

9. MODELAGEM DE CONVERSORES: MODELO DA CHAVE PWM

As topologias básicas de conversores CC-CC possuem uma chave controlada e outra não-controlada associadas a elementos lineares invariantes no tempo. Ao conjunto destas duas chaves pode-se dar o nome de chave PWM [9.1].

O objetivo neste capítulo é desenvolver um modelo linear para estas chaves, válido em torno do ponto de operação e para o modo de condução contínua (MCC). O projeto adequado do compensador necessita um conhecimento do modelo matemático do comportamento do conversor frente a pequenas perturbações.

9.1 Propriedades invariantes das chaves PWM

A figura 9.1 mostra os conversores básicos, indicando terminais chamados **a**, **p** e **c**, denominados **ativo**, **passivo** e **comum**.

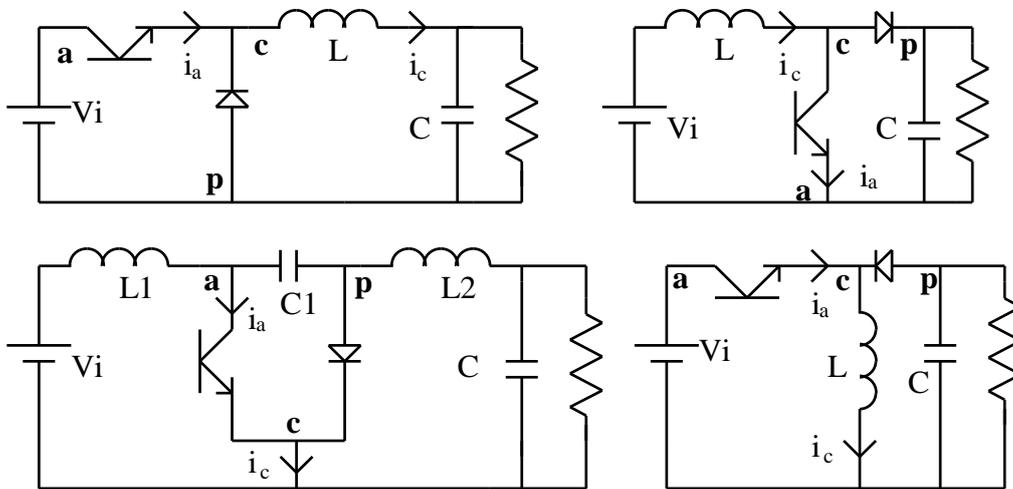


Figura 9.1 Conversores básicos indicando terminais ativo (a), passivo (p) e comum (c).

A chave pode ser modelada da seguinte forma:

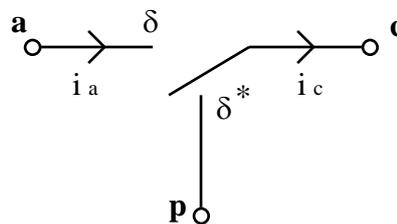


Figura 9.2 Modelo da chave PWM no MCC.

onde δ é o ciclo de trabalho e $\delta^*=(1-\delta)$, o seu complemento.

No **modo contínuo**, i_c será sempre diferente de zero. No intervalo $(\delta.\tau)$ (chave controlada fechada), independentemente da topologia, tem-se:

$$i_a(t) = i_c(t) \tag{9.1}$$

$$v_{ap}(t) = v_{cp}(t) \tag{9.2}$$

No intervalo complementar:

$$i_a(t) = 0 \quad (9.3)$$

$$v_{cp}(t) = 0 \quad (9.4)$$

Novamente, também neste tipo de análise, interessam os valores médios das variáveis (uma vez que se pretende utilizar ferramentas de análise linear de sistemas). No estudo do comportamento dinâmico, as perturbações estudadas serão, por hipótese, em frequência muito menor do que a frequência de chaveamento e de pequena amplitude.

As grandezas médias serão expressas por tipos maiúsculos, enquanto os termos relativos às perturbações serão indicados com uma letra em estilo: d, v , etc.

Pode-se demonstrar que a seguinte relação é verdadeira:

$$I_a = \delta \cdot I_c \quad (9.5)$$

Considerando as formas de corrente $i_a(t)$ e $i_c(t)$ mostradas na figura 9.3, e ainda a presença da resistência série do capacitor do filtro de saída, tem-se as ondas de $v_{ap}(t)$ e $v_{cp}(t)$ indicadas na figura 9.4, considerando e desprezando a ondulação na corrente.

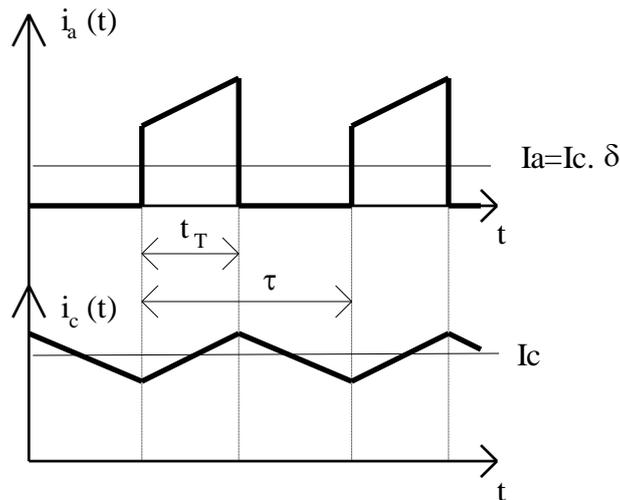


Figura 9.3 Corrente nos terminais ativo e comum.

