol{VL}_n = {}_kV_n $$

$$ {}_k\boldsymbol{VR}_n = 2\;{}_k\boldsymbol{VR}_n^i + {}_kI_nZ_C $$

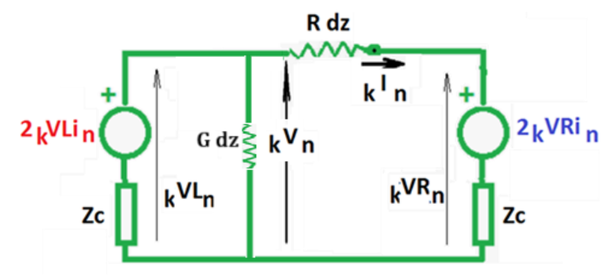
Equacionamento TLM ao longo de uma LT – instante “k”

Tensão resultante pela esquerda do nó n:

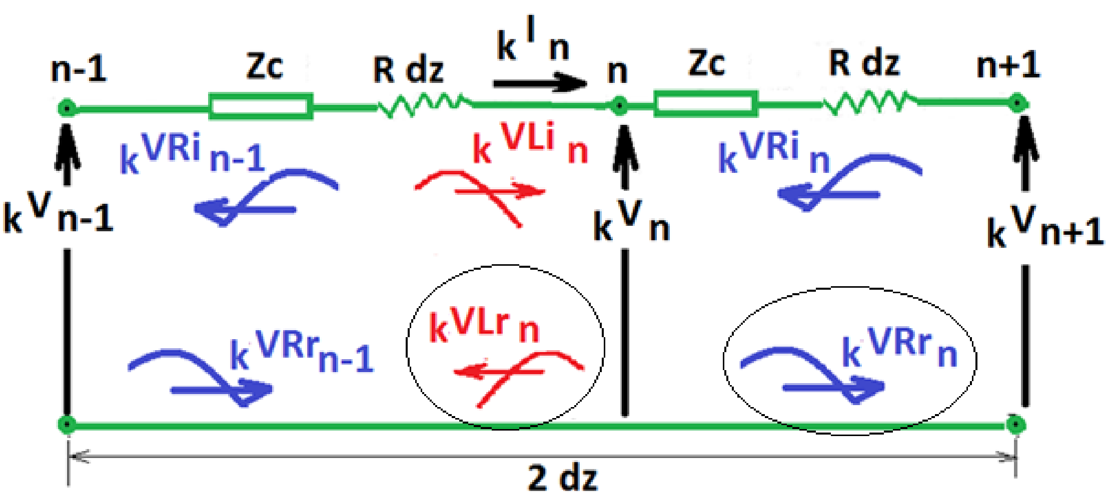
$${}_{k}VL_n = {}_{k}VL_n^r + {}_{k}VL_n^i$$

Tensão resultante pela direita do nó n :

$${}_{k}VR_n = {}_{k}VR_n^r + {}_{k}VR_n^i$$



Tensões **refletidas** para a esquerda e para a direita do nó “n”:



$${}_{k}\boldsymbol{VL_n^r} = {}_{k}VL_n - {}_{k}\boldsymbol{VL_n^i}$$

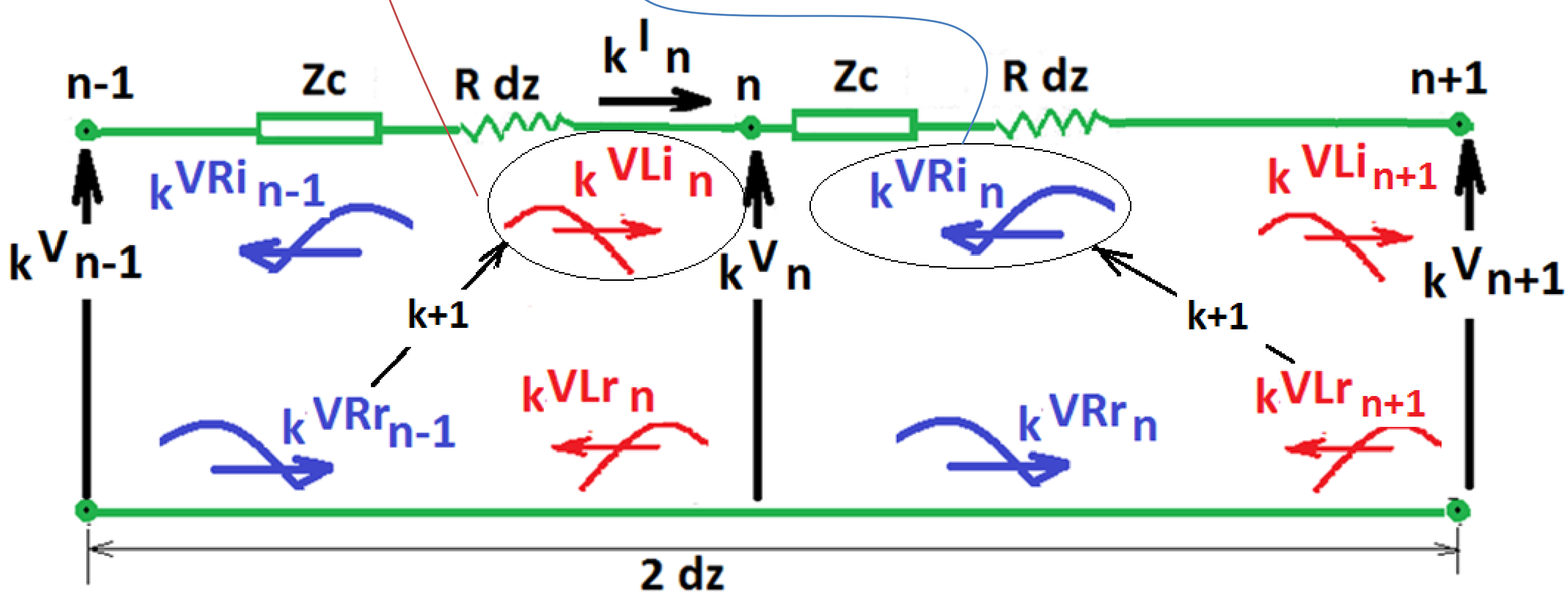
$${}_{k}\boldsymbol{VR_n^r} = {}_{k}VR_n - {}_{k}\boldsymbol{VR_n^i}$$

Equacionamento TLM ao longo de uma LT – instante “k+1”

Novas tensões incidentes (processo iterativo), **no instante k+1**:

$$_{k+1}VL^{i}_{n} = _{k}VR^{r}_{n-1}$$

$$_{k+1}VR^{i}_{n} = _{k}VL^{r}_{n+1}$$



Equacionamento TLM ao longo de uma LT

Resumo do equacionamento

Instante "k"

$$ {}_kV_n = \frac{\dfrac{2\,{}_kVL^i{}_n}{Z_C} + \dfrac{2\,{}_kVR_n{}^i}{Z_C + R}}{\dfrac{1}{Z_C} + \dfrac{1}{R + Z_C} + G} \quad (1) $$

$$ {}_kI_n = \frac{{}_kV_n - 2\,{}_kVR_n{}^i}{R + Z_C} \quad (2) $$

$$ {}_kVL_n = {}_kV_n \quad (3) $$

$$ {}_kVR_n = 2\,{}_kVR^i{}_n + {}_kI_n Z_0 \quad (4) $$

$$ {}_kVL^r{}_n = {}_kVL_n - {}_kVL^i{}_n \quad (5) $$

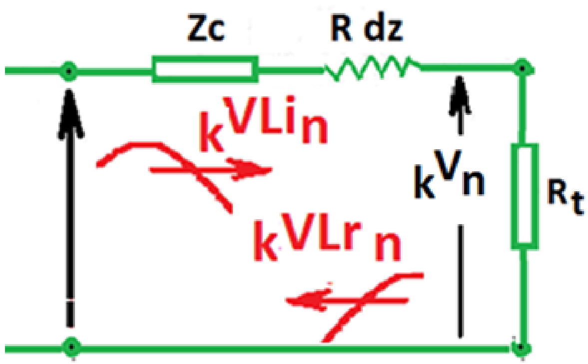
$$ {}_kVR^r{}_n = {}_kVR_n - {}_kVR^i{}_n \quad (6) $$

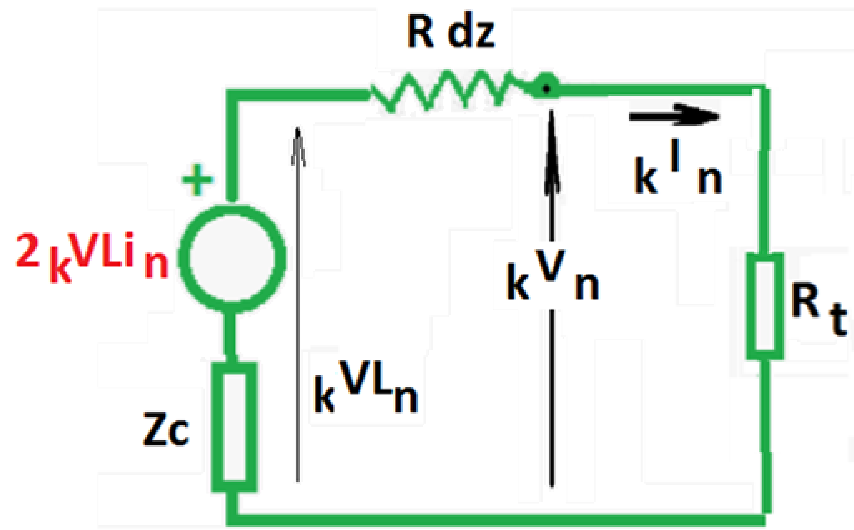
Instante "k+1"

$$ {}_{k+1}VL^i{}_n = {}_kVR^r{}_{n-1} \quad (7) $$

$$ {}_{k+1}VR^i{}_n = {}_kVL^r{}_{n+1} \quad (8) $$

Nas terminações (contorno) – suponto uma carga “Rt” Instante “k”





Segmento nos terminais da LT, e o equivalente Thevenin.
(não existe, obviamente, tensões incidentes pela direita VRi).

Equacionamento TLM – Linha terminada em Rt

Intante "k":

$$_{k}I_{n} = \frac{2\,_{k}VL^{i}_{n}}{R_{t} + Z_{c}} \qquad (9)$$

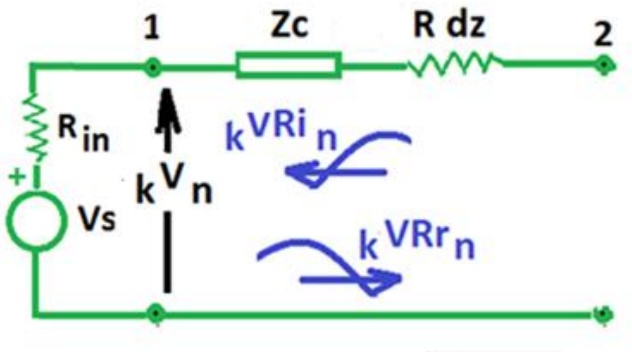
$$_{k}V_{n} = R_{t} \cdot {}_{k}I_{n} \qquad (10)$$

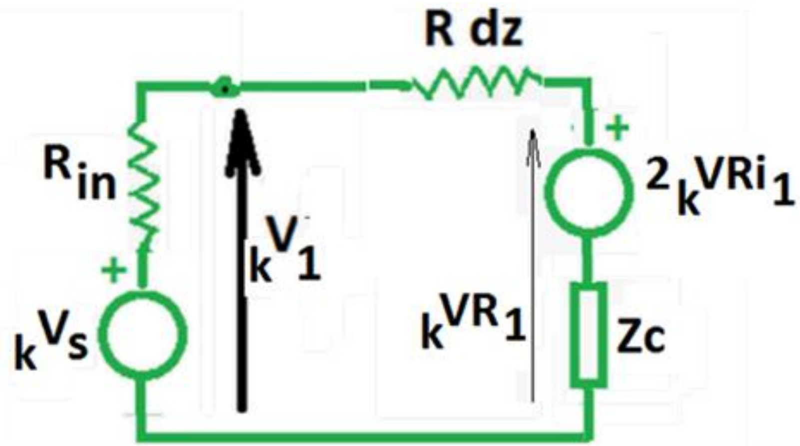
$$_{k}VL^{r}_{n} = {}_{k}V_{n} - {}_{k}VL^{i}_{n} \qquad (11)$$

Intante "k+1":

$$_{k+1}VL^{i}_{n} = {}_{k}VR^{r}_{n-1} \qquad (12)$$

Equacionamento TLM – Linha terminada numa fonte Vs





Segmento nos terminais da LT, e o equivalente Thevenin.
(não existe, obviamente, tensões incidentes pela esquerda VLi).

