UNICAMP – Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
EA-619 Laboratório de Análise Linear

Experiência 1: Simulação de Sistemas Dinâmicos Lineares

10 de março de 2009

Sumário

1 Introdução

Uma das atividades mais importantes em Engenharia é a de projeto. Em particular, ao se projetar equipamentos eletrônicos, máquinas, processos químicos, etc., é fundamental para o engenheiro a noção de como o sistema se comportará depois de construído. No caso de dispositivos simples, muitas vezes a experiência do indivíduo é suficiente para as decisões que devem ser tomadas durante o projeto, decisões que irão influir no desempenho e na operação do equipamento. Entretanto, quando se trata de um sistema mais complexo ou cujo comportamento não seja simples, o profissional deve lançar mão de ferramentas que permitam antecipar os problemas e auxiliá-lo em suas decisões.

Essas ferramentas são colocadas à disposição dos projetistas através de conjuntos de programas em computadores digitais que, dependendo do seu grau de integração e de sofisticação na interface homem-máquina, podem constituir os chamados sistemas **CAD** — *Computer Aided Design*, dirigidos para áreas específicas das Engenharias. Assim, para projetos de dispositivos eletrônicos, por exemplo, existem diversos *pacotes* CAD que hoje fazem parte do dia-a-dia dos engenheiros eletrônicos. Para a maioria das áreas técnicas, existem programas com o objetivo de auxiliar o projetista, os quais, mesmo não se constituindo em sistemas CAD, possibilitam uma visão dos problemas antes da construção, propriamente dita, do equipamento.

Na área de sistemas dinâmicos e de projeto dos seus sub-sistemas de controle, não existe, atualmente, nenhuma ferramenta CAD completa. Entretanto, há uma boa quantidade de ferramentas isoladas que devem ser utilizadas pelo engenheiro. Uma delas, de grande importância para a determinação do comportamento temporal dos sistemas, é a **Simulação Analógica**.

A origem desse nome data de uma época em que os computadores digitais ainda não existiam, e deriva da possibilidade de observar-se o comportamento de um sistema dinâmico através de um outro sistema cujo comportamento é *análogo* ou similar ao do primeiro. O fundamento está em se construir algo que, nas condições controladas de um laboratório, seja capaz de reproduzir o funcionamento de uma *extensa família* de sistemas dinâmicos. A exigência *extensa família* é decorrente da diferenciação entre um simulador analógico, que deve ser para uso geral, e um modelo reduzido do sistema particular em estudo.

Os simuladores analógicos, mais antigos, portanto, que os computadores digitais, tiveram uma evolução interessante. No início, eram pequenos sistemas mecânicos que, devidamente interconectados, simulavam outros sistemas. Com a eletrônica, veio o surgimento de um dispositivo chamado *amplificador operacional*, cujas características básicas são as de possuir um ganho de tensão extremamente elevado e uma impedância de entrada também muito alta. Com o amplificador operacional, puderam ser construídos dispositivos análogos aos mecânicos até então utilizados, com a grande diferença do conforto de sua manipulação. As dimensões físicas eram muito inferiores; as conexões, com fios elétricos, eram flexíveis e facilmente alteráveis em cada situação. Enfim, o simulador analógico tornou-se uma ferramenta de uso fácil e confortável.

A miniaturização e a melhoria dos dispositivos eletrônicos, obtidas em graus crescentes pelo avanço tecnológico, trouxeram benefícios adicionais aos simuladores analógicos eletrônicos e, paradoxalmente, quase provocaram sua extinção.

Esta quase extinção deveu-se ao inexorável avanço da computação digital, que possibilitou o uso dessas ferramentas de simulação, não mais contruídas com elementos eletrônicos mas sim por programas que, numericamente, reproduziam os seus comportamentos. Um computador digital, que possui um espectro de aplicações muito mais amplo do que um simulador analógico eletrônico, é muito mais barato e também é capaz de realizar as funções de um computador analógico. Um engenheiro que tenha acesso a um simples PC poderá utilizar a ferramenta a um custo muito inferior quando comparado ao eletrônico, e terá à sua disposição, no mesmo ambiente, um grande número de outros aplicativos.