A forma retangular de $v_{ap}(t)$ (exceto no conversor abaixador, quando $v_{ap}(t)$ é sempre igual à tensão de entrada), decorre, assim, da presença de resistência no caminho da corrente $i_c(t)$. Desprezando a ondulação desta corrente, a ondulação na tensão $v_{ap}(t)$ pode ser dada por:

$$V_r = I_c \cdot R_e \quad (9.6)$$

onde R_e é função da resistência série equivalente do capacitor e da carga, R_o .

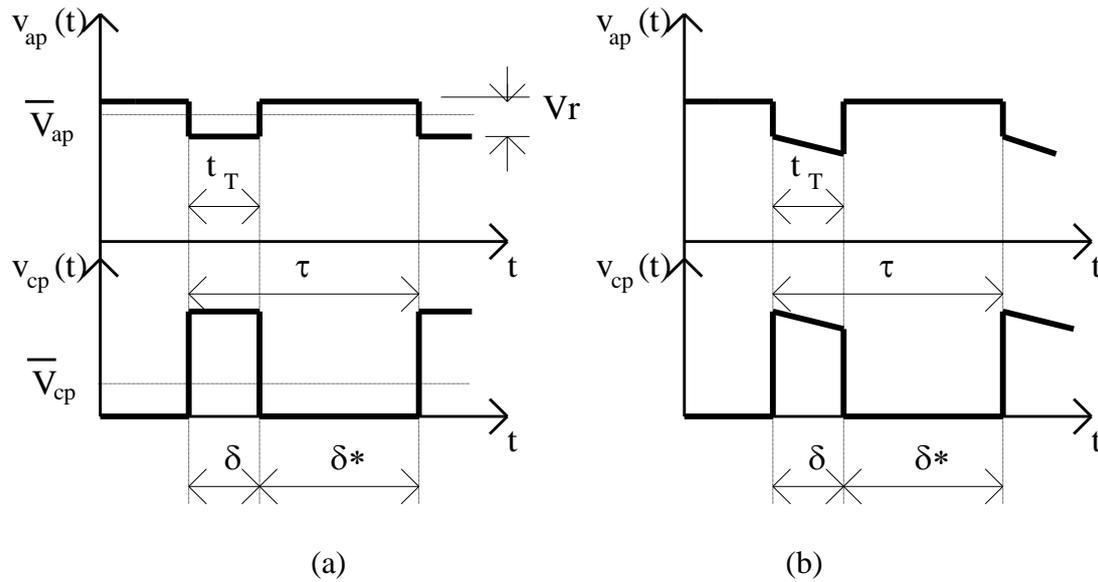


Figura 9.4 Tensões nos terminais da chave PWM sem (a) e com (b) a ondulação na corrente considerada.

Nos conversores elevador e abaixador-elevador, o capacitor de saída está em paralelo com a carga, de modo que o valor de R_e é a associação em paralelo de R_{se} e R_o . No conversor Cuk $R_e = R_{se}$.

Da figura anterior, pode-se obter:

$$\bar{V}_{cp} = \delta \cdot (\bar{V}_{ap} - I_c \cdot R_e \cdot \delta^*)$$

Caso a queda de tensão na junção do diodo, v_d , deva ser considerada, a equação precedente deve ser reescrita como:

$$\bar{V}_{cp} = \delta \cdot (\bar{V}_{ap} - I_c \cdot R_e \cdot \delta^*) - v_d \cdot \delta^* \tag{9.7}$$

9.2 Modelo CC da chave PWM

Seja o ciclo de trabalho composto por uma componente de valor constante e uma perturbação:

$$\delta = D + d \tag{9.8}$$

Para um ciclo de trabalho constante ($\delta=D$), e supondo que as variáveis sofram alguma perturbação devido a mudança na tensão de entrada ou na carga, tem-se:

$$(I_a + i_a) = D \cdot (I_c + i_c) \tag{9.9}$$

$$I_a = D \cdot I_c \tag{9.10}$$

$$V_{cp} = D \cdot V_{ap} - D^* \cdot D \cdot R_e \cdot I_c - v_d \cdot D^* \tag{9.11}$$

Das equações anteriores, obtém-se o circuito equivalente dado na figura 9.5, no qual o "transformador" é um elemento fictício e que permite a transformação de tensões CA ou CC.

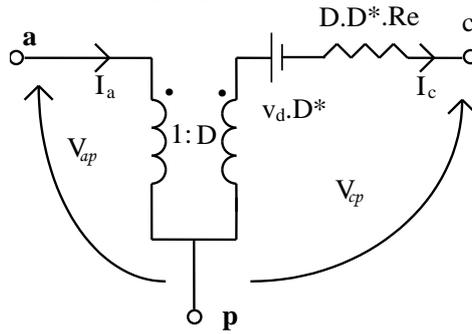


Figura 9.5 Circuito CC equivalente (fictício) para chave PWM com transformador CC.

