Introdução:

Neste terceiro módulo, além de continuar a análise de circuitos, agora utilizando um indutor, tem-se como objetivo analisar os efeitos de troca de energia entre os dois elementos capazes de armazenar energia em um circuito: um capacitor (armazena energia em campo elétrico) e um indutor (armazena energia em campo magnético).

Vimos no Módulo II o atraso (também chamado de defasagem) observado entre tensão e corrente no circuito *RC*. Veremos, na sequência, o atraso em circuito *RL*. Verificaremos aqui que o atraso entre tensão e corrente no circuito *RL* é oposto ao do circuito *RC*.

Veremos também que o indutor e o capacitor são capazes de trocar energia entre si quando estimulados pela mesma corrente (associação série) ou pela mesma tensão (associação paralela). De fato, sob condições particulares, **essa troca de energia pode dar origem a oscilações pouco amortecidas, que definem a frequência de ressonância do circuito**, em torno da qual se pode implementar osciladores auto-sustentados de uso prático.

Proposição III.1
BIPOLOS ARMAZENADORES DE ENERGIA: INDUTOR,
RESPOSTA AO DEGRAU, CONSTANTE DE TEMPO, DEFASAGEM

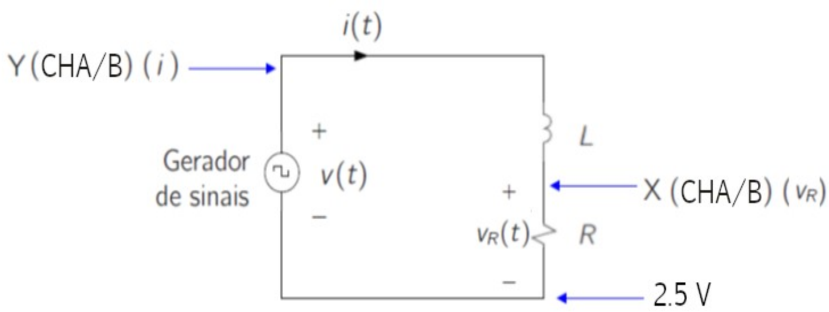
Objetivo: Observar o comportamento do indutor em circuitos com excitação em degrau e senoidal. Relacionar constante de tempo e defasagem.

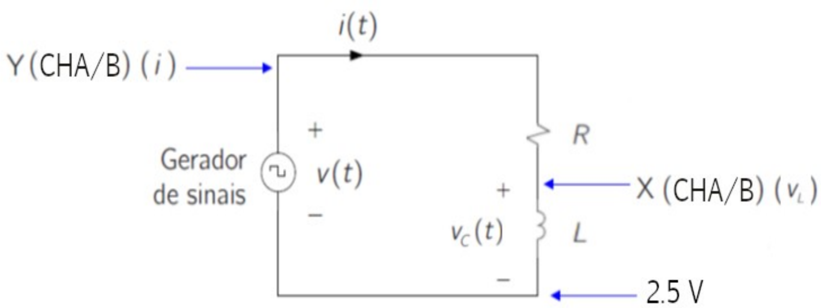
Revisão da Teoria:

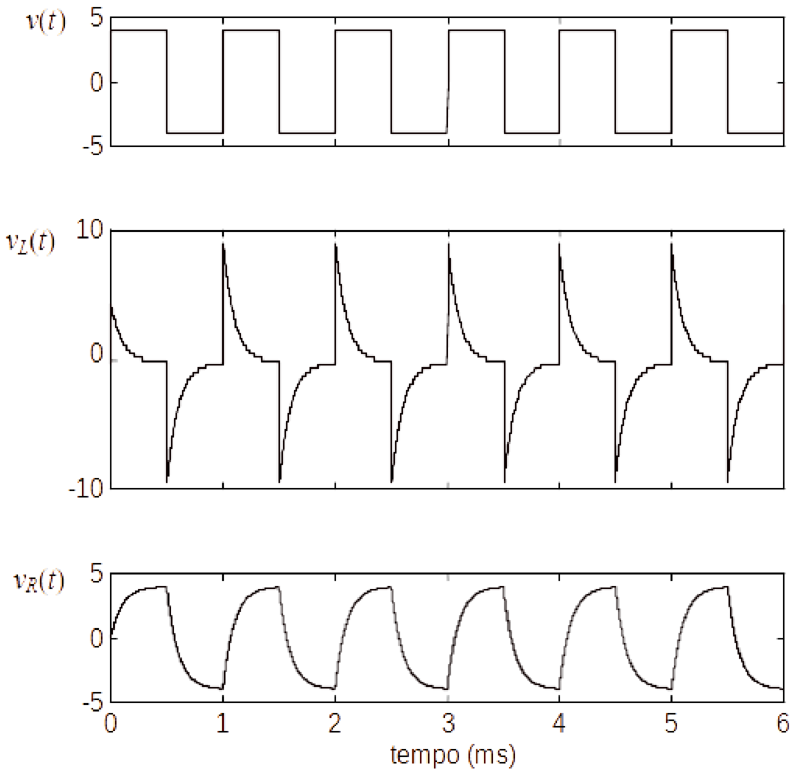
Nos elementos armazenadores de energia como o indutor e o capacitor, a característica [*v*-*i*] deve levar em conta o atraso da resposta em relação ao sinal de excitação. Para observar este atraso e a sua relação com as características do bipolo, vamos utilizar uma onda de tensão de excitação inicialmente quadrada e depois senoidal. O bipolo capacitor foi estudado no módulo anterior (Módulo II - parte 2).

INDUTOR LINEAR

a) RESPOSTA TRANSITÓRIA - ALIMENTAÇÃO DEGRAU







Sabemos que $v = Ri + L(di/dt)$, cuja solução para uma entrada constante V_0 de tensão é dada por:

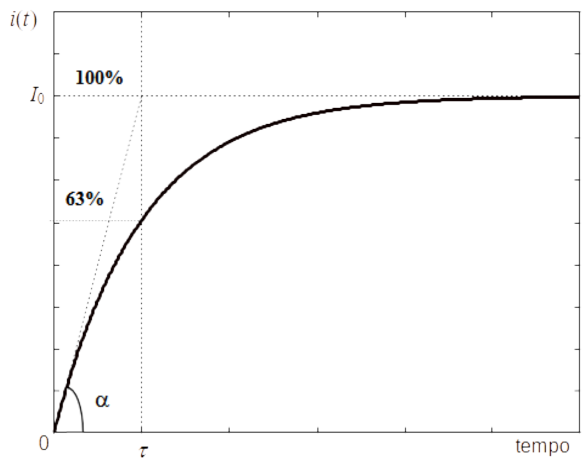
$$i(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) + i_0\left(e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

onde i_0 = *i* (t = 0) dá a condição inicial da corrente e τ = *L/R* é a constante de tempo do circuito *RL*.

Se i_0 = 0 vemos que V_0/R corresponde ao valor final $(t \to \infty)$ da corrente no circuito. Para i_0 = 0, resulta ainda:

$$i(\tau) = \frac{V_0}{R}\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0{,}632\ \frac{V_0}{R}$$

ou seja, τ é o tempo que o circuito leva para atingir aproximadamente 63% do valor final de corrente. Isto permite, de uma maneira simples, medir a constante de tempo do circuito, conforme mostra a figura a seguir.



Outra maneira de se obter τ é derivar a função na origem:

$$\frac{\mathbf{di}}{\mathbf{dt}}\Big|_{t=0} = \frac{V_0}{R}\frac{\mathbf{R}}{L} = \frac{\frac{V_0}{R}}{\tau} = \text{tg}\ \alpha$$