Equacionamento TLM – Linha terminada numa fonte Vs

Instante “k”:

$_kV_S$ = tensão da fonte

R_S = resistência interna da fonte.

$$ {}_kV_1 = \frac{\dfrac{{}_kV_s}{R_s} + \dfrac{2\,{}_kVR_1^{\,i}}{Z_0 + R}}{\dfrac{1}{R_s} + \dfrac{1}{R + Z_c}} \qquad (13) $$

$$ {}_kI_1 = \frac{{}_kV_1 - 2\,{}_kVR_1^{\,i}}{R + Z_0} \qquad (14) $$

$$ {}_kVR_1 = 2\,{}_kVR^i{}_1 + {}_kI_1 Z_0 \qquad (15) $$

$$ {}_kVR^r{}_1 = {}_kVR_1 - {}_kVR^i{}_1 \qquad (16) $$

Instante “k+1”:

$$ {}_{k+1}VR^i{}_1 = {}_kVL^r{}_2 \qquad (17) $$

Aplicação

Teste o código MATLAB/OCTAVE a seguir

TLM em 1D – MATLAB

```
clear all; close all; clc;

% Parâmetros da linha de transmissão
jm = 200;             % Número de nós da linha
j = 1:jm;

compr = 15;           % Comprimento da linha
dx = compr./jm;       % Incremento espacial

v = 3e8;              % Velocidade da luz
tal = dx/v;           % Incremento temporal (dt)
R = 1e-3;             % Resistência série
Zc = 50;              % Impedância característica
Rin = 50;             % Impedância interna da fonte
L = tal*Zc;           % Indutância por seção
C = tal/Zc;           % Capacitância por seção

% Parâmetros da frequência
f = 125e6;            % Frequência
w = 2*pi*f;           % Frequência angular
lambda = v/f;         % Comprimento de onda
```

```
% Resistência e indutância da carga:
XL = 0.01;            % Reatância indutiva
LL = XL/w;            % Indutância
RL = 0;               % Resistência da carga
ZL = 2*LL/tal;        % Impedância da carga
normalizada

% Outros tipos de carga-----------------------------
% Carga resistiva casada:
%RL = Zc; XL = 0; ZL = 2*LL/tal;

% Carga indutiva maior:
%XL = 100; LL = XL/w; RL = 25; ZL = RL + 2*LL/tal;

% Circuito aberto:
RL = 1e12; XL = 0; ZL = RL;

% Curto-circuito:
%RL = 0; XL = 0; ZL = 0;
```

TLM em 1D – MATLAB

```
% Passo temporal
dt = tal;

% Vetor de tempo
t = 0:tal:500*tal;
nn = length(t);
nm = nn;
nt = 1:nn;

% Inicialização das variáveis TLM
vri(1:jm) = 0;          % Pulsos de tensão refletidos
(direita)
vli(1:jm) = 0;          % Pulsos de tensão refletidos
(esquerda)
vlr(1:jm) = 0;          % Pulsos de tensão espalhados
(esquerda)
vrr(1:jm) = 0;          % Pulsos de tensão espalhados
(direita)
v(1:jm) = 0;            % Tensão nos nós
i(1:jm,1:nm) = 0;       % Corrente nos nós
VL(1:jm,1:nm) = 0;      % Matriz para armazenar
tensões

vfr = 0;                % Variáveis auxiliares
vfc = 0;
```

```
% Loop principal no tempo
for n = 1:nn-1
   t_atual = n*dt;

   % Definindo tensão INTERNA da fonte (antes da
resistência interna):
   % Vsaida_desejada = 1876*( exp(-t_atual*1.e7/8.57)
- exp(-t_atual*1.e7/0.3) );
                                   % Pulso exponencial
   % Vsaida_desejada = 200*sin(w*t_atual);          %
Senoidal
    Vsaida_desejada = 1;                          % Degrau
   % Vsaida_desejada = 2*38*( exp(-t_atual*0.08e6) -
exp(-t_atual*5.6e6) );
                                   % Outro pulso
   % Impedância total vista pelo primeiro nó
   Z_total = R + Zc;  % Impedância da linha
```

TLM em 1D – MATLAB

```
 % Tensão no primeiro nó considerando divisor de tensão entre Rin e Z_total
   % e os pulsos refletidos do TLM
   vfonte_interna = Vsaida_desejada * (Rin + R + Zc) / (R + Zc);                  % Tensão interna calculada
   numerador = vfonte_interna/Rin + 2*vri(1)/Z_total;
   denominador = 1/Rin + 1/Z_total;
   v(1) = numerador/denominador;
   % Corrente no primeiro nó
   i(1,n) = (v(1) - 2*vri(1))/Z_total;

   % Salvar valores para gráficos
   VL(1,n) = v(1);
   % Ao longo da linha (nós intermediários)
   for j = 2:jm-1
      v(j) = (2*vli(j)/Zc+2*vri(j)/(Zc+R))/(1/Zc+1/(Zc+R));
      i(j,n) = (v(j) - 2*vri(j))/(R+Zc);
      vlr(j) = v(j) - vli(j);      % Espalhamento para a esquerda
      vrr(j) = vri(j) + Zc*i(j,n); % Espalhamento para a direita
      % Salvar valores
      VL(j,n) = v(j);
   end
```

```
 % Final da linha (nó jm) - Terminação com impedância ZL
   v(jm) = (2*vli(jm)/Zc )/(1/Zc +1/(RL+ZL));
   i(jm,n) = (v(jm))/(RL+ZL+Zc);

   % Espalhamento nas extremidades:
   vrr(1) = vri(1) + Z_total*i(1,n);    % Espalhamento no início
   vlr(jm) = v(jm) - vli(jm);         % Espalhamento no final

   % Conexões (propagação dos pulsos):
   vri(1) = vlr(2);                % Pulso vindo da direita para o nó 1
   vli(jm) = vrr(jm-1);              % Pulso vindo da esquerda para o nó jm

   VL(jm,n) = v(jm);

   % Conexões internas (propagação entre nós adjacentes)
   for j = 2:jm-1
      vli(j) = vrr(j-1);         % Pulso vindo da esquerda
      vri(j) = vlr(j+1);         % Pulso vindo da direita
   end
end
```

IT-309 – Tópicos em Sistemas de Energia Elétrica

José Pissolato Filho / Geraldo Peres Caixeta – 2025

UNICAMP

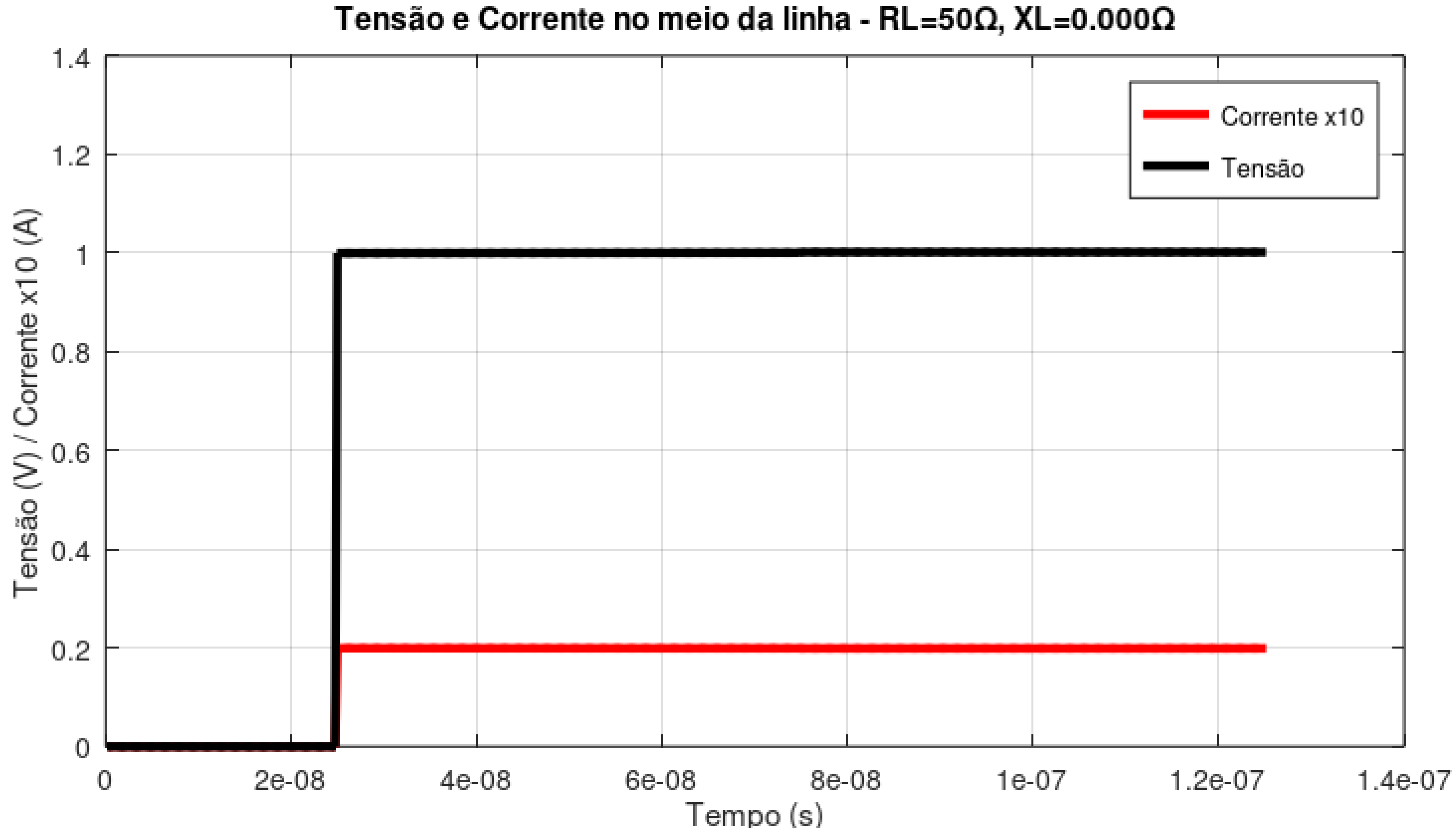
TLM em 1D – MATLAB

```
% Cálculo da tensão de saída teórica da fonte para verificação
vini_teorico = vfonte_interna * (R + Zc) / (Rin + R + Zc);
fprintf('Tensão interna da fonte: %.1f V\n', vfonte_interna);
fprintf('Tensão de saída teórica da fonte: %.1f V\n', vini_teorico);
fprintf('Tensão simulada no primeiro nó (regime permanente): %.1f V\n', VL(1,end-1));

% SAIDA EM GRAFICOS:

% Configuração do tamanho das fontes
tamanho_fonte = 14;        % Tamanho da fonte para textos
tamanho_legenda = 12;      % Tamanho da fonte para legendas
tamanho_titulo = 16;       % Tamanho da fonte para títulos
```

```
% Gráfico de corrente (x10) e tensão no meio da linha:
figure(1);
plot((1:nm-1)*dt, i(jm/2,1:nm-1)*10, 'r', 'LineWidth', 2)
hold on
plot((1:nm-1)*dt, VL(jm/2,1:nm-1), 'k', 'LineWidth', 2)
xlabel('Tempo (s)', 'FontSize', tamanho_fonte)
ylabel('Tensão (V) / Corrente x10 (A)', 'FontSize', tamanho_fonte)
legend('Corrente x10', 'Tensão', 'Location', 'best', 'FontSize', tamanho_legenda)
%title('Tensão e Corrente no meio da linha de transmissão', 'FontSize', tamanho_titulo)
title(sprintf('Tensão e Corrente no meio da linha - RL=%.0fΩ, XL=%.3fΩ', RL, XL), 'FontSize', tamanho_titulo)
set(gca, 'FontSize', tamanho_fonte)
grid on
```

Exemplo: Resposta ao degrau unitário de uma linha de 15,0m; Zc = 50 Ω

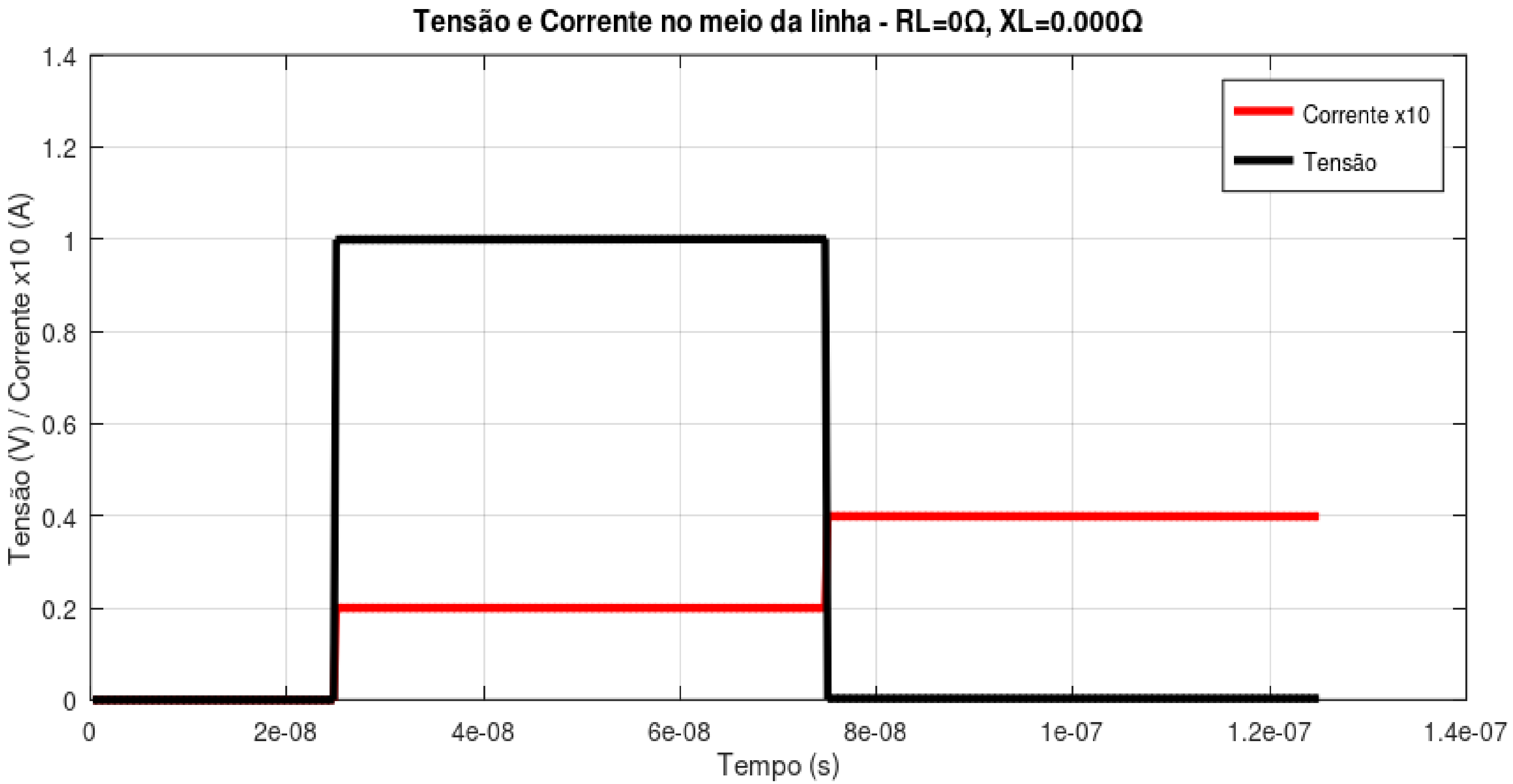
Linha casada



Obs.: $\frac{v(t)}{i(t)} = Z_C$ em qualquer posição da linha.