9.3 Modelo CA da chave PWM

Para uma pequena perturbação no ciclo de trabalho, desprezando os termos em que as perturbações aparecem multiplicadas entre si, tem-se:

$$i_a = D \cdot i_c + I_c \cdot d \tag{9.12}$$

$$v_{cp} = D \cdot (v_{ap} + I_c \cdot R_e \cdot d - i_c \cdot R_e \cdot D^*) + d \cdot (V_{ap} - I_c \cdot R_e \cdot D^* + v_d) \tag{9.13}$$

Isolando v_{ap} .

$$v_{ap} = \frac{v_{cp}}{D} + i_c \cdot R_e \cdot D^* - \left[V_{ap} + I_c \cdot (D - D^*) \cdot R_e + v_d \right] \cdot \frac{d}{D} \tag{9.14}$$

Seja
$$V_D = V_{ap} + I_c \cdot R_e \cdot (D - D^*) + v_d \tag{9.15}$$

De (9.14) tem-se
$$v_{ap} = \frac{v_{cp}}{D} + i_c \cdot R_e \cdot D^* - \frac{V_D}{D} \cdot d$$

Destas equações pode-se representar a chave como mostrado na figura 9.6:

Na verdade, este modelo é geral, podendo ser usado para a análise CC fazendo-se $d=0$ e $i_c = I_c$. O elemento relativo à queda na junção do diodo (v_d) não tem efeito dinâmico significativo. Sua influência é significativa na análise CC, pois afeta o valor da tensão média de saída. Assim, supor $v_d=0$ nas análises dinâmicas é uma simplificação muito razoável.

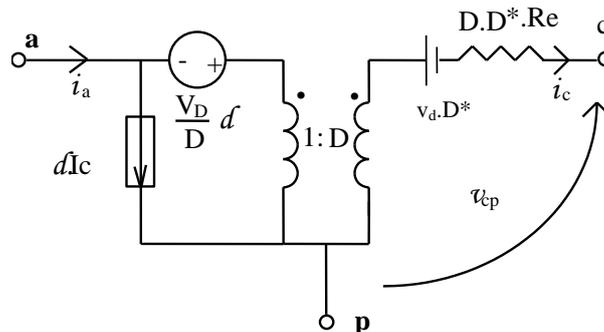


Figura 9.6 Modelo CA da chave.

9.4 Efeito das perdas em condução e do tempo de armazenamento sobre o modelo da chave PWM

O atraso de desligamento do transistor provoca uma alteração no ciclo de trabalho do conversor. Especialmente para os transistores bipolares, a atraso decorrente do tempo de armazenamento provoca uma alteração no ciclo de trabalho efetivo do conversor, de modo que a perturbação no ciclo de trabalho pode ser representada por [9.2]:

$$\delta_{\text{ef}} = \delta - \frac{i_c}{I_{\text{me}}} \quad (9.16)$$

onde δ é a largura de pulso aplicada no circuito e δ_{ef} é a comandada pelo modulador. I_{me} é um parâmetro que depende do tipo de circuito de acionamento do transistor.

Substituindo (16) em (12) e (14) chega-se a:

$$i_a = \left[D - \frac{I_c}{I_{\text{me}}} \right] \cdot i_c + I_c \cdot d \quad (9.17)$$

$$v_{ap} = \frac{v_{\varphi}}{D} + i_c \cdot \left(R_e \cdot D^* + \frac{r_m}{D} \right) - \frac{V_D}{D} \cdot d \quad (9.18)$$

$$r_m = \frac{V_D}{I_{\text{me}}} \quad (\text{resistência modulada "não dissipativa"})$$

Como geralmente $D \gg I_c/I_{\text{me}}$, pode-se reescrever (9.17):

$$i_a = D \cdot i_c + I_c \cdot d \quad (9.19)$$

Isto significa que, no modelo, a inclusão do tempo de armazenamento não afeta o comportamento da corrente, mas apenas o da tensão, como se pode observar na figura 9.7, na qual são incluídas as resistências de condução do diodo (r_d) e do transistor (r_t). O parâmetro r_m afeta a tensão, mas não produz dissipação de potência, ou seja, não afeta o rendimento do conversor. Para transistores que não sejam bipolares, r_m pode ser desconsiderada.

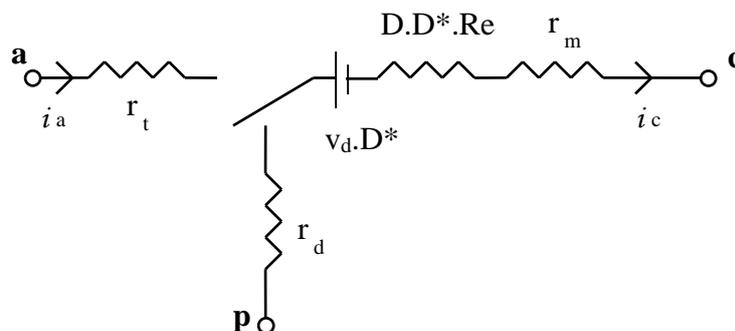


Figura 9.7 Modelo da chave incluindo resistências do diodo, do transistor e “modulada”.

$$V_{cp} = D \cdot (V_{ap} - I_c \cdot D^* \cdot R_e - I_c \cdot r_t) - D^* \cdot I_c \cdot r_d \tag{9.20}$$

Admitindo uma perturbação no ciclo de trabalho, $\delta = D + d$, de (9.20) chega-se a:

$$v_{ap} = \frac{v_{cp}}{D} + i_c \cdot r_c - d \cdot \frac{V_D}{D} \tag{9.21}$$

$$r_c = r_m + D \cdot r_t + D^* \cdot r_d + D \cdot D^* \cdot R_e \tag{9.22}$$

$$V_D = V_{ap} + (D - D^*) \cdot I_c \cdot R_e + I_c \cdot (r_d - r_t) \tag{9.23}$$

O que leva ao modelo mostrado na figura 9.8:

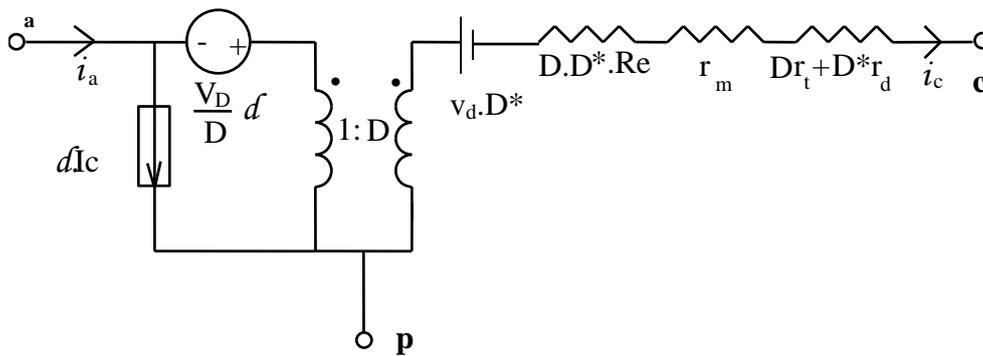


Figura 9.8 Modelo completo da chave PWM.

9.5 Análise do conversor abaixador de tensão

As seguintes relações serão obtidas:

$v_o(s)/v_i(s)$: variação da saída frente a perturbação na entrada

$M = V_o/V_i$: taxa de conversão

Z_{in} : impedância de entrada

Z_{out} : impedância de saída

$v_o(s)/d(s)$: variação da saída frente a perturbação no ciclo de trabalho

O circuito (figura 9.9) e o modelo (figura 9.10) estão indicados a seguir.

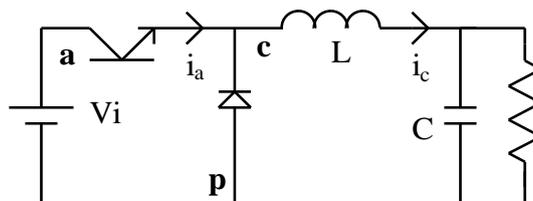


Figura 9.9 Conversor abaixador de tensão.

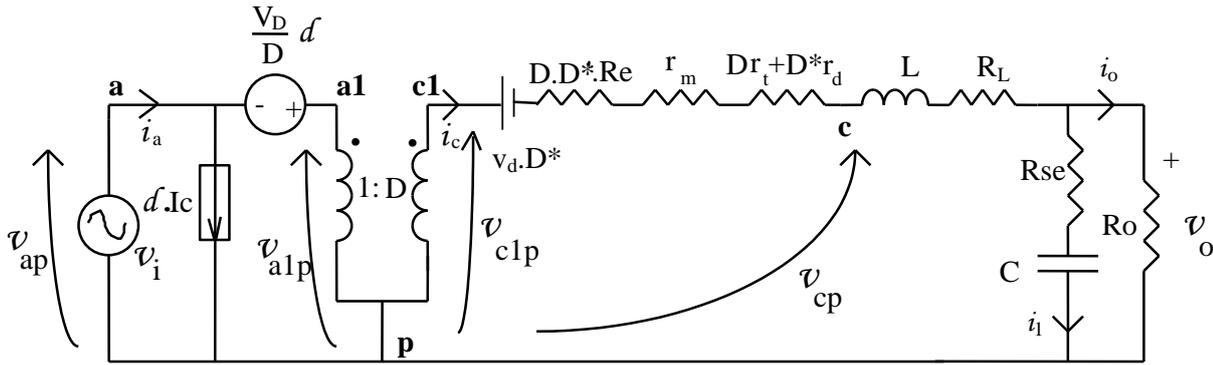


Figura 9.10 Modelo para o conversor abaixador de tensão.

9.5.1 Análise CC

Analisando o modelo, e considerando que: o ciclo de trabalho é constante ($d = 0$); os indutores são representados apenas por suas resistências; os capacitores estão abertos; a tensão de entrada; V_i é constante; $R_e = 0$, obtém-se:

$$V_{ap} = V_i \quad (9.24)$$

$$V_{c1p} = D \cdot V_{ap} \quad (9.25)$$

$$V_{c1p} - V_o = (R_L + r_m + D \cdot r_t + D^* \cdot r_d) \cdot I_c + v_d \cdot D^* \quad (9.26)$$

$$I_c = I_o = \frac{V_o}{R_o} \quad (9.27)$$

de cujas equações se obtém:

$$V_o = \frac{D \cdot R_o \cdot (V_i - D^* \cdot v_d)}{R_o + R_L + r_m + r_t \cdot D + r_d \cdot D^*} \quad (9.28)$$

Desprezando a tensão v_d (relativa à queda na junção do diodo):

$$M = \frac{V_o}{V_i} = \frac{D \cdot R_o}{R_o + R_L + r_m + r_t \cdot D + r_d \cdot D^*} \quad (9.29)$$

Desprezando ainda r_m , R_L , r_t e r_d , tem-se então a relação do conversor sem perdas:

$$M = \frac{V_o}{V_i} = D$$

9.5.2 Determinação de $v_o(s)/v_i(s)$

Admitindo ciclo de trabalho constante ($d = 0$), desprezando o efeito de v_d e ainda considerando que a tensão de entrada sofre pequenas perturbações ($v_i = V_i + v_i$), da inspeção do modelo tem-se:

$$D \cdot v_i - v_o = (r_m + D \cdot r_t + D^* \cdot r_d + R_L) \cdot i_c + L \cdot \frac{di_c}{dt} \tag{9.30}$$

$$v_o = R_o \cdot i_o \tag{9.31}$$

$$R_1 = r_m + D \cdot r_t + D^* \cdot r_d + R_L \tag{9.32}$$

$$v_o = R_{se} \cdot i_1 + \frac{1}{C} \int i_1 \cdot dt \tag{9.33}$$

$$i_c = i_o + i_1 \tag{9.34}$$

Aplicando a transformada de Laplace às equações anteriores e resolvendo, chega-se ao diagrama de blocos mostrado na figura 9.11:

Pelo diagrama, obtém-se:

$$\frac{v_o(s)}{v_i(s)} = \frac{D \cdot R_o \cdot (s \cdot C \cdot R_{se} + 1)}{(R_o \cdot C \cdot L + R_{se} \cdot C \cdot L)} \cdot \frac{1}{s^2 + s \cdot \left[\frac{C \cdot (R_o \cdot R_1 + R_o \cdot R_{se} + R_1 \cdot R_{se}) + L}{L \cdot C \cdot (R_o + R_{se})} \right] + \frac{R_o + R_1}{L \cdot C \cdot (R_o + R_{se})}} \tag{9.35}$$

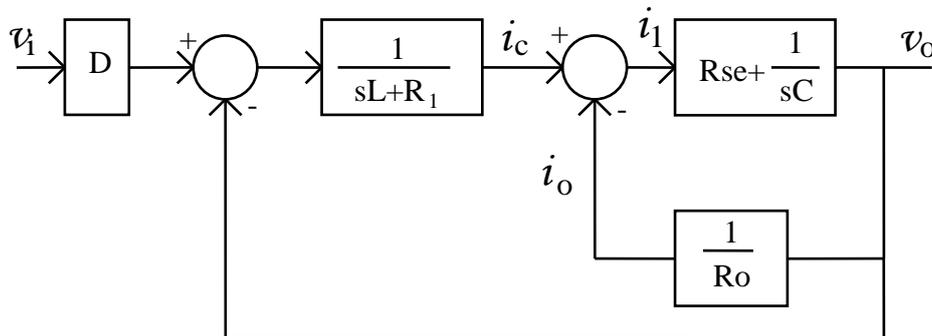


Figura 9.11 Diagrama de blocos do sistema.

Desprezando os elementos parasitas do modelo, recai-se na expressão clássica para o conversor:

$$\frac{v_o(s)}{v_i(s)} = D \cdot \frac{\frac{1}{L \cdot C}}{s^2 + s \cdot \frac{1}{R_o \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}} \tag{9.36}$$

A simulação da equação 9.35 resulta nos diagramas de Bode mostrados na figura 9.12.

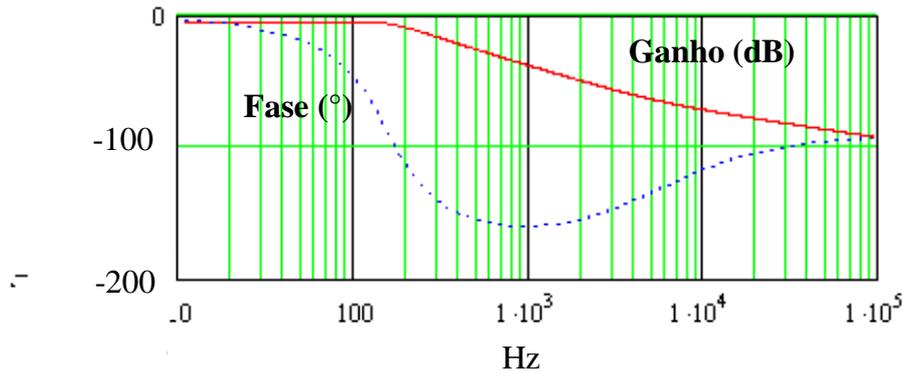


Figura 9.12 Diagramas de Bode da relação $v_o(s)/v_i(s)$ para conversor abaixador de tensão no MCC.

Utilizando o modelo da figura 9.10, e lembrando que, para esta análise $d=0$, o circuito resultante é mostrado na figura 9.13. A respectiva resposta em frequência é mostrada ao lado, a qual é coincidente com a obtida pela função de transferência. Verifica-se, deste modo, a praticidade desta modelagem, pois permite obter o comportamento dinâmico do sistema a partir do próprio circuito.

Os parâmetros usados são: $L=10$ mH, $C=100$ uF, $R_{se}=0,3$ Ω , $r_t=0,1$ Ω , $r_d=0,3$ Ω , $R_L=0$, $R_o=10$ Ω , $r_m=0$, $D=0,5$, $v_d=0,8$ V.

A resposta no tempo a um degrau na tensão de entrada é mostrada na figura 9.14, tanto para o circuito completo (com transistor e diodo) quanto para o modelo. Neste caso, a inclusão do parâmetro v_d no modelo é essencial para a exatidão da resposta.