A simulação de um sistema é a reprodução mais fiel possível de seu comportamento através de um outro sistema. A palavra *sistema* tem uma abrangência muito grande, e por isso deve-se delimitar a classe de sistemas que serão objeto de estudo. Nesta disciplina, é uma certa classe de sistemas dinâmicos que será analisada. Um *sistema dinâmico* neste contexto é representado matematicamente por uma ou mais equações diferenciais ou a diferenças, nas quais, uma das variáveis independentes em geral é o *tempo*.

Nas primeiras atividades deste Laboratório serão analisados sistemas dinâmicos em que a única variável independente é o tempo e, além disso, este é considerado como sendo uma variável contínua. Sistemas dinâmicos que obedecem a esta restrição podem ser modelados por *equações diferenciais ordinárias*, e representam um grande número de entidades do mundo real.

2 Modelagem de Sistemas Lineares

Seja o circuito elétrico abaixo:

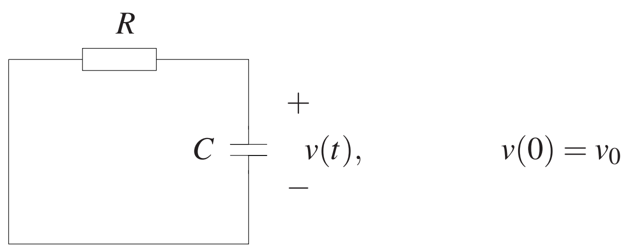

Figura 1: Circuito *RC* autônomo.

Note que trata-se de um circuito *RC* autônomo (sem entrada externa), cuja variável de interesse é a tensão $v(t)$ no capacitor. O circuito terá o seu comportamento analisado a partir do instante $t = 0$, quando a tensão vale $v(0) = v_0$ (condição inicial).

A primeira coisa a fazer é escrever o modelo matemático que representa o sistema. Neste caso, a partir das leis da física, obtém-se

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{-1}{RC}v(t), \qquad v(0) = v_0 \tag{1}$$

Esta equação diferencial ordinária tem uma única variável a determinar $v(t)$, que é a variável de interesse no problema. Em outras palavras, deseja-se saber como a tensão no capacitor varia a partir do instante $t = 0$.

Do estudo de soluções de equações diferenciais, sabe-se que $v(t)$ pode ser escrita como

$$v(t) = v_0 + \int_0^t \frac{d}{dt}v(\tau)d\tau \;=\; v_0 + \int_0^t \frac{-1}{RC}v(\tau)d\tau \tag{2}$$

ou

$$v(t) = v_0 + \left[\left(\frac{-1}{RC}\right)\right]\int_0^t v(\tau)d\tau \tag{3}$$

A variável $v(t)$ também poderia ser explicitada na forma exponencial, mas o objetivo aqui é construir, com os blocos definidos anteriormente, um sistema cujo funcionamento seja análogo ao do circuito em estudo, com respeito ao valor numérico das variáveis.

Observando-se mais atentamente a equação (3), é possível verificar que $v(t)$ pode ser obtida a partir da integral da *própria* variável $v(t)$ multiplicada por uma constante negativa, mais uma outra constante.

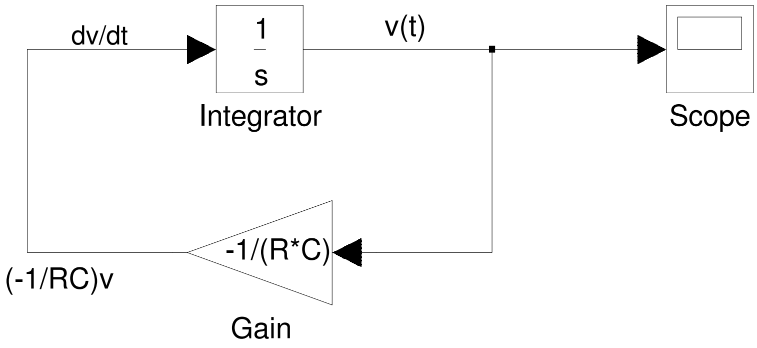

Figura 2: Circuito RC Autônomo - Diagrama de Simulação.

Note que a equação (3), que descreve a saída $v(t)$ do bloco integrador, tem como entrada a variável $\dot{v}(t)$ e como constante de integração o valor v_0.