Exemplo: Resposta ao degrau unitário de uma linha de 10,0m; Zc = 50 Ω

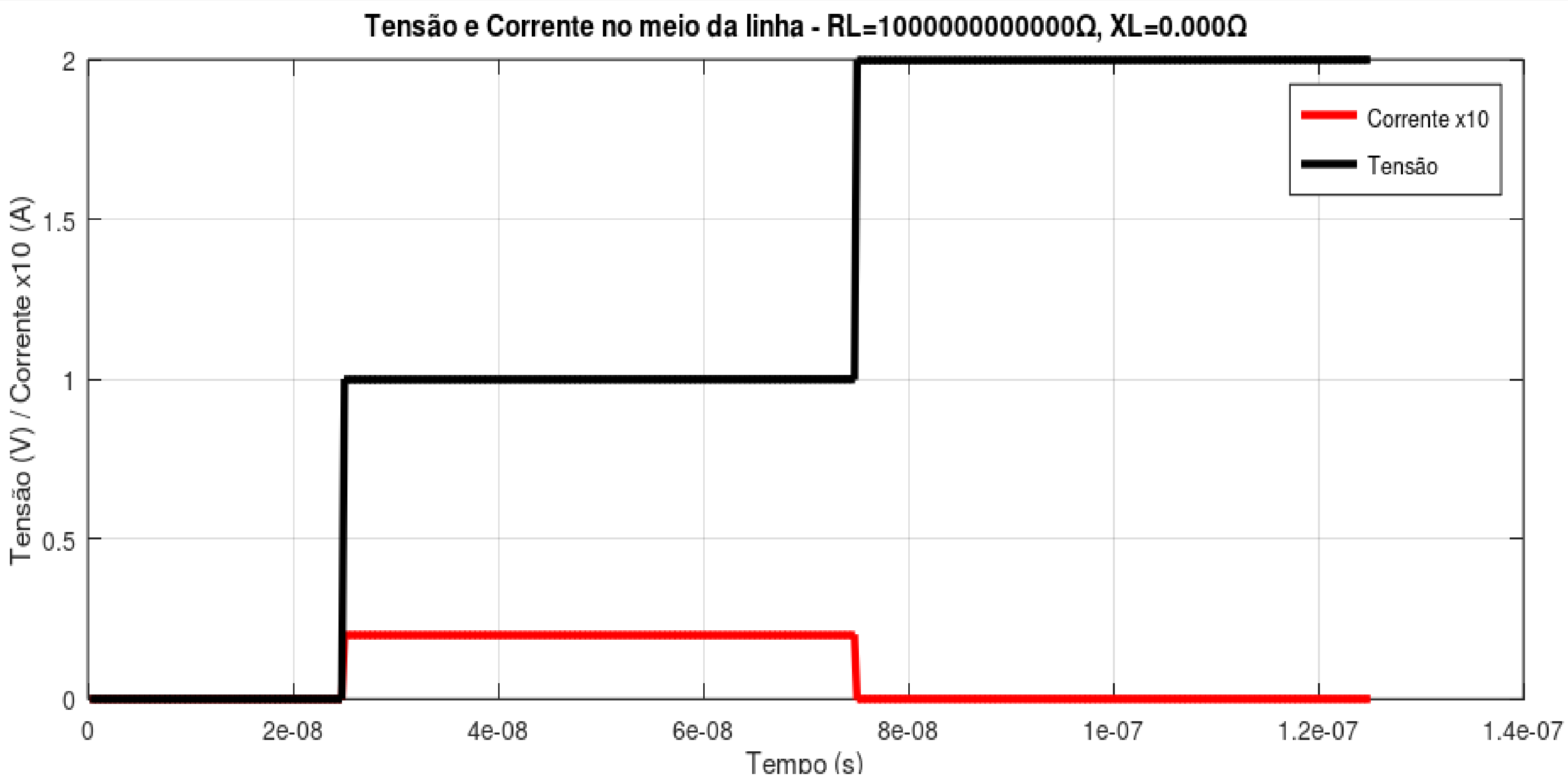
Linha em curto-circuito



Obs.: $\frac{v(t)}{i(t)} = Z_C$ para 25 $ns < t < 75\ ns$ e $\frac{v(t)}{i(t)} = 0$, para $t > 75\ ns$.

Exemplo: Resposta ao degrau unitário de uma linha de 15,0m; Zc = 50 Ω

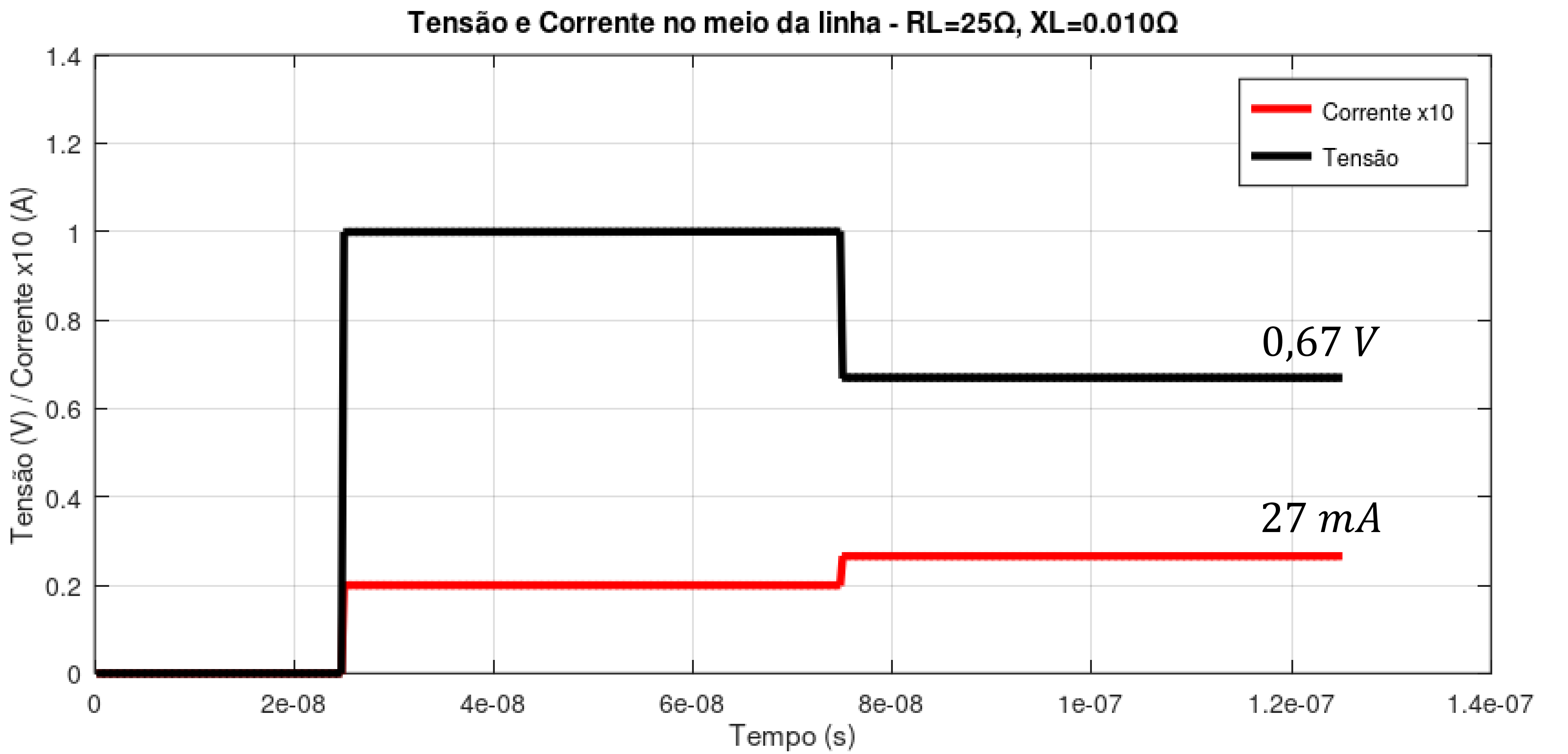
Linha aberta



Obs.: $\frac{v(t)}{i(t)} = Z_C$ para $25\ ns < t < 75\ ns$ e $\frac{v(t)}{i(t)} = \infty$, para $t > 75\ ns$.

Exemplo: Resposta ao degrau unitário de uma linha de 15,0m; Zc = 50 Ω

Linha terminada numa carga de 25Ω



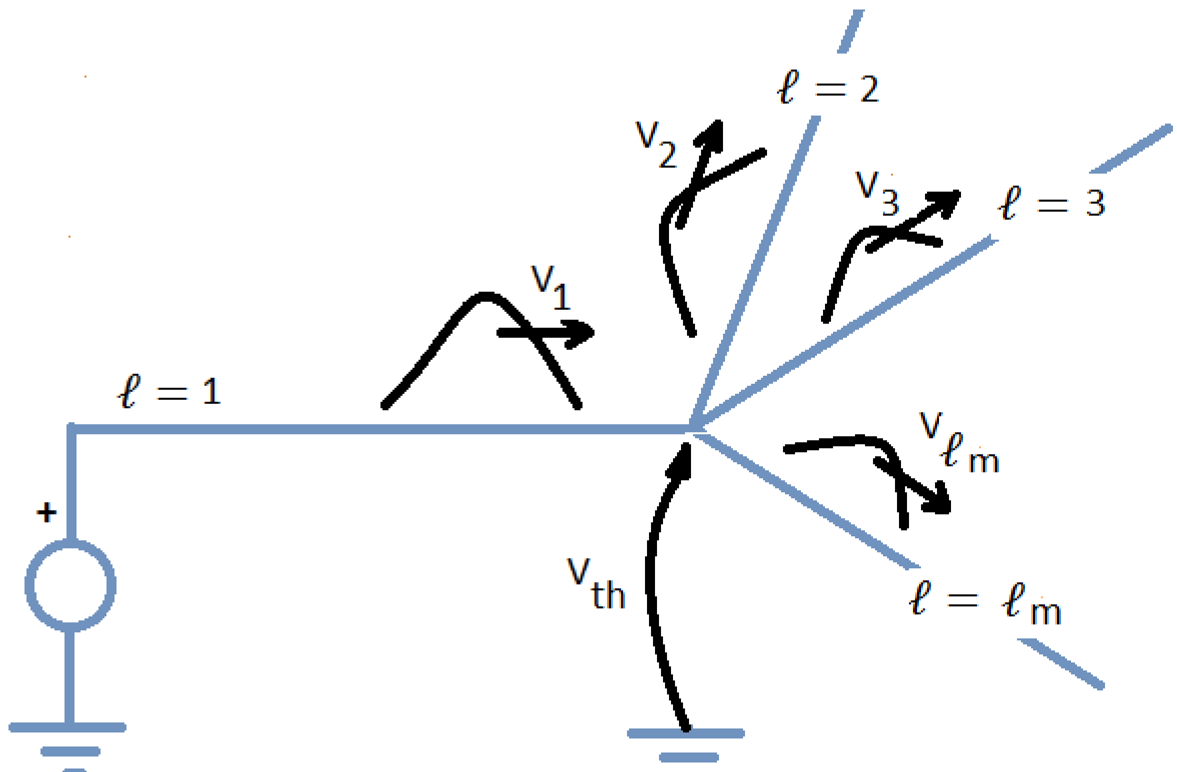
Obs.: $K_V = \frac{25-50}{25+50} = -0{,}33 \quad \rightarrow V_{CARGA} = 1 + (-0{,}33) \times 1 = 0{,}67\ V$

Condições de contorno para nó contendo múltiplas LTs

O método oferece a simplicidade no tratamento de sinais, mantendo a dimensão 1D e o desempenho computacional.