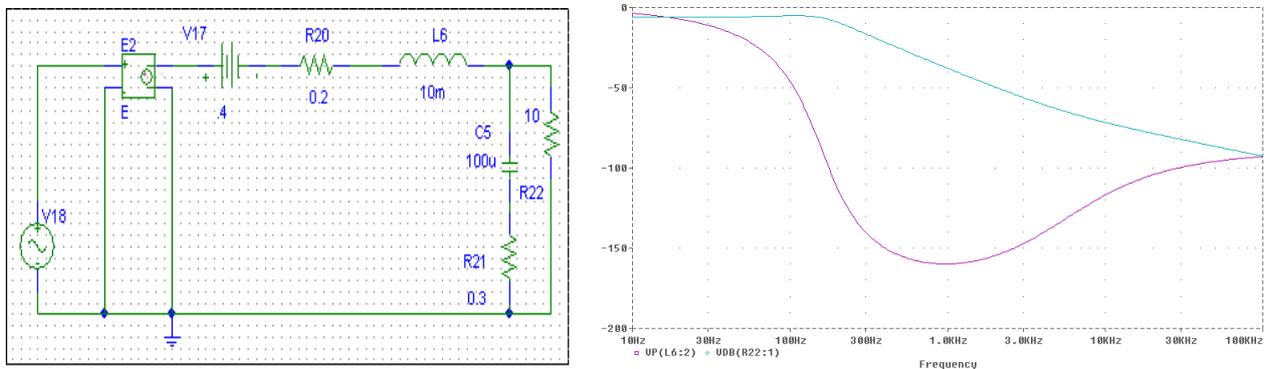


Figura 9.13. Circuito utilizando modelo da chave PWM e respectiva resposta em frequência.

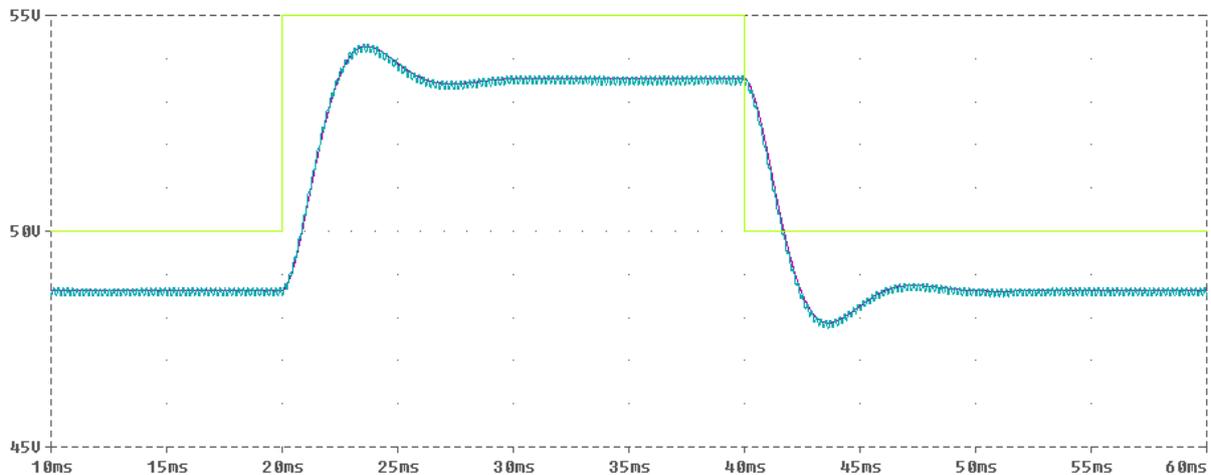


Figura 9.14 Resposta a um degrau na tensão de entrada: circuito com chaveamento e modelo.

9.5.3 Cálculo de $v_o(s)/d(s)$

Sabendo que $V_{ap} = V_i$, e admitindo v_i constante ($v_i = 0$) e que o ciclo de trabalho sofra pequena perturbação, da análise do modelo tem-se:

$$v_{ap} = v_{aip} - V_D \cdot \frac{d}{D} = 0 \quad (9.37)$$

$$v_{cip} = D \cdot v_{aip} \quad (9.38)$$

o que resulta em:

$$v_{cip} = V_D \cdot d \quad (9.39)$$

Como não existe ondulação de tensão em v_{ap} (já que para este conversor $R_e = 0$), pode-se escrever, de (9.23):

$$V_D = V_i + I_c \cdot (r_d - r_t) \quad (9.40)$$

Definindo

$$R_2 = r_d - r_t + R_L \quad (9.41)$$

chega-se ao seguinte sistema de equações, o qual leva ao diagrama de blocos mostrado na figura 9.15:

$$V_D \cdot d - v_o = R_2 \cdot i_c + L \cdot \frac{di_c}{dt} \quad (9.42)$$

$$v_o = R_o \cdot i_o \quad (9.43)$$

$$v_o = R_{se} \cdot i_1 + \frac{1}{C} \int i_1 \cdot dt \quad (9.44)$$

$$i_c = i_o + i_1 \quad (9.45)$$

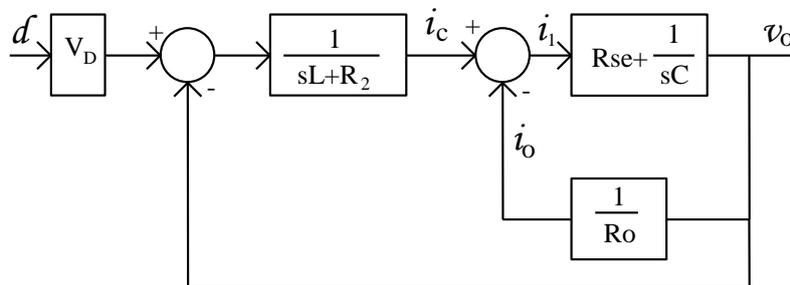


Figura 9.15 Diagrama de blocos do sistema.

Do circuito equivalente (figura 9.10) obtém-se:

$$\frac{v_o(s)}{d(s)} = V_D \cdot F(s) \quad (9.46)$$

$$F(s) = \frac{R_o \cdot (1 + s \cdot C \cdot R_{se})}{L \cdot C \cdot (R_o + R_{se})} \cdot \frac{1}{s^2 + s \cdot \left[\frac{C \cdot (R_o \cdot R_2 + R_o \cdot R_{se} + R_{se} \cdot R_2) + L}{L \cdot C \cdot (R_o + R_{se})} \right] + \frac{R_o + R_2}{L \cdot C \cdot (R_o + R_{se})}} \quad (9.47)$$

Nota-se que a resposta independe do valor médio do ciclo de trabalho, ou seja, do ponto de operação.