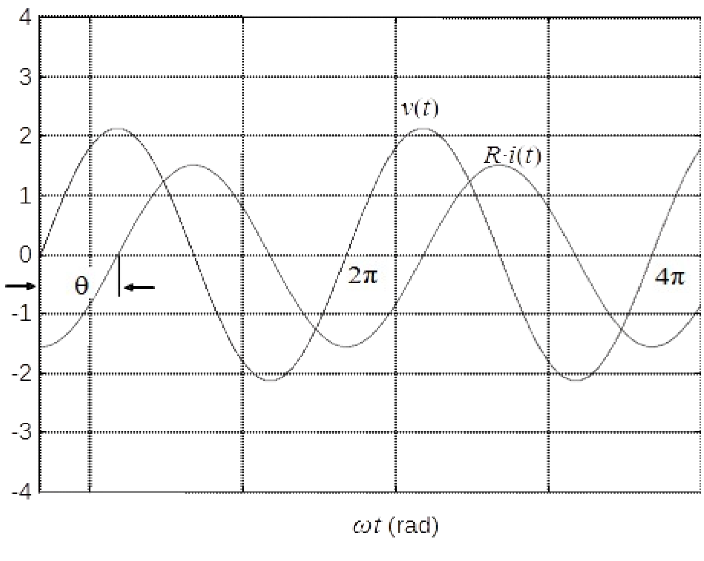
Constata-se que a taxa de variação inicial depende inversamente de τ e o cruzamento da derivada inicial com o nível do valor final ocorre em $t = \tau$.

b) RESPOSTA SUSTENTADA - ALIMENTAÇÃO SENOIDAL

Quando o circuito é alimentado por excitação senoidal, a defasagem entre o sinal de tensão e o de corrente é dada pelo ângulo da impedância do circuito em regime permanente (solução fasorial).

Seja *f* a frequência da excitação senoidal. Então $\omega = 2\pi f$ é a *frequência angular*. Teremos as ondas de tensão e corrente dadas por: $v(t) = Vp\cos(\omega t)$ Volts e $i(t) = I\ p\cos(\omega t - \theta)$ A, onde:

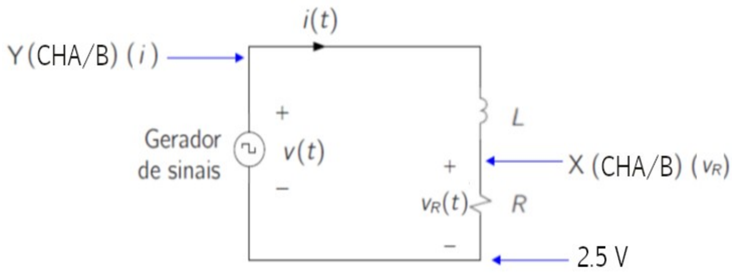
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{X_L}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

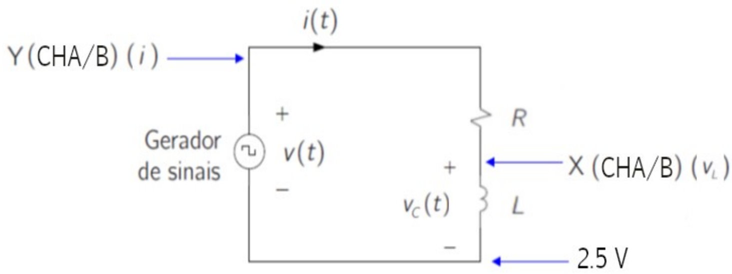


Ensaios e Questões:

(i) Calcule o valor de τ para o circuito RL série em que $\boldsymbol{L}$ **= 1 mH** e $\boldsymbol{R}$ **= 50Ω**.

(ii) ► Monte os circuitos abaixo. Usando excitação em **onda quadrada**, com $\boldsymbol{V_{pp}}$ **= 2 V** e $\boldsymbol{f}$ **= 1 kHz**, observe na tela do software ALICE as formas de onda de $v_R(t)$, $v_L(t)$ e ($v_R + v_L$). Para o resistor de 50**Ω** é possível utilizar uma associação em paralelo dos dois resistores de 100**Ω**. Caso o formato da onda esteja muito difícil de ser visto, tente subir a frequência para 10 kHz.