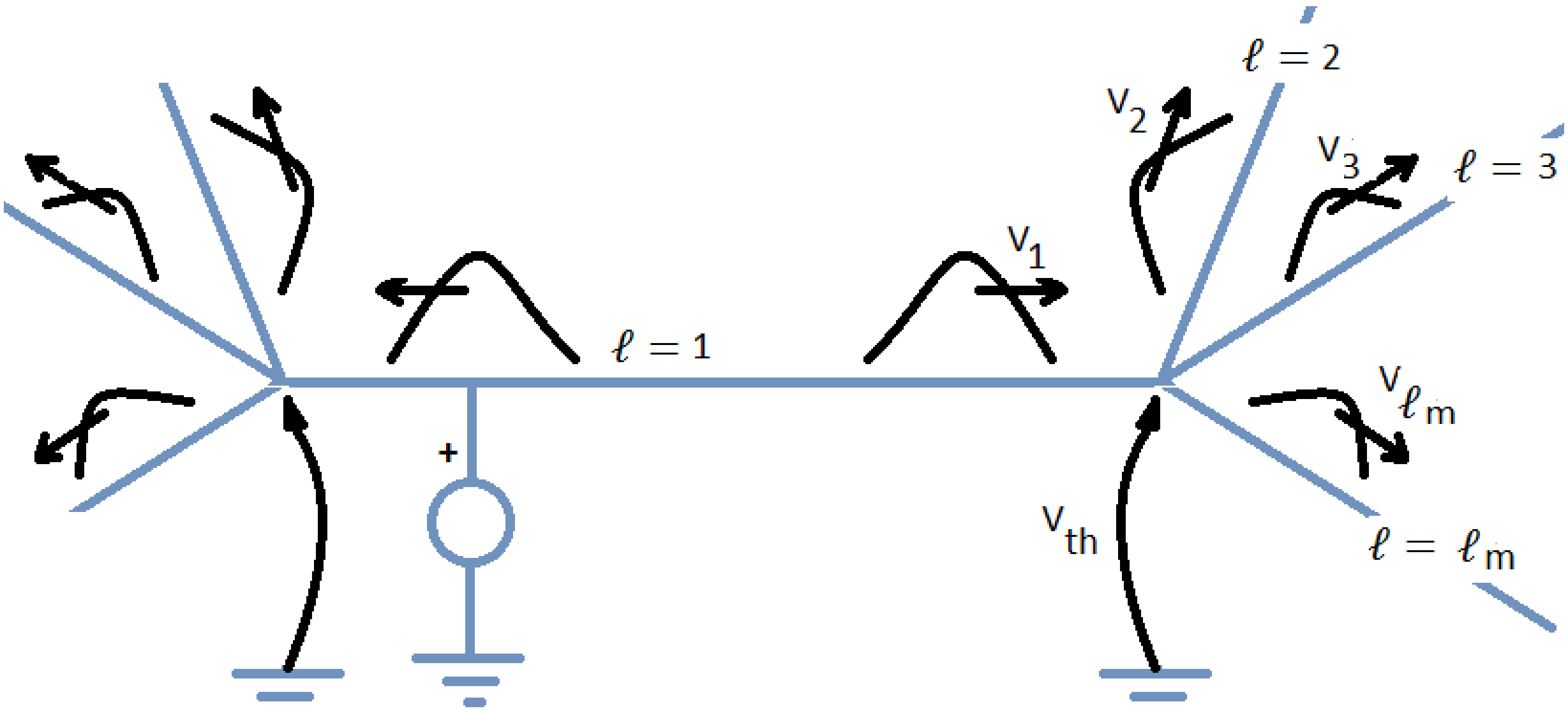
Consiste em:

- Alterar as condições do contorno no nó da ponta que possui mais que uma LT, considerando a impedância equivalente do paralelo da impedância característica das demais LTs.
- Alterar as condições de contorno no nó da ponta de cada uma das demais LTs, considerando o sinal transmitido pela LT anterior.



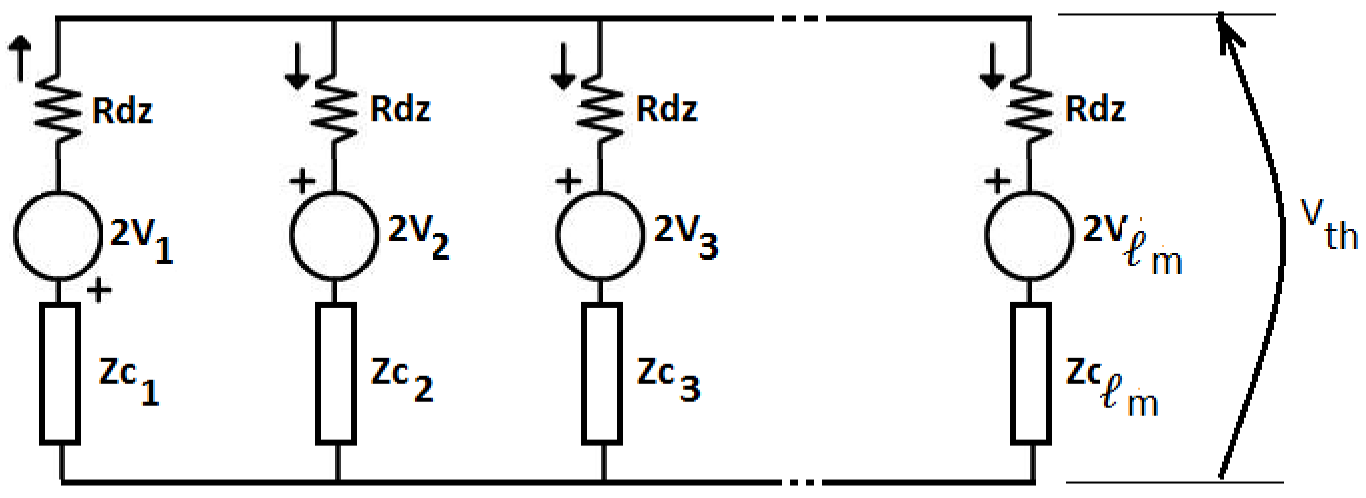
Contorno contendo múltiplas LTs

Ou ... Etc. etc. etc.



TLM no contorno contendo múltiplas LTs

Equivalente Thevenin no contorno de múltiplas linhas, cada uma com impedância característica Z_{C_ℓ}



Contorno contendo múltiplas LTs

No nó de junção, a matriz de espalhamento é dada pela expressão

$$[\boldsymbol{V}_\ell^r]_k = [\boldsymbol{S}_k]\left[\boldsymbol{V}_\ell^i\right]_k$$

$$S_k = \begin{bmatrix} \frac{Z_p^1 - Z_{c_1}}{Z_p^1 + Z_{c_1}} & \frac{Z_{c_2} - Z_p^2}{Z_p^2 + Z_{c_2}} & \cdots & \frac{Z_{c_{lm}} - Z_p^{lm}}{Z_p^{lm} + Z_{c_{lm}}} \\ & \frac{Z_p^2 - Z_{c_2}}{Z_p^2 + Z_{c_2}} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{Z_{c_{lm}} - Z_p^{lm}}{Z_p^{lm} + Z_{c_{lm}}} & & \cdots & \frac{Z_p^{lm} - Z_{c_{lm}}}{Z_p^{lm} + Z_{c_{lm}}} \end{bmatrix}$$

$\left[\boldsymbol{V}_\ell^i\right]_k$ = matriz de tensões incidentes (diretas) sobre a linha ℓ no instante $\mathrm{k}\Delta t$.
$[\boldsymbol{V}_\ell^r]_k =$ matriz de tensões refletidas para a ℓ no instante $\mathrm{k}\Delta t$.
ℓ_m = número de linhas conectadas ao nó.
Z_P^ℓ = impedância equivalente do paralelo das impedâncias características das linhas adjacentes à linha ℓ.

Aplicação 3D

Teste o código 3D-TLM.cc (c++, disponível em arquivo compactado)
Ou e-mail: g.caixeta@ieee.org

Dr. W.J.R. Hoefer
Department of Electrical and Computer Engineering
University of Victoria
Victoria, British Columbia
Canada, V8W 3P6

Expressões Algébricas para campo eletromagnético no domínio do tempo e em coordenadas Cartesianas

Em casos de transitórios de sinais e de fenômenos não lineares, o estudo dos sinais no domínio do tempo se torna menos enfadonho e mais eficiente quando comparado com o domínio da frequência.

O sistema de coordenadas Cartesianas se justifica quando encontramos transitórios envolvendo geometrias mais complicadas.

As expressões analíticas para o cálculo do campo a partir do transitório de corrente elétrica se torna extremamente útil.

Com isso, podemos aplicar a técnica TLM 1D em conjunto com as expressões analíticas para conhecer o campo eletromagnético resultante em determinadas regiões do espaço, sem a necessidade de

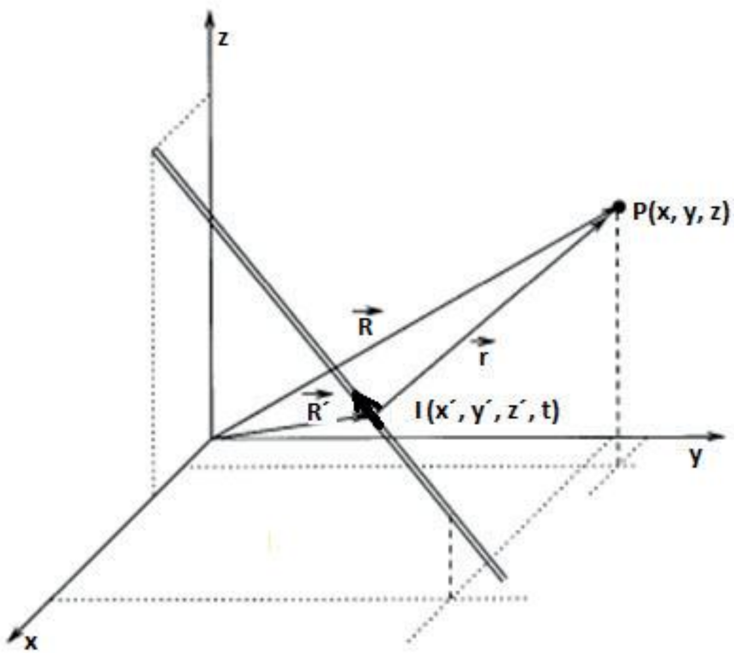
IT-309 – Tópicos em Sistemas de Energia Elétrica

José Pissolato Filho / Geraldo Peres Caixeta – 2025

UNICAMP

Expressões Algébricas para campo eletromagnético no domínio do tempo e em coordenadas Cartesianas

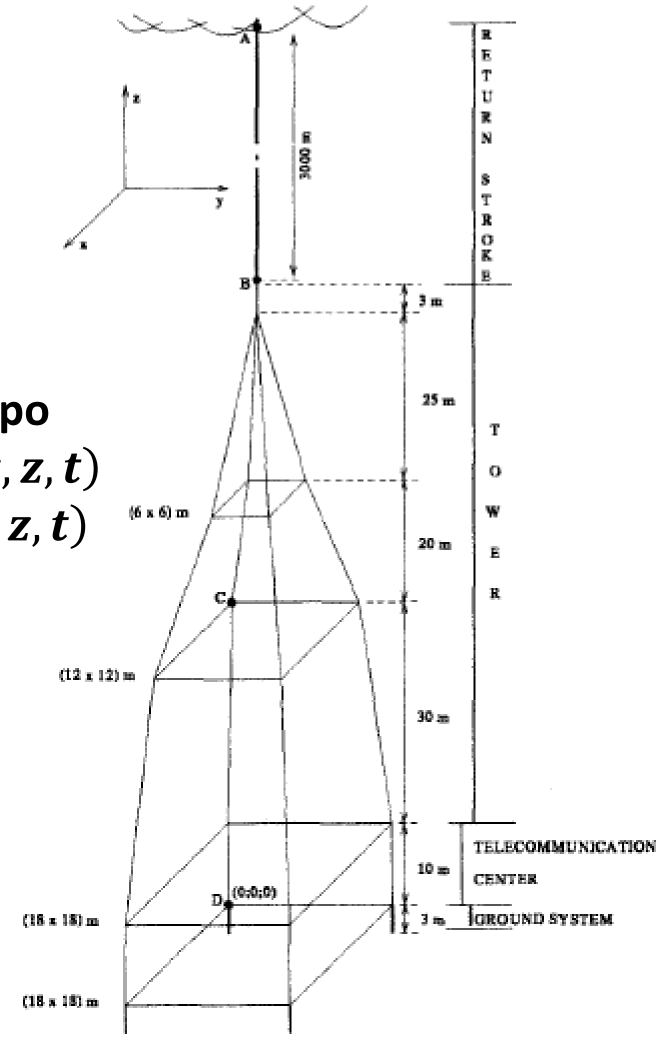
Segmento de um condutor disposto numa geometria qualquer...