Este procedimento indica que o diagrama da Fig.2 irá produzir em sua saída uma variável que é exatamente igual à tensão no capacitor $v(t)$. Assim este diagrama pode reproduzir o comportamento de um circuito RC.

3 Procedimento para Simulação de Sistemas

Na seção anterior, comprovou-se que um sistema montado com os blocos básicos pré-definidos funciona da mesma forma que um circuito RC autônomo. Nesta seção, será desenvolvido o método geral de construção de um simulador analógico de um sistema dinâmico, partindo-se da equação diferencial que descreve matematicamente o seu comportamento.

Note, ainda em relação ao circuito RC anterior (equação (1)), que se a saída do integrador é $v(t)$, o sinal na entrada é a *derivada* de $v(t)$, vide Fig. 2.

Observe que a saída do bloco ganho é também a entrada do integrador, e que portanto (como não poderia deixar de ser) igualando-se os termos $\frac{dv}{dt}$ e $-\frac{1}{RC}$ no diagrama da Fig. 2 obtém-se a equação diferencial original (1).

Esta visão do diagrama é a essência do método de construção de simuladores analógicos. Coloca-se na entrada do integrador os termos do lado direito da equação diferencial, que tem de seu lado esquerdo a derivada de maior ordem presente na equação.

Em equações mais complicadas, o lado direito será uma soma de termos, e nestes casos usa-se antes do integrador um bloco somador, que fornecerá em sua saída a soma desejada[1].

Considere agora um circuito de segunda ordem, como o circuito RLC autônomo da Fig. 3.

[1]Este método de obtenção do simulador analógico para um sistema modelado por equação diferencial foi inventado por Sir William Thomson (que depois se tornou Lord Kelvin) em 1876.

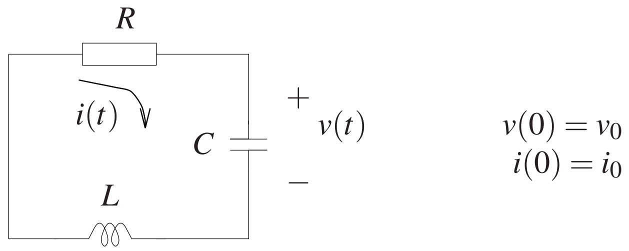

Figura 3: Circuito *RLC* autônomo.

O modelo matemático do circuito, explicitando a variável $i(t)$ e suas derivadas, é a equação diferencial

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right)\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0 \tag{4}$$

com as condições iniciais

$$\begin{cases} i(0) = i_0 \\ \left.\dfrac{di}{dt}\right|_{t=0} \triangleq Di_0 = -\dfrac{R}{L}i_0 - \dfrac{1}{L}v_0 \end{cases} \tag{5}$$

Reescrevendo, de maneira a isolar do lado esquerdo o termo com a derivada de maior ordem,

$$\frac{d^2i}{dt^2} = -\left(\frac{R}{L}\right)\frac{di}{dt} - \frac{1}{LC}i \tag{6}$$

e a partir de (6) pode-se construir o simulador analógico correspondente, usando o mesmo procedimento do caso anterior, ou seja, produzindo através de somas e multiplicações por constantes o lado direito da equação e colocando o resultado na entrada de um integrador. Este integrador gera em sua saída a variável di/dt que, por sua vez, servirá como entrada para um segundo integrador que produzirá $i(t)$ em sua saída. O diagrama na Fig. 4 mostra o simulador obtido.

Para concluir a apresentação do método, falta discutir a questão das *condições iniciais*. Em equações diferenciais, o nome genérico *condições de contorno* é dado para os valores numéricos que são impostos às variáveis participantes. Esta imposição pode ser feita em um número de variáveis igual à ordem da equação diferencial e, além disso, são arbitrários os valores da variável independente nos quais estas condições são escolhidas. Em sistemas físicos, normalmente (mas não obrigatoriamente) escolhe-se o instante $t = 0$ para a imposição de valores arbitrários às variáveis da equação, que são as *condições iniciais*.