(iii) Dê uma interpretação física às curvas observadas. Tanto no começo quanto no fim do transitório, o indutor se comporta como o quê? Com base nessa observação, qual o valor da corrente no começo e no fim do transitório?

(iv) ► **Desenhe** a forma de onda da corrente.

(v) ► Considere agora um **sinal SENOIDAL de 1 kHz**. Ajuste o software para medir e mostrar a tensão da fonte e a corrente pelo circuito.

(vi) ► Usando os cursores do ALICE, meça experimentalmente a defasagem entre $v\,(t)$ e $i\,(t)$ observada e compare com a calculada analiticamente. **Desenhe** a figura, incluindo a medida de defasagem.

(vii) ► Varie a frequência de **1 kHz** a **10 kHz** e observe a variação da amplitude e da defasagem da corrente. Como se comporta o indutor para baixas e altas frequências?

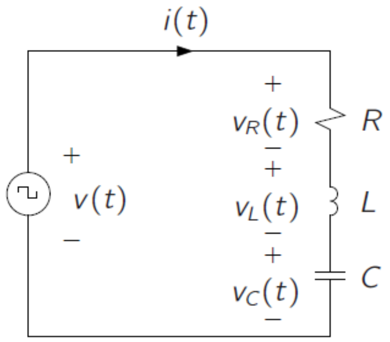
(viii) Observe que a variação da frequência influencia diferentemente os circuitos indutivo e capacitivo (verificado no experimento anterior – ver aula do Módulo II, parte 6). Comente esta diferença.

Proposição III.2
CIRCUITO RLC SÉRIE,
FREQUÊNCIA NATURAL DE OSCILAÇÃO, AMORTECIMENTO

Objetivo: Verificar a frequência natural e o amortecimento das oscilações.

Revisão da Teoria:

CIRCUITO *RLC* SÉRIE



Neste circuito:

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_{\boldsymbol{R}}+v_L+v_C \qquad v_R=\mathbf{R}\cdot i$$

$$v_L=L\cdot\frac{\mathbf{di}}{\mathbf{dt}} \qquad \mathbf{i}=\mathbf{C}\cdot\frac{\mathbf{dv}_C}{\mathbf{dt}}$$

Portanto: $\mathbf{v}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{i}+L\cdot\frac{di}{dt}+v_C$

Obtém-se o comportamento transitório do circuito fazendo v=0. Neste caso, a equação diferencial pode ser expressa por:

$$0=\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathbf{di}}{\mathbf{dt}}+\frac{1}{\mathbf{LC}}\,\mathbf{i} \tag{1}$$

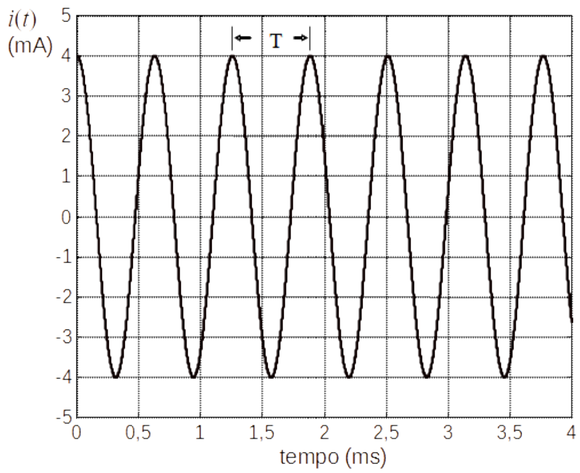
cuja forma geral (ou canônica) é dada por:

$$\frac{d^2i}{dt^2}+2\alpha\frac{di}{dt}+\omega_0^2\,i=0$$

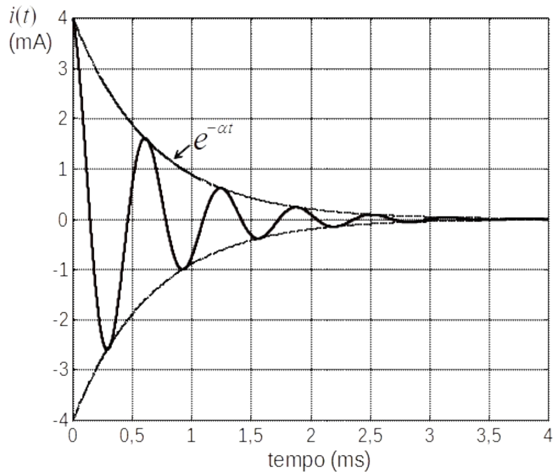
onde: $\alpha=\frac{R}{2L}$ é o amortecimento do sinal $i(t)$, medido em s^{-1},