Campo

$\boldsymbol{H}(x, y, z, t)$

$\mathbf{E}(x, y, z, t)$



Campo Magnético H(x, y, z, t):

$$\vec{H}(R,t) = -\int \frac{1}{4\pi r^2}\left\{\left[\frac{(y-y')}{c}\frac{\partial i_z\left(r',t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}+\frac{i_z\left(r',t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right]dz' - \left[\frac{(z-z')}{c}\frac{\partial i_y\left(r',t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}+\frac{i_y\left(r',t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right]dy'\right\}\hat{a}_x$$

$$-\int \frac{1}{4\pi r^2}\left\{\left[\frac{(z-z')}{c}\frac{\partial i_x\left(r',t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}+\frac{i_x\left(r',t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right]dx' - \left[\frac{(x-x')}{c}\frac{\partial i_z\left(r',t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}+\frac{i_z\left(r',t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right]dz'\right\}\hat{a}_y$$

$$-\int \frac{1}{4\pi r^2}\left\{\left[\frac{(x-x')}{c}\frac{\partial i_y\left(r',t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}+\frac{i_y\left(r',t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right]dy' - \left[\frac{(y-y')}{c}\frac{\partial i_x\left(r',t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}+\frac{i_x\left(r',t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right]dx'\right\}\hat{a}_z$$

Campo Elétrico E(x, y, z, t):

$$\vec{E}(R,t) = \int_R dE_x(R,t)\hat{a}_x + \int_R dE_y(R,t)\hat{a}_y + \int_R dE_z(R,t)\hat{a}_z$$

Componente "x" do campo elétrico

$$4\pi\varepsilon_0 dE_x(R,t) =$$

$$= \left\{ \left[\frac{3(x-x')^2}{r^4 c} - \frac{1}{r^2 c}\right] i_x\left(r', t-\frac{r}{c}\right) + \left[\frac{(x-x')^2}{r^3 c^2} - \frac{1}{r c^2}\right] \frac{\partial i_x\left(r', t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t} \right.$$

$$\left. + \left[\frac{3(x-x')^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right] \int_0^t i_x\left(r', t-\frac{r}{c}\right) d\tau \right\} dx'$$

$$+ \left\{ \frac{3(x-x')(y-y')}{r^4 c} i_y\left(r', t-\frac{r}{c}\right) + \frac{(y-y')(x-x')}{r^3 c^2} \frac{\partial i_y\left(r', t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t} \right.$$

$$\left. + \frac{3(x-x')(y-y')}{r^5} \int_0^t i_y\left(r', t-\frac{r}{c}\right) d\tau \right\} dy'$$

$$+ \left\{ \frac{3(x-x')(z-z')}{r^4 c} i_z\left(r', t-\frac{r}{c}\right) + \frac{(z-z')(x-x')}{r^3 c^2} \frac{\partial i_z\left(r', t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t} \right.$$

$$\left. + \frac{3(x-x')(z-z')}{r^5} \int_0^t i_z\left(r', t-\frac{r}{c}\right) d\tau \right\} dz'$$

Componente "y" do campo elétrico

$$4\pi\varepsilon_0 dE_y(R,t) =$$

$$\left\{\frac{3(x-x')(y-y')}{r^4 c}\, i_x\left(r', t-\frac{r}{c}\right) + \frac{(y-y')(x-x')}{r^3 c^2}\, \frac{\partial i_x\left(r', t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t} + \frac{3(x-x')(y-y')}{r^5} \int_0^t i_x\left(r', t-\frac{r}{c}\right) d\tau \right\} dx'$$

$$+ \left\{\left[\frac{3(y-y')^2}{r^4 c} - \frac{1}{r^2 c}\right] i_y\left(r', t-\frac{r}{c}\right) + \left[\frac{(y-y')^2}{r^3 c^2} - \frac{1}{r c^2}\right] \frac{\partial i_y\left(r', t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t} + \left[\frac{3(y-y')^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right] \int_0^t i_y\left(r', t-\frac{r}{c}\right) d\tau \right\} dy'$$

$$+ \left\{\frac{3(y-y')(z-z')}{r^4 c}\, i_z\left(r', t-\frac{r}{c}\right) + \frac{(z-z')(y-y')}{r^3 c^2}\, \frac{\partial i_z\left(r', t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t} + \frac{3(y-y')(z-z')}{r^5} \int_0^t i_z\left(r', t-\frac{r}{c}\right) d\tau \right\} dz'$$

Componente "z" do campo elétrico

$$4\pi\varepsilon_0 dE_z(R,t) =$$

$$\left\{\frac{3(x-x')(z-z')}{r^4c}\, i_x\left(r',t-\frac{r}{c}\right)+\frac{(z-z)(x-x')}{r^3c^2}\,\frac{\partial i_x\left(r',t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}\right.$$

$$\left.+\frac{3(x-x')(z-z')}{r^5}\int_0^t i_x\left(r',t-\frac{r}{c}\right)d\tau\right\}dx'$$

$$+\left\{\frac{3(y-y')(z-z')}{r^4c}\, i_y\left(r',t-\frac{r}{c}\right)+\frac{(z-z')(y-y')}{r^3c^2}\,\frac{\partial i_y\left(r',t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}\right.$$

$$\left.+\frac{3(y-y')(z-z')}{r^5}\int_0^t i_y\left(r',t-\frac{r}{c}\right)d\tau\right\}dy'$$

$$+\left\{\left[\frac{3(z-z')^2}{r^4c}-\frac{1}{r^2c}\right] i_z\left(r',t-\frac{r}{c}\right)+\left[\frac{(z-z')^2}{r^3c^2}-\frac{1}{rc^2}\right]\frac{\partial i_z\left(r',t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}\right.$$

$$\left.+\left[\frac{3(z-z')^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right]\int_0^t i_z\left(r',t-\frac{r}{c}\right)d\tau\right\}dz'$$

Expressões Algébricas para campo eletromagnético no domínio do tempo e em coordenadas Cartesianas

Considerações sobre as equações acima

1) Em cada componente vetorial do campo elétrico estão presentes os termos de Campo Próximo, Campo Irradiado e Campo Distante.

i. Campo Próximo → Campo Eletrostático: expressos em função da carga – integrais temporais da corrente:

$$\int_0^t i_x\left(r', t - \frac{r}{c}\right) d\tau \ \ (C),$$

→ são funções inversamente proporcional ao cubo da distância $1/r^3$.

Expressões Algébricas para campo eletromagnético no domínio do tempo e em coordenadas Cartesianas

Considerações sobre as equações acima

ii. Campo indutivo: expressos em função direta da corrente:

$$i(r', t - r/c) \quad (A)$$

→ são funções inversamente proporcional ao quadrado da distância $1/r^2$.

iii. Campo Distante → Campo Irradiado: expressos em função da derivada da corrente no tempo:

$$\frac{\partial i\left(r', t - \frac{r}{c}\right)}{\partial t} \quad (A/s)$$

→ são funções inversamente proporcional à distância $1/r$.

Expressões Algébricas para campo eletromagnético no domínio do tempo e em coordenadas Cartesianas

Considerações sobre as equações acima

iv. As expressões da intensidade de campo magnético, possui apenas as componentes em função direta da corrente elétrica e de sua derivada no tempo.

A ausência de componente em função da integral da corrente no tempo - relacionada ao conceito de carga elétrica, é obviamente justificada pela própria lei de Faraday.

José Pissolato Filho / Geraldo Peres Caixeta – 2025

UNICAMP

Expressões Algébricas para campo eletromagnético no domínio do tempo e em coordenadas Cartesianas

Exemplo – Descarga na EPDA de uma torre com 85m de altura (1997):

Caso 1: Descarga incidindo diretamente no ponto B(9, 9, 85) da EPDA.

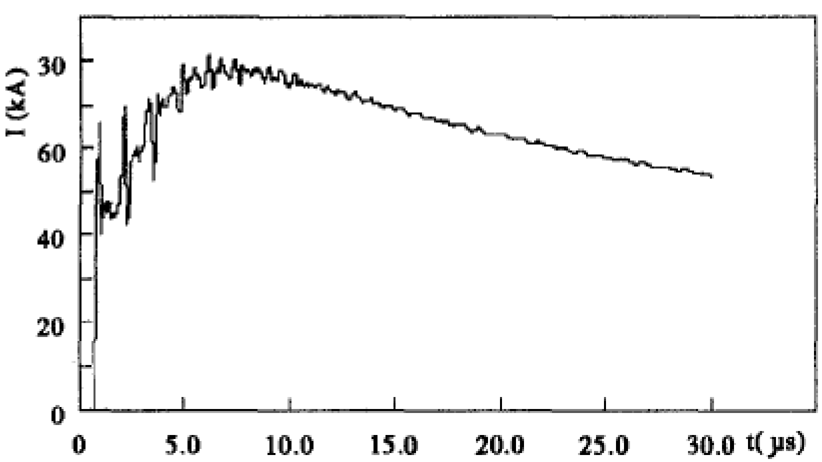
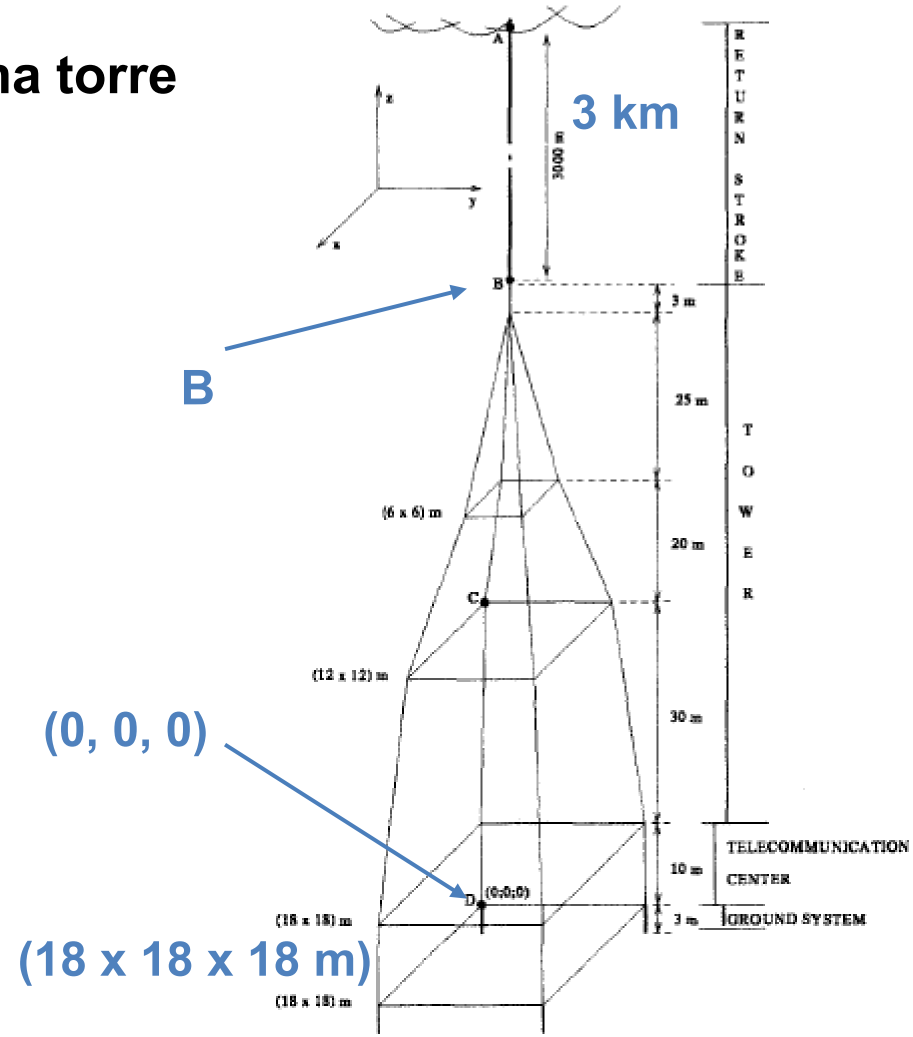


Figure 2. Current stroke at point B of the LPS.



IT-309 – Tópicos em Sistemas de Energia Elétrica

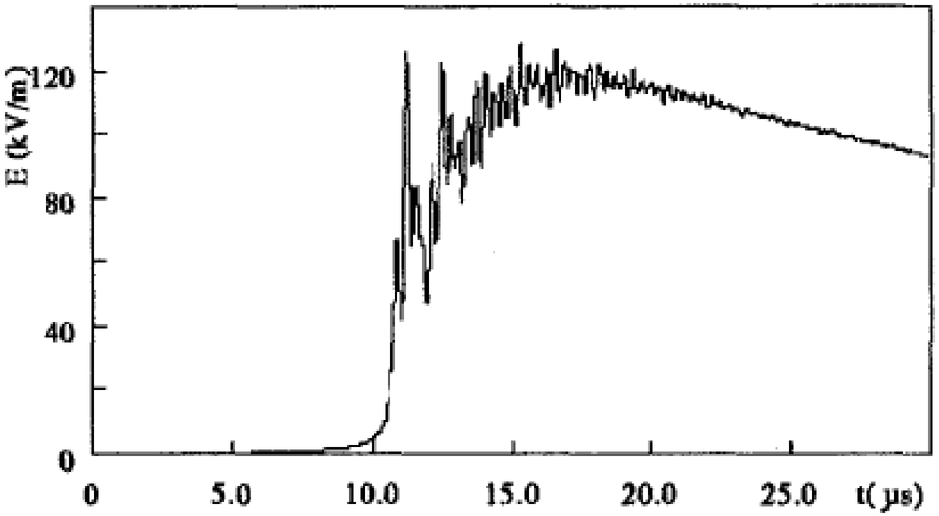
José Pissolato Filho / Geraldo Peres Caixeta – 2025

UNICAMP

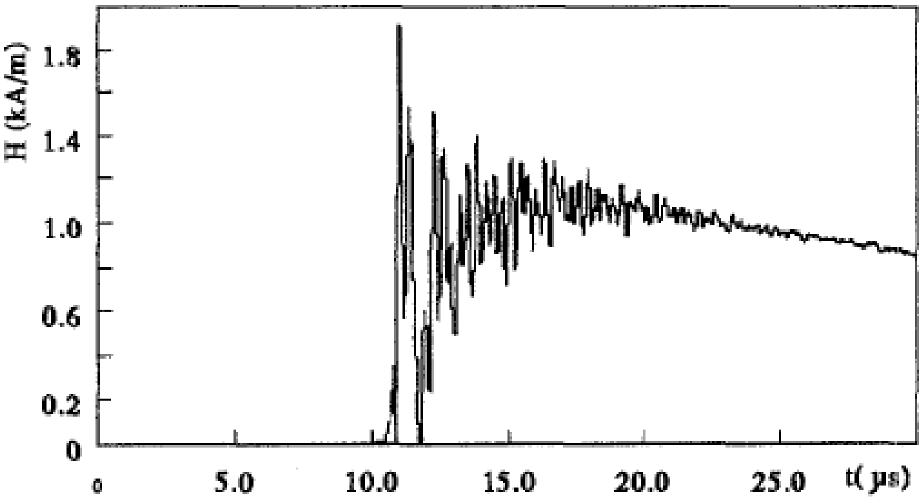
Expressões Algébricas para campo eletromagnético no domínio do tempo e em coordenadas Cartesianas