A atribuição destas condições está relacionada com o nível de energia que o sistema possui no instante inicial, e determina completamente as trajetórias que as variáveis descrevem ao longo do tempo. Como regra básica para os simuladores analógicos, *somente*

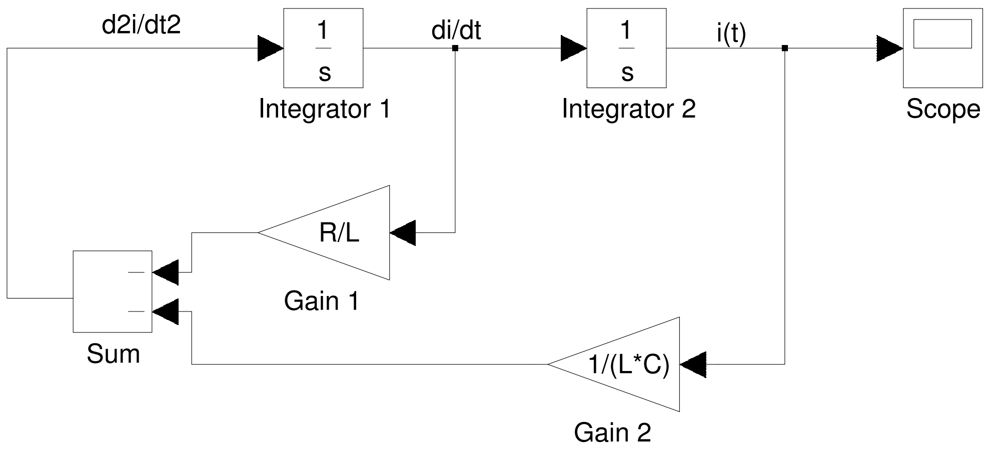

Figura 4: Decomposição dos Sinais do Diagrama de Simulação.

os integradores possuem condições iniciais, pois apenas eles representarão os elementos do sistema físico capazes de armazenar energia.

No primeiro exemplo — circuito RC — o sistema possui apenas um elemento armazenador de energia, resultando numa equação diferencial de primeira ordem, e o simulador analógico contém somente um integrador. Isto faz com que tenhamos o direito de arbitrarmos apenas uma condição inicial, no caso, a tensão no capacitor. No segundo exemplo — circuito RLC, há dois armazenadores de energia, e portanto duas condições iniciais, a tensão no capacitor e a corrente no circuito. Neste caso, como a equação diferencial de segunda ordem foi obtida em termos da corrente $i(t)$, foi necessário calcular o valor numérico de Di_0 (valor inicial da derivada de $i(t)$) em função dos valores conhecidos i_0 e v_0.

4 Elementos Básicos do SIMULINK

Um simulador analógico é constituído por vários elementos (blocos) processadores distintos, cada um desempenhando uma dentre um conjunto de funções características. Para realizar uma simulação, juntam-se diversos blocos de cada uma das funções, interligado-os segundo as necessidades do problema a ser analisado.

Neste laboratório iremos utilizar o software SIMULINK como ambiente para a realização de simulação de sistemas. Faremos uma introdução suscinta ao SIMULINK, envolvendo apenas os elementos básicos (funções características) do simulador. Com estes elementos é possível realizar a simulação de *sistemas dinâmicos lineares* cujas variáveis sejam definidas a *tempo contínuo*.

A. Janela Inicial O SIMULINK é ativado na linha de comandos do MATLAB ou por um ícone na janela MATLAB. Apresenta-se a janela da Fig. 5, contendo os ícones que dão acesso a classes distintas de elementos de simulação[2]

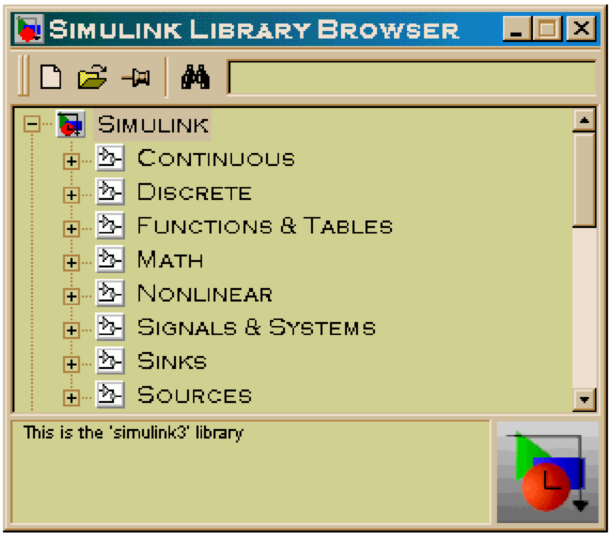

Figura 5: Janela Inicial do Simulink

B. Janela dos Elementos Lineares de Simulação A partir da Janela Inicial, acionando-se o ícone "Continuous", apresenta-se a janela da Fig. 6, contendo todos os elementos lineares de simulação