A figura 9.16 mostra os diagramas de Bode da função de transferência entre a tensão de saída e o ciclo de trabalho, considerando e desprezando as resistências “parasitas” do modelo.

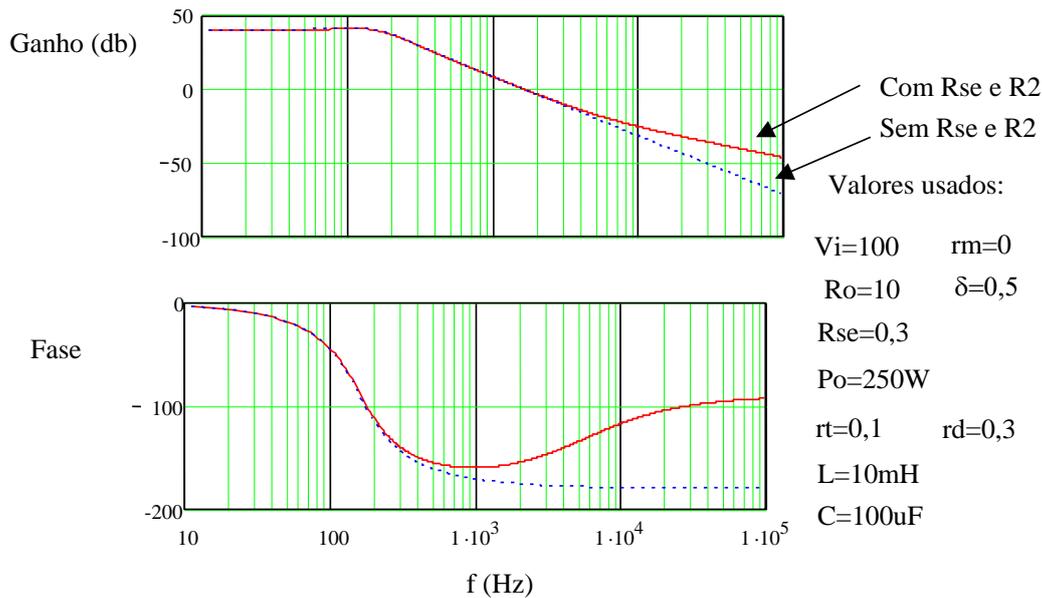


Figura 9.16 Diagramas de Bode relativos à figura 9.15.

9.5.4 Cálculo de Z_{in} (impedância dinâmica de entrada)

Por definição:

$$Z_{in} = v_{in}(s)/i_{in}(s) \quad (9.48)$$

Do modelo, $v_{in}(s) = v_i(s)$ e $i_{in}(s) = i_a(s)$. Admitindo um ciclo de trabalho constante ($d = 0$), tem-se:

$$i_a = D \cdot i_c \quad (9.49)$$

Do diagrama de blocos da figura 9.11 tem-se:

$$\frac{i_c(s)}{D \cdot v_i(s)} = \frac{\frac{s \cdot C \cdot R_o}{L \cdot C \cdot (R_o + R_{se})} \cdot \left[\frac{R_{se}}{R_o} + \frac{1}{s \cdot C \cdot R_o} + 1 \right]}{s^2 + s \cdot \left[\frac{L + C \cdot (R_o \cdot (R_1 + R_{se}) + R_1 \cdot R_{se})}{L \cdot C \cdot (R_o + R_{se})} \right] + \frac{R_1 + R_o}{L \cdot C \cdot (R_o + R_{se})}} \quad (9.50)$$

$$E = s^2 + s \cdot \left[\frac{L + C \cdot (R_o \cdot (R_1 + R_{se}) + R_1 \cdot R_{se})}{L \cdot C \cdot (R_o + R_{se})} \right] + \frac{R_1 + R_o}{L \cdot C \cdot (R_o + R_{se})} \quad (9.51)$$

$$Z_{in} = \frac{v_i(s)}{i_a(s)} = \frac{1}{D^2} \cdot \frac{E \cdot C \cdot L \cdot (R_o + R_{se})}{1 + s \cdot C \cdot (R_o + R_{se})} \quad (9.52)$$