$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$ é a frequência natural sem amortecimento, medida em rad/s,

$T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ é o período da oscilação, medido em s.



Sem amortecimento



Com amortecimento

A influência dos parâmetros dos bipolos sobre o amortecimento e a frequência de oscilação pode ser analisada mais facilmente considerando que $i(t)$ é do tipo exponencial: $i(t) \sim k \cdot e^{\lambda t}$. Com essa hipótese podemos reduzir (1) à seguinte equação característica:

$$\lambda^2 + 2\alpha\,\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{2}$$

cujas raízes são os pólos, ou autovalores, dados por:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Estas raízes podem ser reais, imaginárias ou complexas, dependendo dos valores de α e ω_0, resultando um dos seguintes casos:

(a) $\alpha < \omega_0 \rightarrow$ caso subamortecido (raízes imaginárias);
(b) $\alpha = \omega_0 \rightarrow$ caso limite ou crítico (raízes iguais);
(c) $\alpha > \omega_0 \rightarrow$ caso superamortecido (raízes reais).

A solução da equação homogênea, neste caso, assume a forma:

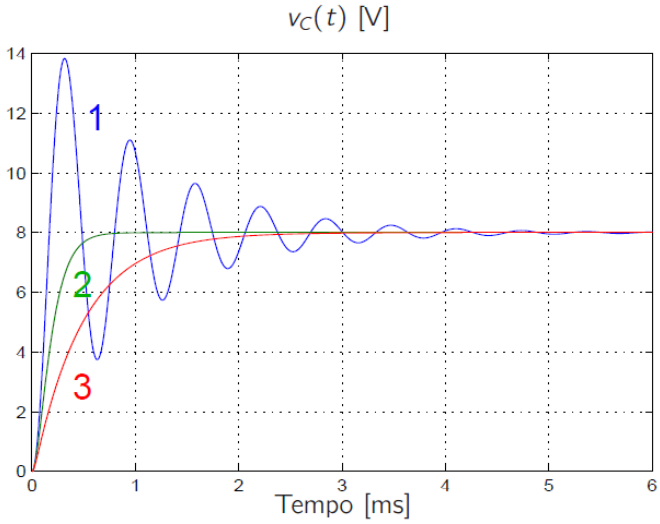
$$i(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} \tag{3}$$

Para determinar as constantes k_1 e k_2 é necessário considerar o estado inicial do circuito. Se, por exemplo, a corrente inicial no circuito for nula ($v_R(0) = 0$), resulta:

$$i(0) = k_1 + k_2 = 0$$

A derivada inicial da corrente pode ser obtida a partir da tensão inicial no capacitor:

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{L}\left[v - v_C(0) \right] = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2$$



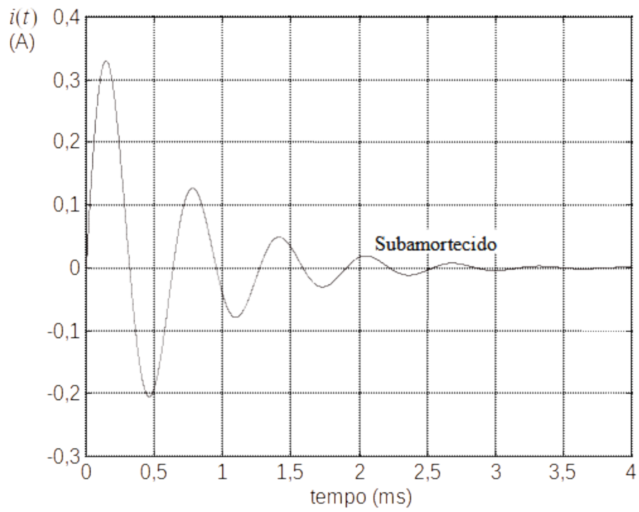
Resposta ao degrau: 1 - subamortecido 2 - crítico 3 - superamortecido