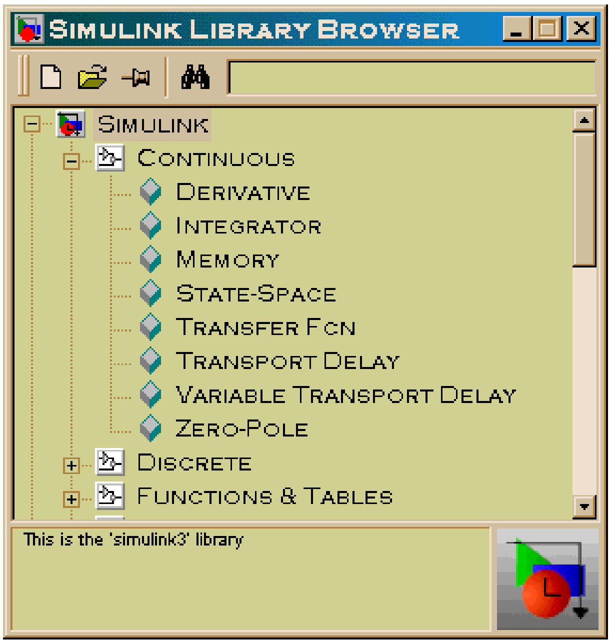

Figura 6: Janela com os blocos dinâmicos à tempo contínuo

[2]Simulink Version 3.0 (R11) 01-Sep-1998.

C. Elementos básicos para a simulação analógica São eles:

1. Somador
2. Ganho
3. Integrador

Somador (em `simulink/math/sum`)

Representado pelo símbolo abaixo:

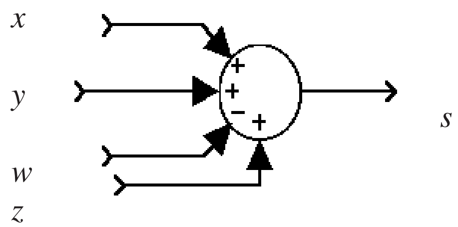

Figura 7: O elemento somador.

Tem-se que

$$s(t) = x(t) + y(t) - w(t) + z(t)$$

e sua função é a de produzir, continuamente no tempo, a soma das entradas. O número de entradas de um somador e os sinais $\pm$ associados a cada entrada são definidos através do menu de parâmetros.

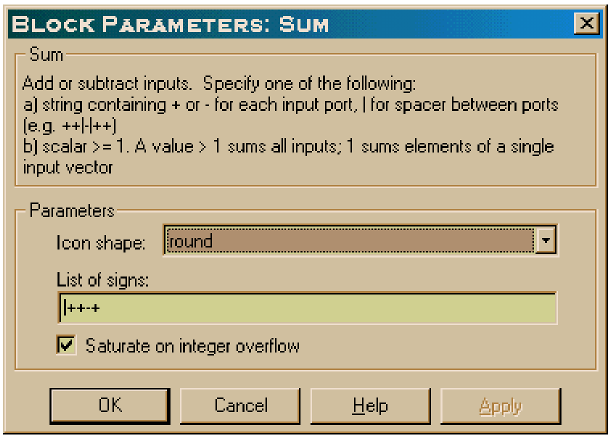

Figura 8: Menu de parâmetros do somador. Se $+$ a entrada é somada, se $-$ ela é subtraída.

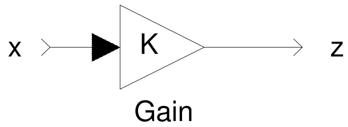

Figura 9: O elemento ganho.