Resultados – descarga no ponto B(9, 9, 85) da EPDA

Campo eletromagnético no ponto P(15, 15, 5) (metros)



a) Electric Field

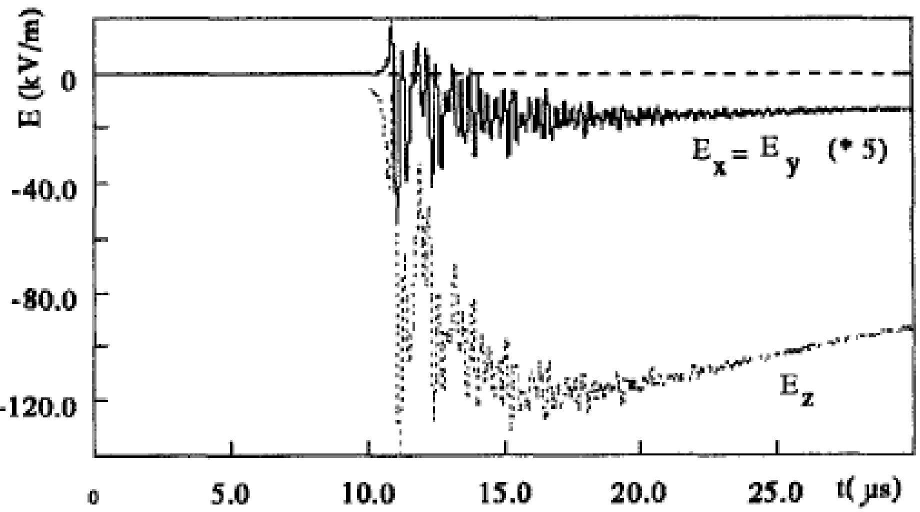


b) Magnetic field.

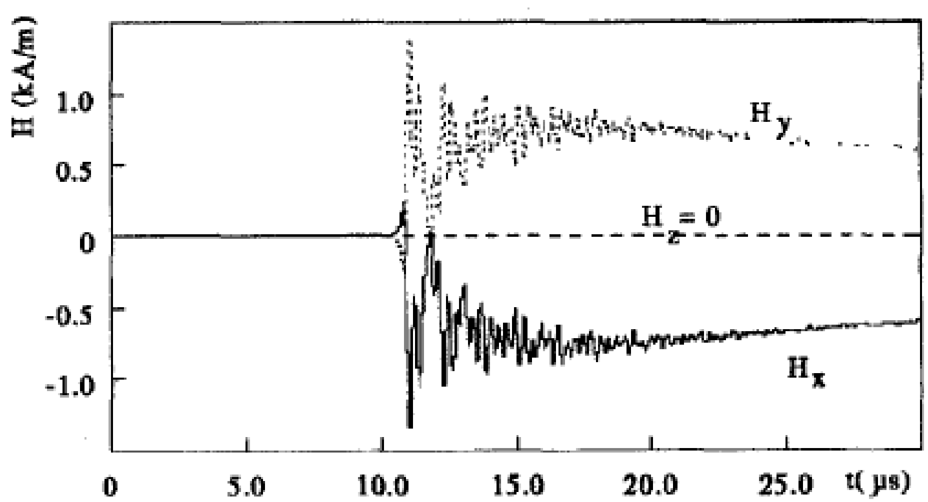
Expressões Algébricas para campo eletromagnético no domínio do tempo e em coordenadas Cartesianas

Resultados – descarga no ponto B(9, 9, 85) da EPDA

Componentes vetoriais do campo eletromagnético no ponto P(15, 15, 5).



a) Electric field



b) Magnetic field.

Conclusão

- A técnica numérica TLM destaca-se por unir precisão no cálculo de transitórios de corrente e flexibilidade para modelagem geométrica complexa, sendo muito útil em estudos de compatibilidade eletromagnética.
- As expressões analíticas do campo eletromagnético no domínio do tempo e em coordenadas Cartesianas, pode facilitar esses estudos, ao considerar a combinação dessas expressões com a técnica numérica TLM. Essa combinação demonstra-se particularmente menos oneroso para análises onde:
    - **Geometrias complexas** (como estruturas de proteção contra descargas atmosféricas ou placas de circuito impresso) exigem flexibilidade computacional;
    - **Transitórios de corrente** são determinados com precisão pela TLM, servindo como entrada direta para as expressões propostas;

Conclusão

- **Características do campo eletromagnético**. As expressões algébricas permitem analisar as características do campo eletromagnético tanto em regime de campo próximo quanto de campo distante, isolando a contribuição individual de cada região para o fenômeno estudado — essencial em problemas como acoplamento indutivo em geometrias complexas ou irradiação em sistemas de aterramento estratificado.

- **Recursos computacionais** são otimizados, evitando a sobrecarga de métodos puramente numéricos (como FDTD ou elementos finitos) em cenários com fronteiras espaciais mal definidas ou muito extensas.

Conclusão

A validação cruzada entre os resultados obtidos com as expressões analíticas e técnicas consagradas (como as de Uman e Thomas-Christopoulos) reforça a robustez da metodologia.

A **sinergia entre TLM e as expressões analíticas** aqui apresentadas abre caminho para soluções eficientes em CEM, equilibrando rigor matemático e viabilidade computacional.

Como perspectiva futura, propõe-se aplicar a sinergia entre a técnica TLM e as expressões analíticas desenvolvidas à modelagem de sistemas de aterramento em solos estratificados, ampliando a precisão em estudos de compatibilidade eletromagnética e proteção contra descargas atmosféricas.

Referências

[1] UMAN, M. A. *Analytical Expression for the Electromagnetic Field from Lightning Return Strokes*. **Journal of Geophysical Research**, v. 80, n. 15, p. 2102-2108, 1975.

[2] THOMAS, D. W. P.; CHRISTOPOULOS, C. *Time-Domain Analysis of Electromagnetic Fields in Cartesian Coordinates*. **IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility**, v. 36, n. 2, p. 160-168, 1994.

[3] JOHNS, P.B. **The Art of Modelling. Electronics and Power**, Aug., 1979.

[4] C. Christopoulos. **The Transmission Line Modeling – TLM Method in Electromagnetics.** IEEE Press, 1995.

[5] E. K. Miller. **A selective survey of computational electromagnetics**. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 26, pp. 1281–1305, 1988.

[6] M.N.O. Sadiku. **Numerical Techniques in Electromagnetics**, 2nd. Edition. CRC Press, 2001.

[7] CAIXETA, Geraldo Peres. **Simulação Computacional de Descargas Atmosféricas em Estruturas de Proteção Visando Análises de Compatibilidade Eletromagnética**, Tese de doutorado, UNICAMP, 2000.

[8] PAUL, C.R. **Introduction to Electromagnetic Compatibility**. John Wiley & Sons, 1992, 765 p.

[9] CAIXETA, G.P and PISSOLATO FILHO, J. **Electromagnetic Fields Generated by Lightning on Protection Structures of Telecommunication Centers**, IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility, Austin - USA, august, 1997.

[10] CAIXETA, G.P and PISSOLATO FILHO, J. **Calculation of Electromagnetic Fields from Arbitrary Conductors Configurations in Time-Domain Simulations**, International Symposium on Electromagnetic Compatibility -- EMC'98 ROMA, Rome, Italy, September, 1998.

OBRIGADO!

Prof. Geraldo Peres Caixeta, junho/2025.
g.caixeta@ieee.org
https://www.linkedin.com/in/geraldoperescaixeta/

EXTRA...

A apresentação a seguir acrescenta no modelo, o acoplamento de campo eletromagnético em estruturas.

Posteriormente à aplicação do modelo visto até aqui, com o campo eletromagnético conhecido e incidindo sobre linha(s) ou estrutura(s), o sinal induzido nesses condutores é acrescido no modelo T}LM...

Método numérico TLM em 1D – Exemplos de aplicações

EPDA

Função:

Escoar a energia de uma descarga atmosférica para a terra, protegendo o seu interior contra incidência direta ou indireta (por indução).

É constituída por cabos interconectados e dispostos numa geometria genérica.

Modelo:

Cada cabo conectado é modelado como uma LT com parâmetros distribuídos, considerando solo perfeitamente condutor (teoria da imagem).

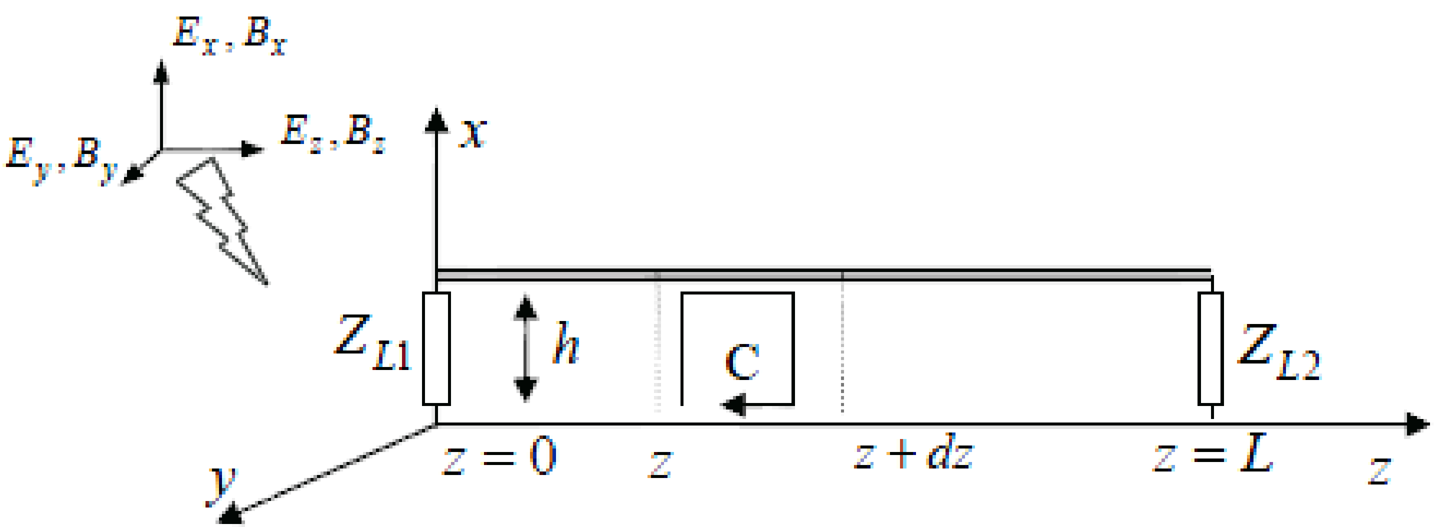
Método numérico TLM em 1D – Exemplos de aplicações

Interferência Eletromagnética
em cabos, linhas, EPDAs, PCBs, ...

TLM 1D

Método numérico TLM em 1D
→ Inclusão de acoplamento com campo eletromagnético externo

Sinal eletromagnético incidindo sobre linha(s) ou estrutura(s):



Método numérico TLM em 1D
Inclusão de acoplamento com campo eletromagnético externo

Equação da linha considerando a incidência de campo externo – Campo elétrico distribuído ao longo da linha (Maxwell):

$$\frac{\partial v^{s}(z,t)}{\partial z} + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} = E_z^{e}(h,z,t)$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} + C\frac{\partial v^{s}(z,t)}{\partial t} = 0$$

$v^s(z,t)$ = tensão de espalhamento:

$$v^s(z,t) = v(z,t) - v^e(z,t)$$

$$v^e(z,t) = -\int_0^h E^e{}_x(x,z,t)dx$$

$v^e(z,t)$ = tensão induzida.

$v(z,t)$ = tensão natural da linha.