(a) Caso Subamortecido: $\alpha < \omega_0$ $(R < R_{cr})$

Neste caso, a equação (2) terá duas soluções complexas conjugadas:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

onde o radicando corresponde à frequência natural amortecida (ω_d). Substituindo λ_1 e λ_2 na equação geral (3) resulta como solução:



$$i(t) = \frac{1}{\omega_d L}\left[v - v_C(0) \right] e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t)$$

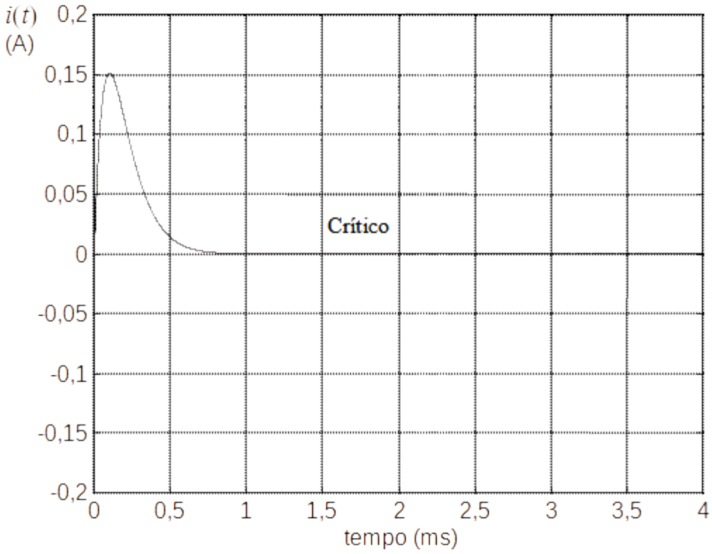
Neste caso, a resposta é nitidamente oscilatória com frequência $\omega_d < \omega_0$ e com amplitude decrescente para $\alpha > 0$.

(b) Caso Crítico: $\alpha = \omega_0 \; (R = R_{cr})$

Nesse caso a equação (2) terá duas soluções idênticas:

$$i_1 = i_2 = -\alpha = -\frac{R_{cr}}{2L}$$

e a resposta temporal será dada pelo limite de (3) para $\lambda_1 \to -\alpha$ e $\lambda_2 \to -\alpha$, ou seja:

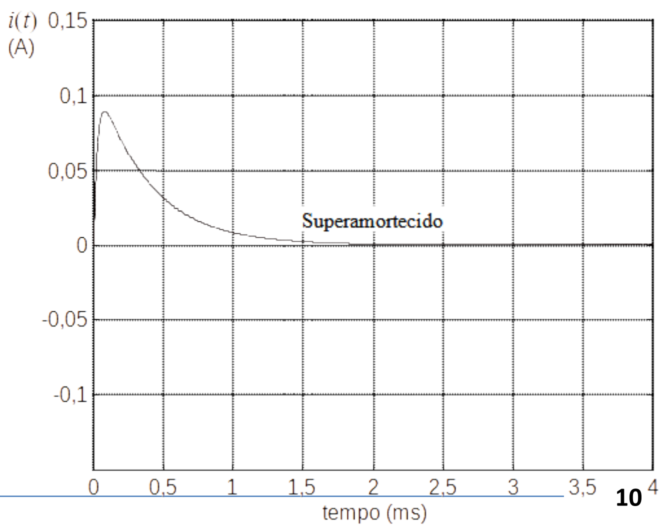


$$i(t) = -\frac{1}{L}\left[v_C(0) - v\right] t \, e^{-\alpha t} \qquad (4)$$

Neste caso limite não ocorre oscilação.