Ganho (em `simulink/math/gain`)

Tem-se

$$z(t) = Kx(t)$$

Representado pelo símbolo abaixo:

e sua função é a de produzir, continuamente no tempo, a multiplicação de uma constante pela entrada. O valor do ganho é definido através do menu de parâmetros

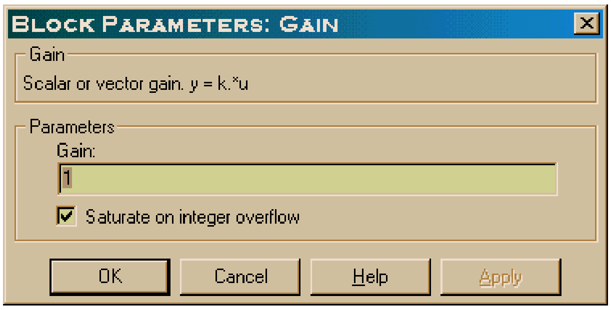

Figura 10: O menu de parâmetros do ganho.

O valor do ganho pode ser um valor numérico definido diretamente no menu, ou um valor simbólico. Neste caso, o valor numérico associado ao símbolo deve ser previamente definido na janela de linhas de comando do MATLAB. Por exemplo, se o ganho representa uma resistência denominada R_1 que queremos variar, podemos adotar no menu de parâmetros do ganho o valor $R1$, e antes da execução é preciso definir na janela de comandos o seu valor, na forma

■ `R1 = 42.5`

caso o valor desejado da resistência R_1 seja 42,5 Ω.

Integrador (em `simulink/continuous/integrator`)

Representado pelo símbolo abaixo:

Tem-se que

$$z(t) = x_0 + \int_0^t x(\tau)d\tau \tag{7}$$

e sua função é a de produzir, continuamente no tempo, a integral da entrada. O valor da condição inicial (numérica ou simbólica) é definida no menu da Fig. 12. Limites de saturação para o integrador também podem ser introduzidos.

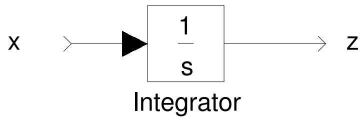

Figura 11: O integrador.

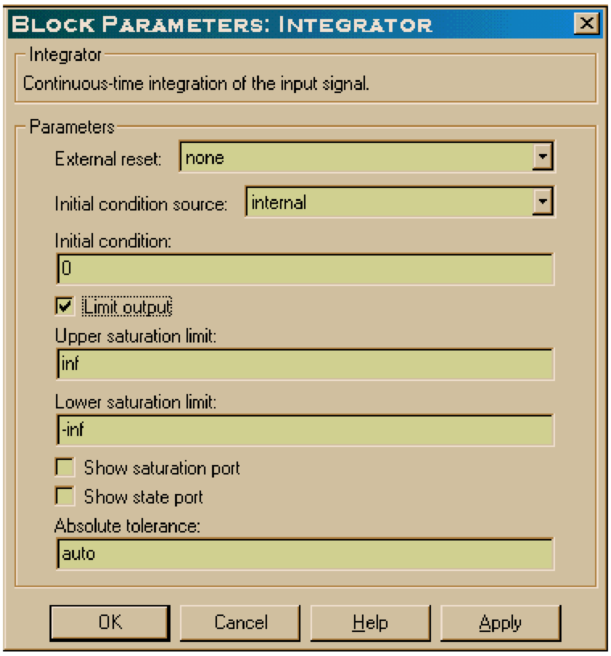

Figura 12: O menu de parâmetros do integrador.

D. Intervalo de Tempo e Parâmetros de Integração da Simulação

Os parâmetros de simulação são escolhidos através do menu: Simulation/Parameters acessível da janela de simulação, mostrada na Fig. 13.

Nesse menu deve ajustar-se o intervalo de tempo de duração da simulação que se deseja visualizar marcando-se o *tempo inicial* e o *tempo final*. É possível também escolher o método de integração que será implementado em todos os integradores, e ajustar os parâmetros da rotina para se atingir a precisão desejada. Diminuindo-se as tolerâncias, o resultado se torna mais preciso, em contrapartida, a simulação fica mais lenta.