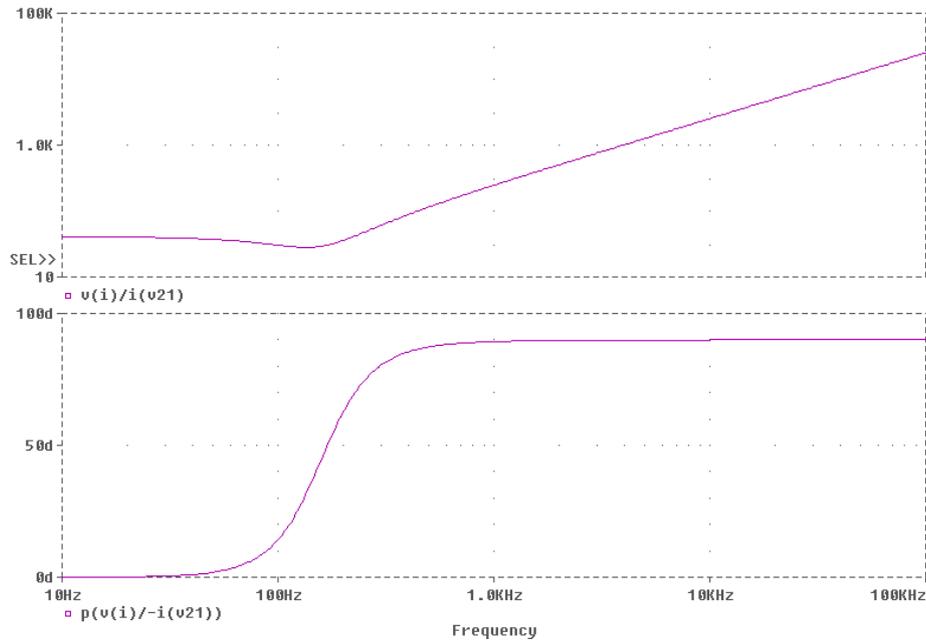


Figura 9.17 Comportamento da impedância de entrada, obtido pela simulação do circuito equivalente.

9.5.5 Cálculo de Z_{out} (impedância dinâmica de saída)

Por definição, curtocircuitando as fontes de tensão, e abrindo as fontes de corrente, tem-se:

$$Z_{out} = \left[\frac{v_o(s)}{i_c(s)} \right] // R_o // \left[R_{se} + \frac{1}{s \cdot C} \right] \quad (9.53)$$

Do diagrama de blocos,

$$\frac{v_o(s)}{i_c(s)} = s \cdot L + R_1 \quad (9.54)$$

Trabalhando as equações precedentes, tem-se:

$$Z_{out} = \frac{R_o \cdot R_1}{L \cdot C \cdot (R_o + R_{se})} \cdot \left[1 + \frac{s \cdot L}{R_1} \right] \cdot \left[1 + s \cdot C \cdot R_{se} \right] \quad (9.55)$$

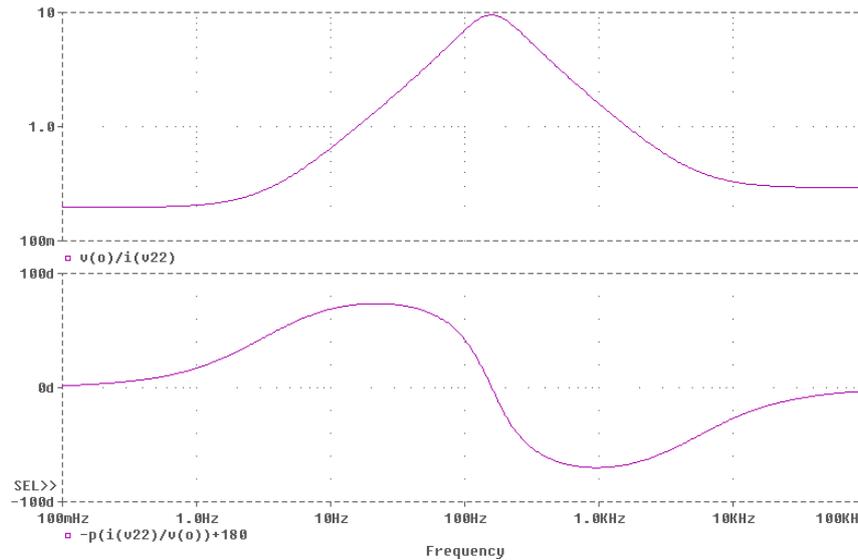


Figura 9.18 Comportamento da impedância de saída.

9.6 Operação no Modo de Condução Descontínua

De acordo com o método do espaço de estado médio [9.3], quando um conversor PWM entra no modo de condução descontínua (MCD), a corrente do indutor deixa de ser considerada uma variável de estado. Na análise que utiliza o modelo da chave PWM [9.4], no entanto, é mostrado que não há justificativa teórica ou experimental para o “desaparecimento” do estado indutor.

O que este método propõe é a substituição do interruptor (conjunto transistor + diodo) por um modelo linearizado, diferente daquele definido para o MCC e adequado ao MCD, enquanto o indutor é mantido no circuito. Desta forma o modelo médio obtido continua a apresentar dois polos. O primeiro polo, dominante, concorda com o polo único do modelo obtido pela análise de espaço de estado médio. O segundo polo ocorre em frequência elevada, que se aproxima da frequência de comutação. Tal demonstração se encontra na referência [9.4] e não será apresentada aqui.

Observe-se, no entanto que, para efeitos práticos, o comportamento de primeira ordem representa adequadamente o funcionamento do conversor e permite o projeto do controlador.

Como regra geral deve-se considerar que um modelo é adequado quando é capaz de representar o comportamento do sistema e que, havendo mais de um modelo disponível, o mais simples é o de uso mais conveniente.

9.7 Referências Bibliográficas

- [9.1] V. Vorperian, Simplified analysis of PWM converters using model of PWM switch. Continuous conduction mode, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Year: 1990, Volume: 26, Issue: 3, Pages: 490 – 496
- [9.2] Polivka, W., Chetty, P., and Middlebrook, R. “State-space average modelling of converters with parasitics and storage-time modulation”, IEEE Power Electronics Specialists Conference Proceedings, 1980.
- [9.3] Slobodan Cuk; R. D. Middlebrook, A general unified approach to modelling switching DC-to-DC converters in discontinuous conduction mode, IEEE Power Electronics Specialists Conference, 1977, Pages: 36 - 57
- [9.4] V. Vorperian, Simplified analysis of PWM converters using model of PWM switch. II. Discontinuous conduction mode, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Year: 1990, Volume: 26, Issue: 3, Pages: 497 - 505