(c) Caso Superamortecido: $\alpha > \omega_0 \; (R > R_{cr})$

Neste caso tem-se $\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} > 0$, resultando duas raízes reais $\lambda_1 \neq \lambda_2$ em (2). Assim, a resposta para este caso superamortecido será:



$$i(t) = \frac{1}{L}\left[v - v_C(0)\right] \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

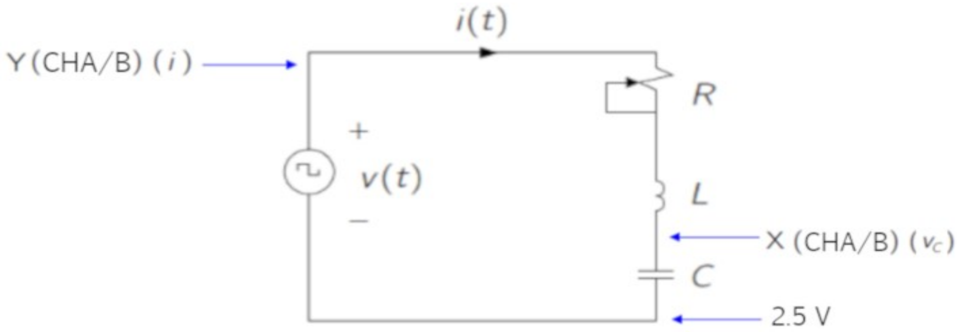
Ensaios e Questões:

Os ensaios serão realizados apenas com a associação RLC série. Se alimentarmos este circuito com uma **ONDA QUADRADA**, de período suficientemente longo, podemos observar a resposta para cada degrau da tensão imposta. Para verificar, será utilizada a montagem do circuito abaixo.

(i) ► Observe que um indutor sempre possui um longo condutor elétrico, apresentando assim uma resistência interna não desprezível. Para levar em conta esta resistência, devemos modelar um indutor real como uma associação em série de indutor ideal e uma resistência. Para ***L* = 1 mH** meça com o ohmímetro a resistência R_L da bobina:

R_L = Ω

(ii) ► Realize a montagem a seguir com ***L* = 1 mH**, ***C* = 0,1 μF e R sendo um potenciômetro de 1 kΩ**.



(iii) Calcule a frequência natural f_0, em Hz.

(iv) Obtenha o valor crítico de *R* para $\alpha = \omega_0$.

(v) ► Ajuste o gerador para **ONDA QUADRADA**, com **V_{pp} = 4 V** e ***f* = 100 Hz**.

(vi) ► Ajuste e anote o valor de *R (use o potenciômetro)* de forma a obter cada uma das três condições de amortecimento descritas anteriormente. Desenhe as respectivas formas de onda da corrente e da tensão no capacitor.

a) Subamortecido – Desenho da Corrente no Capacitor

b) Criticamente amortecido - Desenho da Corrente no Capacitor

c) Superamortecido - Desenho da Corrente no Capacitor

Proposição III.3

RESSONÂNCIA SÉRIE

Objetivo: Verificar o fenômeno da ressonância de um circuito RLC série.

Introdução:

Já vimos anteriormente que os circuitos indutivo e capacitivo introduzem defasagens contrárias entre tensão e corrente. Vimos também que a defasagem depende da frequência da tensão de alimentação. Observaremos agora como se comporta um circuito *RLC* série quando sua entrada possui a frequência natural do circuito.

Ensaios e Questões:

(i) Qual a impedância vista pela fonte quando a entrada possui frequência f_0? Observe que $1/j = j/j^2 = -j$.

(ii) Quanto valem a tensão no indutor e no capacitor para essa frequência? Quanto vale a soma destas tensões? Dê uma explicação física ao fenômeno.

(iii) ► Usando uma entrada **SENOIDAL**, varie a frequência entre 10kHz e 20kHz e encontre a frequência para a qual a corrente do circuito é máxima. Compare o valor obtido com o item f_0.