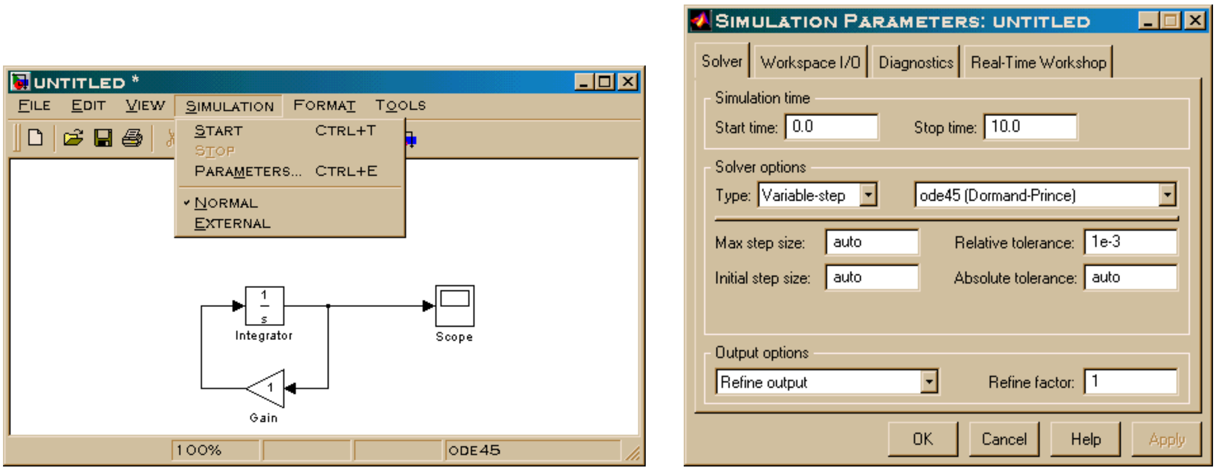

Figura 13: O menu de parâmetros de simulação.

Referências

[1] José C. Geromel, Álvaro G. B. Palhares, *Análise Linear de Sistemas Dinâmicos: Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*, Ed. Edgar Blücher, 2004.

[2] A. Hausner, *Analog and Analog / Hybrid Computer Programming*, Prentice-Hall, New Jersey, 1971.

[3] A. S. Jackson, *Analog Computation*, McGraw-Hill, New York, 1960.

[4] Manuais de MATLAB e SIMULINK (on line no MATLAB: helpwin ou helpdesk).

Roteiro

O pacote computacional SIMULINK para simulação de sistemas disponível na FEEC-UNICAMP deve ser utilizado nesta parte para resolver numericamente equações diferenciais ordinárias. A partir da construção de um Diagrama de Simulação Analógica correspondente, pode-se facilmente definir um diagrama de simulação SIMULINK que permitirá a simulação digital do sistema em questão.

1. Obtenha um gráfico com a resposta do sistema $\dot{x} - ax = u(t)$; $x(0) = 0$, $u(t) = 1$ nos seguintes casos: a) $a = 2$ e b) $a = -2$. Qual o valor de regime teórico no caso b) ? Compare com o resultado obtido.

2. Repita a simulação anterior para $a = -2$ e $u(t) = t$. Qual o valor de regime obtido ? Existe erro entre o valor de regime e o valor da entrada (*erro de regime*) ? Compare com o resultado teórico.

3. Escolha um sistema, I ou II, descritos nos itens abaixo para realizar a simulação.

   I. Considere o sistema massa/mola/atrito-viscoso que pode ser configurado no Sistema Retilíneo ECP.

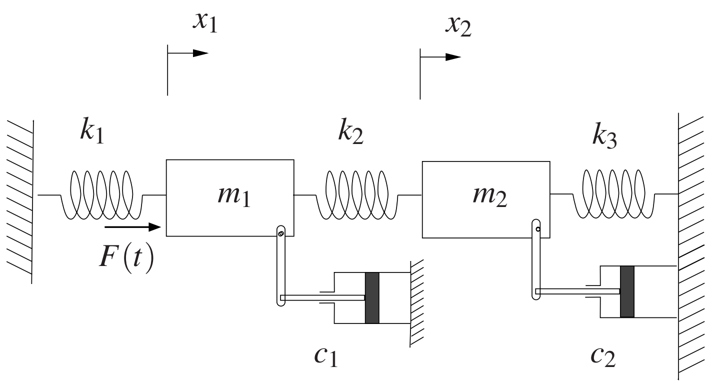

Figura 14: Sistema Retílineo com 2 massas 3 molas e 2 amortecedores.