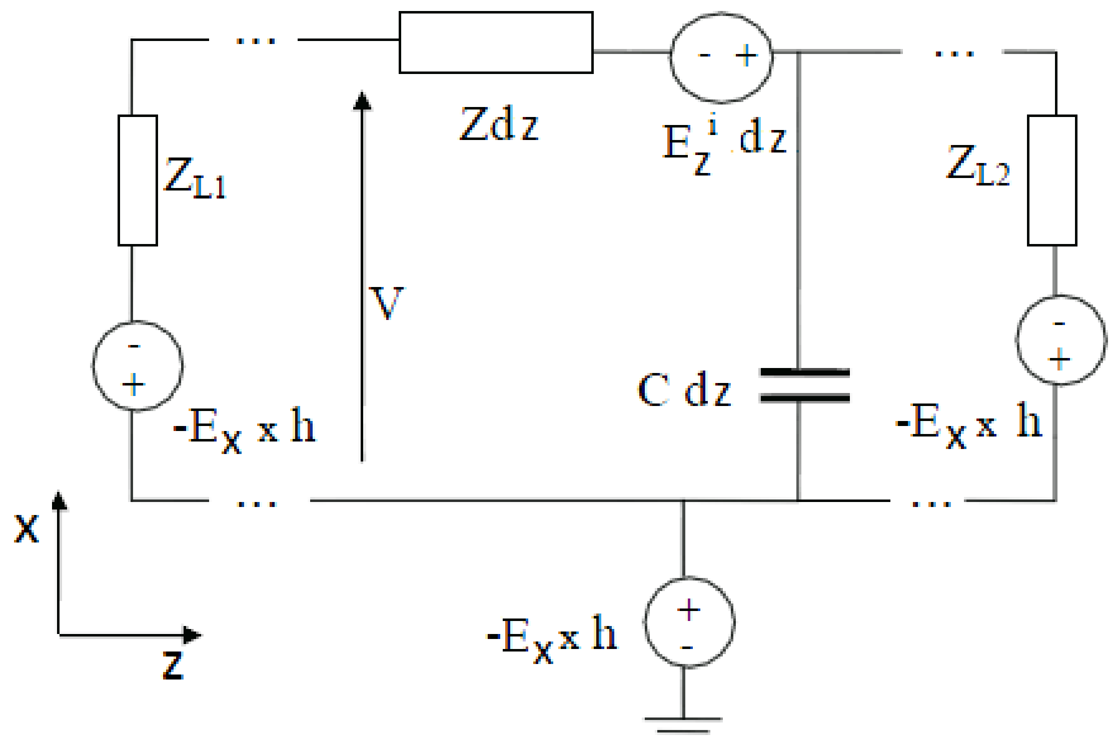
$$v^s(0,t) = -Z_{L1}\ i(0,t) + \int_0^h E_x^e(x,0,t)dx$$

$$v^s(L,t) = Z_{L2}\ i(L,t) + \int_0^h E_x^e(x,L,t)dx\,.$$

Condições de contorno

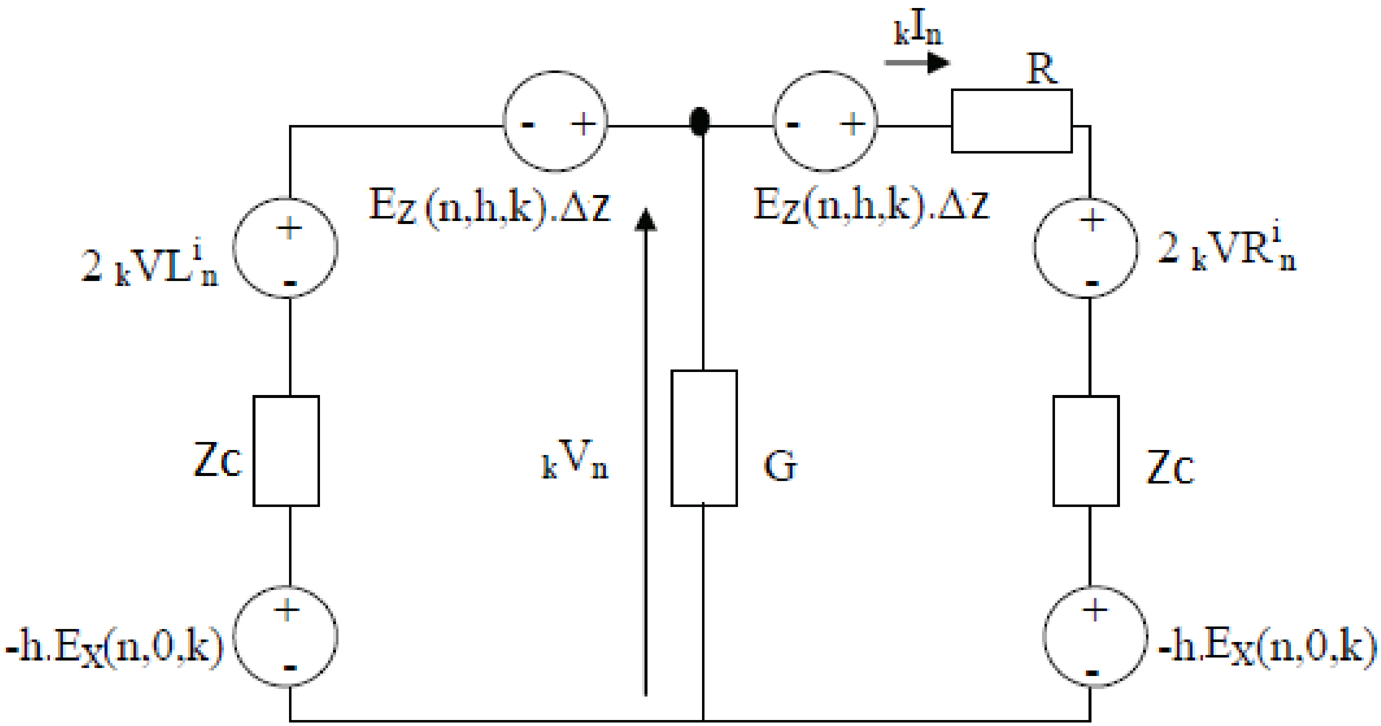
Inclusão de acoplamento com campo eletromagnético externo

Componente do **Campo Elétrico** paralela e vertical ao longo da linha e componente **vertical nas terminações**.
TLM: Inserção do efeito do campo externo sobre a linha como fontes de tensão em série com a tensão resultante em cada ponto da linha.



Inclusão de acoplamento com campo eletromagnético externo

Equivalente Thevenin / TLM



Componentes do campo elétrico externo:

Ex = vertical.

Ez = horizontal.

h = altura da linha, ou distância a partir da referência.

Inclusão de acoplamento com campo eletromagnético externo

Equacionamento TLM

$$
{}_kV_n = \frac{\dfrac{2\,{}_kVL^i{}_n}{Z_0} + \dfrac{2\,{}_kVR_n{}^i}{Z_0+R} - h\,E_z\left(\dfrac{1}{Z_0}+\dfrac{1}{Z_0+R}\right) + E_x\,\Delta x\left(\dfrac{1}{Z_0}-\dfrac{1}{Z_0+R}\right)}{\dfrac{1}{Z_0}+\dfrac{1}{R+Z_0}+G} \qquad \textbf{(1.i)}
$$

$$
{}_kI_n = \frac{{}_kV_n - 2\,{}_kVR_n{}^i + E_x\,\Delta x + h\,E_z}{R+Z_0} \qquad \textbf{(2.i)}
$$

Inclusão de acoplamento com campo eletromagnético externo

Equacionamento TLM

$$ {}_kVL_n = {}_kV_n \quad \textbf{(3.i)} $$

$$ {}_kVR_n = 2\,{}_kVR_n^{\,i} - E_x\,\Delta x - h\,E_Z + {}_kI_n\,Z_0 \quad \textbf{(4.i)} $$

$$ {}_kVL^r{}_n = {}_kVL_n - {}_kVL^i{}_n \quad \textbf{(5.i)} $$

$$ {}_kVR^r{}_n = {}_kVR_n - {}_kVR^i{}_n \quad \textbf{(6.i)} $$

$$ {}_{k+1}VL^i{}_n = {}_kVR^r{}_{n-1} \quad \textbf{(7.i)} $$

$$ {}_{k+1}VR^i{}_n = {}_kVL^r{}_{n+1} \quad \textbf{(8.i)} $$

Obs.: Apenas (4) é alterada → (4.i)

Inclusão de acoplamento com campo eletromagnético externo

Equacionamento TLM – terminação em uma carga Rt

Intante “k”:

$$ {}_{k}I_{n} = \frac{2\,{}_{k}VL_{n}^{\,i} + E_{x}\,\Delta x - 2\,h\,E_{Z}}{R_{T} + Z_{0}} \qquad \textbf{(9.i)} $$

$$ {}_{k}V_{n} = R_{T}\cdot{}_{k}I_{n} \qquad \textbf{(10.i)} $$

$$ {}_{k}VL^{r}{}_{n} = {}_{k}V_{n} - {}_{k}VL^{i}{}_{n} \qquad \textbf{(11.i)} $$

Intante “k+1”:

$$ {}_{k+1}VL^{i}{}_{n} = {}_{k}VR^{r}{}_{n-1} \qquad \textbf{(12.i)} $$

Inclusão de acoplamento com campo eletromagnético externo

Equacionamento TLM – terminação em uma fonte Vs

Intante "k":

$$ {}_kV_1 = \frac{\dfrac{{}_kV_s}{R_s} + \dfrac{2\,{}_kVR_1^{\,i} - h\,E_Z - E_x\,\Delta x}{Z_0 + R}}{\dfrac{1}{R_s} + \dfrac{1}{R + Z_0}} \qquad \textbf{(13.i)} $$

$$ {}_kI_1 = \frac{{}_kV_1 - 2\,{}_kVR_1^{\,i} + E_x\,\Delta x + h\,E_Z}{R + Z_0} \qquad \textbf{(14.i)} $$

$$ {}_kVR_1 = 2\,{}_kVR^i{}_1 + {}_kI_1\,Z_0 \qquad \textbf{(15.i)} $$

$$ {}_kVR^r{}_1 = {}_kVR_1 - {}_kVR^i{}_1 \qquad \textbf{(16.i)} $$

Intante "k+1":

$$ {}_{k+1}VR^i{}_1 = {}_kVL^r{}_2 \qquad \textbf{(17.i)} $$

Inclusão de acoplamento com campo eletromagnético externo

Equacionamento TLM – terminação em múltiplas linhas

As equações não se alteram

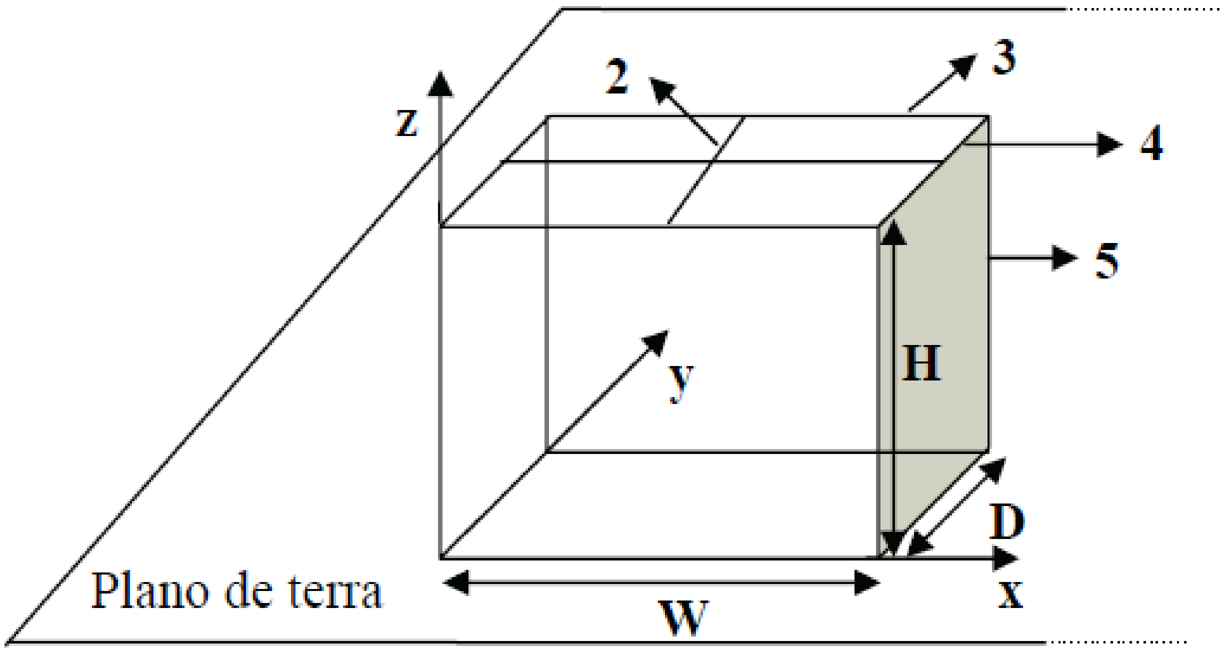
Exemplo: indução – técnica aplicada no estudo de caso desenvolvido por Zeddam – (F. Zago, Estudo de Tensões Induzidas por Descargas Atmosféricas. Dissertação de mestrado, Unicamp, 2004).

(Zeddam and Karwowski. "Transient Currents on LPS due to Indirect Lightning Effect". IEEE Proc. Sci. Meas. Technology. Vol 142, No.3, 1995).

Descarga atmosférica a 200 m de uma SPDA, e análise de corrente induzida em diferentes condutores da estrutura.

Trabalho realizou medições comparadas com simulações aplicando método dos momentos no domínio da frequência, e posteriormente FFT para resultados no domínio do tempo.

Exemplo: indução provocada pelo campo eletromagnético de uma descarga atmosférica a 200 m da estrutura.