As equações diferenciais que regem o comportamento do sistema são:

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = F(t) \quad (8)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_3x_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \quad (9)$$

A partir do conjunto de equações (8)-(9), determine o Diagrama de Simulação Analógica do sistema massa/mola/atrito-viscoso, explicitando como saídas as posições x_1 e x_2 das massas m_1 e m_2, respectivamente.

Considere uma entrada impulsiva $F(t) = \delta(t)$.

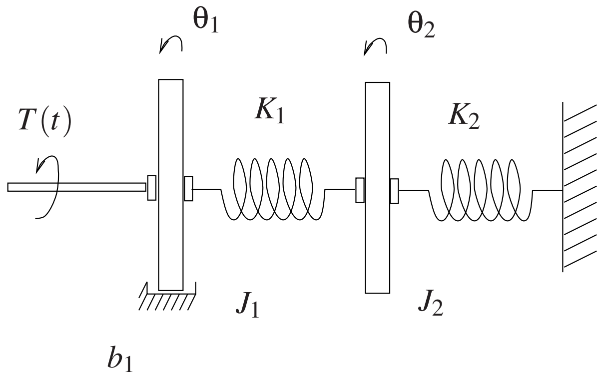

Figura 15: Sistema torcional com 2 discos de inércia, 2 molas de torção com amortecimento.

II. Considere o sistema inércia/mola/atrito-viscoso que pode ser configurado no Sistema Torcional ECP.

As equações diferenciais que regem o comportamento do sistema são:

$$J_1\ddot{\theta}_1 + b_1\dot{\theta}_1 + K_1(\theta_1 - \theta_2) = T(t) \tag{10}$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 + K_2\theta_2 + K_1(\theta_2 - \theta_1) = 0 \tag{11}$$

A partir do conjunto de equações (10)-(11), determine o Diagrama de Simulação Analógica do sistema disco/mola-de-torsão/atrito-viscoso, explicitando como saídas as posições angulares θ_1 e θ_2 dos discos de inécia J_1 e J_2, respectivamente.

Considere uma entrada impulsiva $T(t) = \delta(t)$.

4. Utilizando a idéia de simulação analógica, explique o que seria necessário para transformar o sistema retilíneo num "simulador por analogia"do sistema torcional.

5. Utilizando o SIMULINK implemente o Diagrama de Simulação Analógica do sistema escolhido no item A-1. Considere condições iniciais nulas e utilize os dados numéricos (unidades MKS):

$$m_1 = 0,7 \text{ kg}; \; m_2 = 0,5 \text{ kg}; \; k_1 = k_3 = 380 \text{ N/m}; \; k_2 = 200 \text{ N/m}; \; c_1 = c_2 = 1,5 \text{ N-s/m} \tag{12}$$

$$J_1 = 0,003 \text{ kg-m}^2; \quad J_2 = 0,002 \text{ kg-m}^2; \quad K_1 = K_2 = 1,5 \text{ N-rad}; \quad b_1 = 0,01 \text{ N-m/rad} \tag{13}$$

6. Obtenha, na forma de gráficos, as respostas temporais das variáveis x_1, $\dot{x}_1$, x_2 e $\dot{x}_2$, ou, θ_1, $\dot{\theta}_1$, θ_2 e $\dot{\theta}_2$, conforme escolhido. Obtenha, na forma de gráficos as respostas no plano de fase das variáveis $x_1 \times x_2$ e $\dot{x}_1 \times \dot{x}_2$, ou, $\theta_1 \times \theta_2$ e $\dot{\theta}_1 \times \dot{\theta}_2$ (utilize `simulink/sinks/xygraph`).

IMPORTANTE:

1. Gere a entrada impulsiva de forma aproximada, considerando um pulso de área unitária e de duração muito curta. Porque não se deve usar a derivada do sinal degrau? (Lembre-se que o SIMULINK é um simulador analógico mas é executado em computador digital através de rotinas numéricas)

2. Verifique visualmente se o passo escolhido pela rotina de integração do SIMULINK é apropriado. Caso não seja suficientemente pequeno, as curvas das respostas não serão suaves mas cheias de quebras e "pontas".