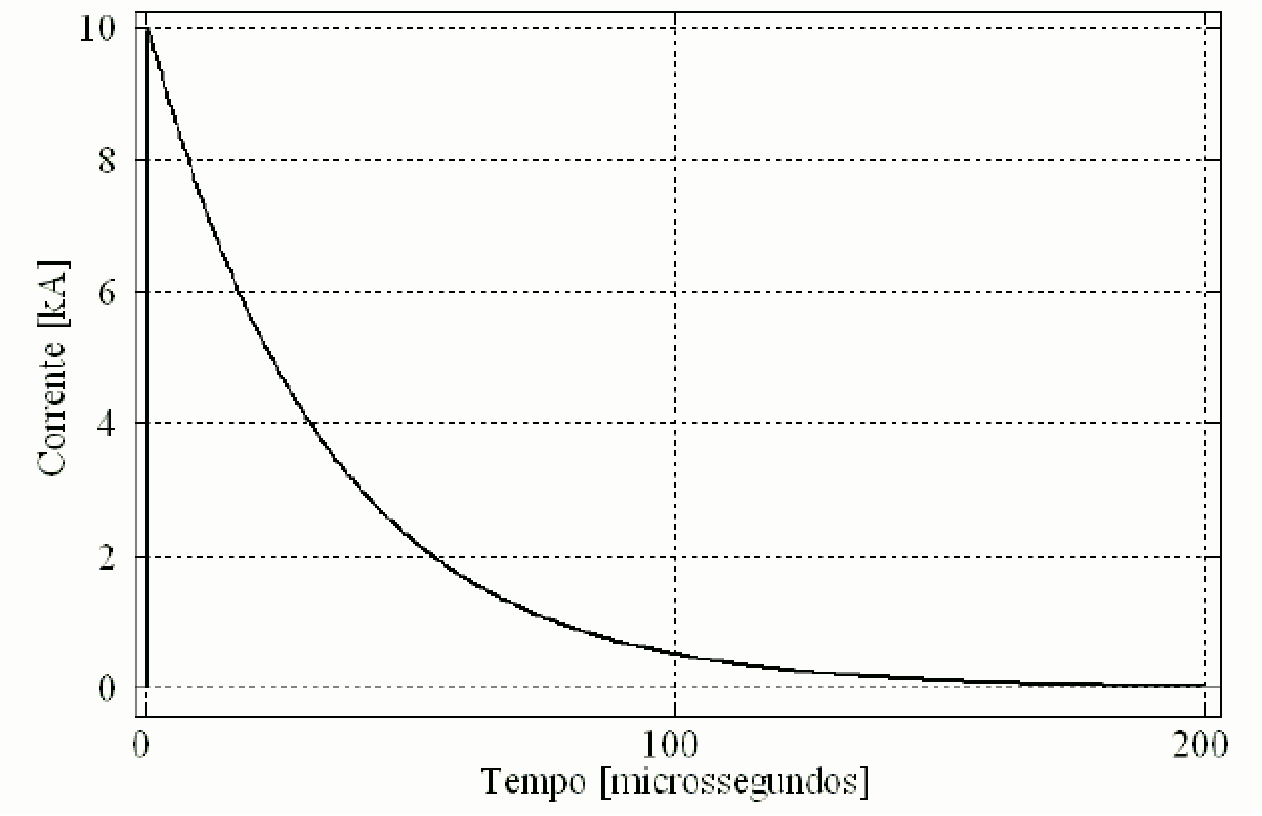
W = D = H = 24 m.

Descarga no ponto (0; 200; 0).

Canal da descarga de 7 km.

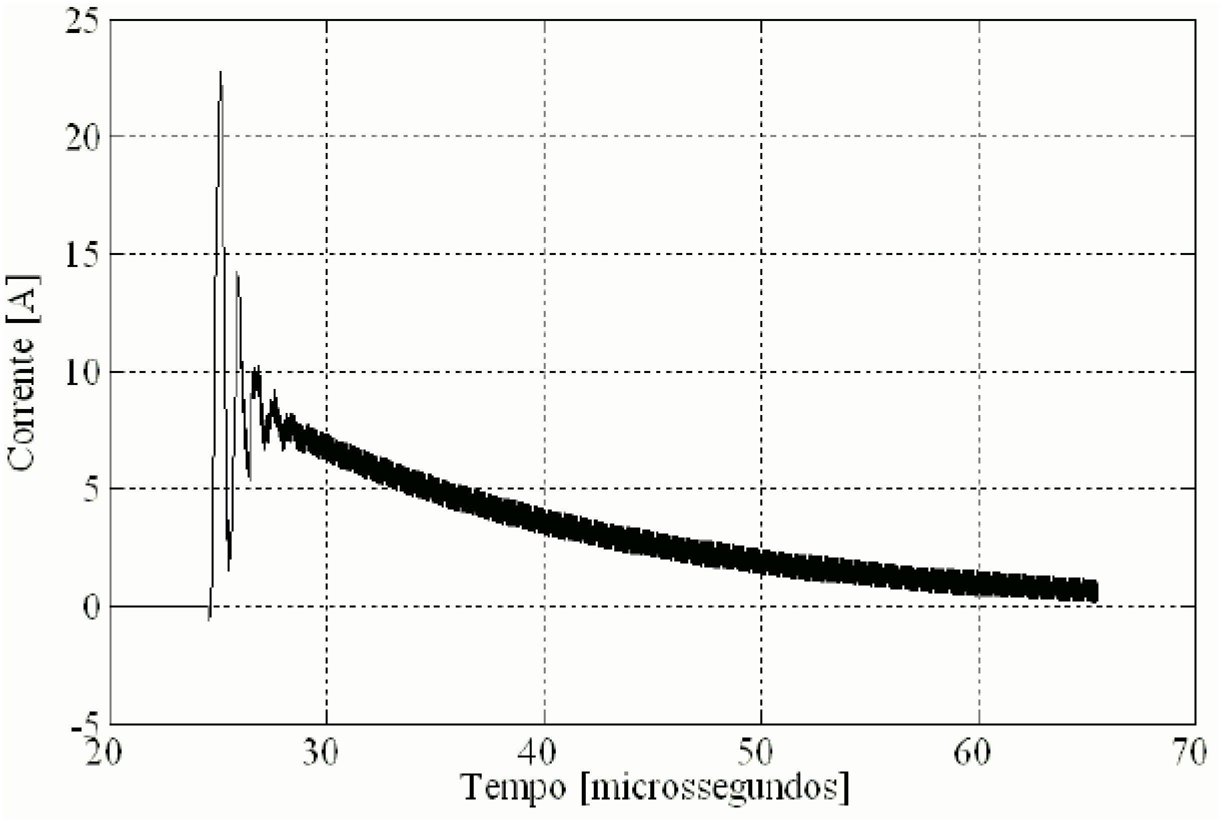
Ip = 10 kA (valor de pico da corrente da descarga.

Exemplo: indução provocada pelo campo eletromagnético de uma descarga atmosférica a 200 m da estrutura.



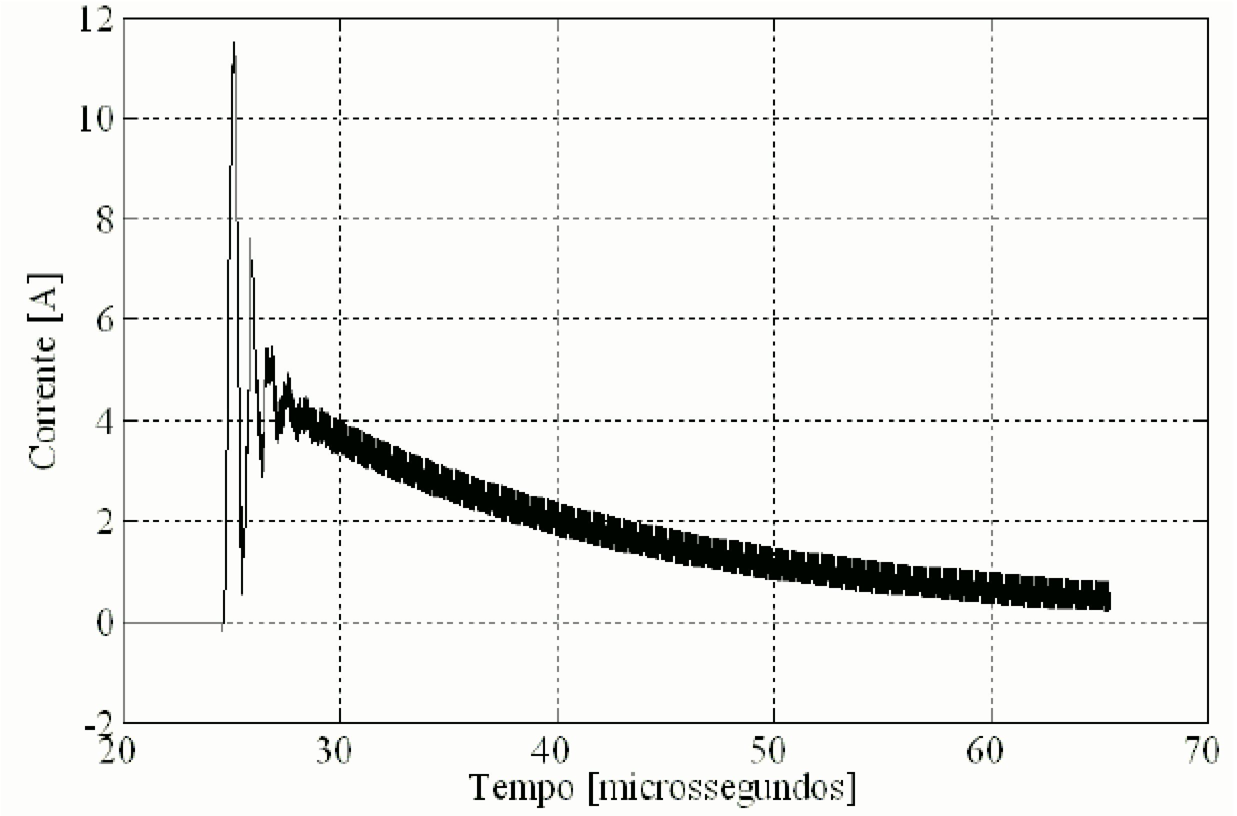
Corrente na base do canal

Exemplo: indução provocada pelo campo eletromagnético de uma descarga atmosférica a 200 m da estrutura.



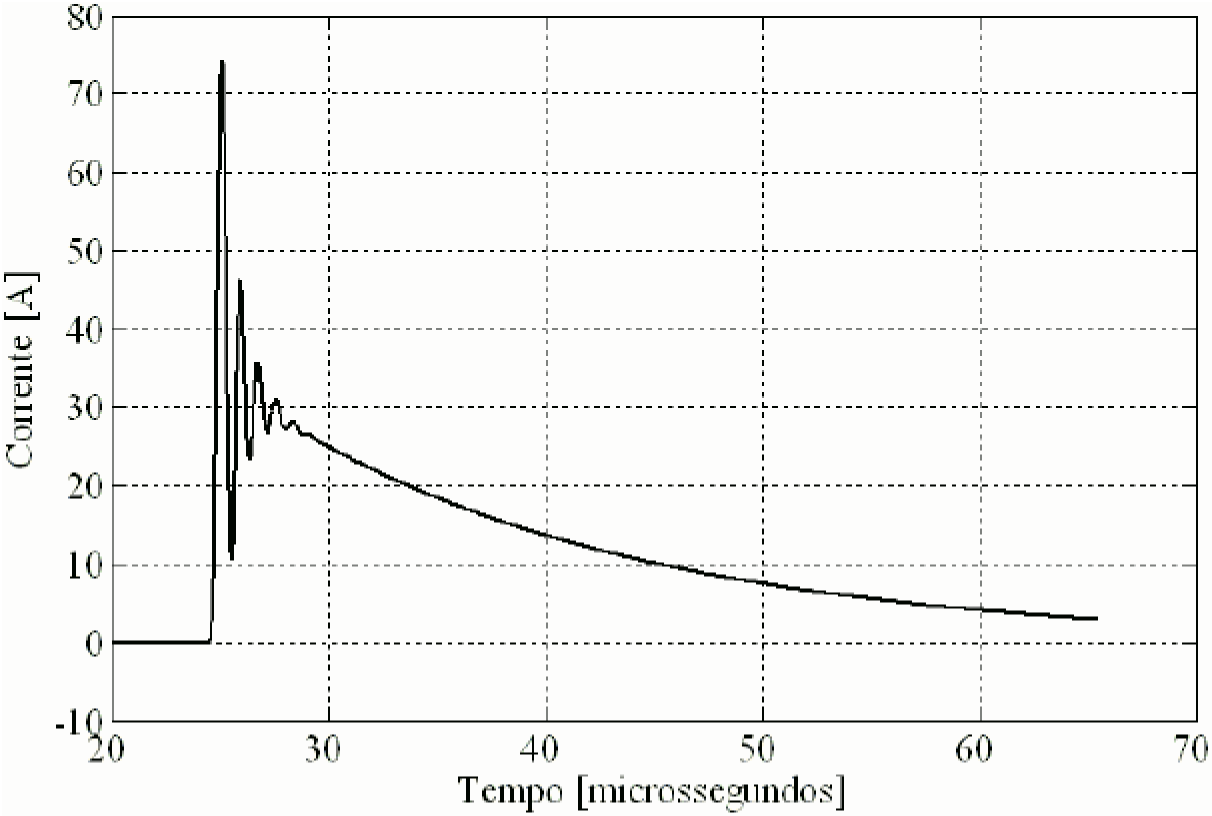
Corrente induzida no meio do condutor 2.

Exemplo: indução provocada pelo campo eletromagnético de uma descarga atmosférica a 200 m da estrutura.



Corrente induzida no meio do condutor 3.

Exemplo: indução provocada pelo campo eletromagnético de uma descarga atmosférica a 200 m da estrutura.



Corrente induzida no meio do condutor 5.

Exemplo: indução provocada pelo campo eletromagnético de uma descarga atmosférica a 200 m da estrutura.

Comparação de resultado dos valores de pico da corrente induzida na SPDA com o apresentado por Zeddam.

Condutor	Zeddam [45]	Simulação
	I_{pico} [A]	I_{pico} [A]
2	20	23
3	10	11
4	30	34
5	50	74