Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DT-FEEC-UNICAMP

Análise Pós-Otimização

1 Introdução

Muitas vezes, os parâmetros dos problemas não são conhecidos com precisão. Por exemplo:

- c não é exato;
- b não é conhecido de forma exata;
- A pode sofrer modificações;
- as restrições podem ser levemente violadas.

Neste contexto, é interessante fazermos análises de variações dos parâmetros dos problemas sem a necessidade de resolver os problemas novamente. No âmbito da PL, podemos destacar dois enfoques:

- **análise pós-otimização** ou **análise de sensibilidade**;
- **programação matemática fuzzy**.

Seja o problema primal:

$$(P)\begin{cases} min & f = c^t x \\ sa & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Vamos considerar que a solução ótima atual é conhecida, com A^I também conhecida. A partir destas informações, vamos estudar as influências na solução atual, da variação de:

- a) vetor custo c;
- b) vetor de recursos b;
- c) matriz A:
  - c.1) modificação em uma coluna de A;
  - c.2) adição de uma nova atividade;
  - c.3) adição de uma nova restrição.

utilizando análise pós-otimização ou análise de sensibilidade.

2 Variação no custo c_k para $\bar{c}_k$

Podemos destacar 2 casos:

- x_k é não básica
  Neste caso, como $\hat{c}_j = c_j - \pi A^j$, as básicas não mudam pois π não muda. Mudam as não básicas que tiveram c_k modificado

para $\bar{c}_k$:

$\hat{\bar{c}}_k = \bar{c}_k - \pi A^k = (\bar{c}_k - c_k) + (c_k - \pi A^k) = \Delta c_k + \hat{c}_k$ e continuar a otimização.

- x_k é básica
  Neste caso, muda c_I, logo muda $\pi = c_I^t (A^I)^{-1}$.
  As não básicas devem ter seus $\hat{c}_j = c_j - \pi A^j$ atualizadas.
  Continuar a otimização.

  Note que se novo $\bar{c}_I = c_I + \Delta c_I$, $\hat{\bar{c}}_J = c_J - \pi A^J = c_J - \bar{c}_I^t (A^I)^{-1} A^J$, ou seja:

  $\hat{\bar{c}}_J = c_J - (c_I + \Delta c_I)^t (A^I)^{-1} A^J = \hat{c}_J - \Delta c_I{}^t \hat{A}^J$

  ou seja, para as não básicas, multiplicar a k-ésima linha (da básica k) por $(-\Delta c_I)$ e adicionar na linha dos $\hat{c}_J$.

Exemplo: Seja o problema:

$$(P)\left\{\begin{array}{lll} minf = & -2x_1 + x_2 - x_3 & \\ sa & x_1 + x_2 + x_3 & \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 & \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}\right.$$

cujo tableau ótimo é (x_4 e x_5 são variáveis de folga):

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{-f}$
0	3	1	2	0	12
1	1	1	1	0	6
0	3	1	1	1	10

a) Variação de $c_2 = 1$ para $c_2 = -3$

x_2 é não básica, logo novo $\hat{c}_2 = c_2 - \pi A^2 = -1$ e o novo tableau fica:

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{-f}$
0	-1	1	2	0	12
1	1	1	1	0	6
0	3	1	1	1	10

Saiu da otimalidade e, portanto, continuar a otimização.

b) Variação de $c_1 = -2$ para $c_1 = 0$

x_1 é básica, logo $\Delta c_1 = 0 - (-2) = 2$. Multiplicando a linha $r = 1$ por -2 e somando na linha dos custos relativos (menos de x_1), o novo tableau fica:

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{-f}$
0	1	-1	0	0	0
1	1	1	1	0	6
0	3	1	1	1	10

Saiu da otimalidade e, portanto, continuar a otimização.

3 Variação no vetor de recursos b

Basta recalcular $\hat{b}$ e o valor da função objetivo $z = \pi b$. Podem ocorrer duas situações:

- $\hat{b} \geq 0$, o ótimo não muda.

- $\hat{b} < 0$, continuar a otimização utilizando dual-simplex.

Exemplo: Variação de b do exemplo (P) para $b = [3 \;\; 4]^t$

O novo $\hat{b}$ fica:

$$\hat{b} = (A^I)^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

o novo tableau fica:

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$-\mathbf{f}$
0	3	1	2	0	6
1	1	1	1	0	3
0	3	1	1	1	7

A otimalidade foi mantida.

4 Variação na matriz A

4.1 Na coluna de A

Podemos destacar 2 casos: variação numa coluna não básica e numa coluna básica.

- Coluna Não Básica j:
  $\pi = c_I(A^I)^{-1}$ não muda;
  $\hat{A}^j$ muda para $\hat{A}^j = (A^I)^{-1}A^j$;
  $\hat{c}_j$ muda pois $\hat{c}_j = c_j - c_I\hat{A}^j$
  - $\hat{c}_j \geq 0$ ótimo não muda;
  - $\hat{c}_j < 0$, continuar a otimização.
- Coluna Básica i:
  Muda base, muda $(A^I)^{-1}$, muda π, muda $\hat{A}^J$, muda $\hat{b}$. Neste caso, criar uma nova atividade x_k artificial e calcular $\hat{A}^k$ e $\hat{c}_k$.
  - Se $\hat{A}^k_r \neq 0$ com $I(r) = i$, substituir a coluna da básica modificada pela da variável artificial k, pivoteando em $\hat{A}^k_r$.
  - Se $\hat{A}^k_r = 0$ com $I(r) = i$, introduzir custo M-grande para x_i na função objetivo, atualizar os $\hat{c}_J$ e continuar a otimização.

4.2 Adição de uma nova atividade x_{n+1}

Basta calcular $\hat{A}^{n+1}$ e $\hat{c}_{n+1}$ e continuar a otimização.

4.3 Adição de uma nova restrição

Podem ocorrer duas situações:

- a nova restrição não elimina a solução ótima corrente. Neste caso, a solução ótima corrente satizfaz a nova restrição.
- a nova restrição elimina a solução ótima corrente. Neste caso, introduzir a nova restrição com variável de folga ou artificial (com M-grande na função objetivo se artificial) para completar a nova base, preparar e continuar a otimização.

Exemplo: Vamos retomar o tableau ótimo do problema (P).

a) Mudança de A^2 para $A^2 = [2 \quad 5]^t$.

Como x_2 é não básica, o novo $\hat{A}^2$ fica:

$$\hat{A}^2 = (A^I)^{-1}A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}_2 = c_2 - c^I(A^I)^{-1}A^2 = 1 - \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = 1 + 4 = 5$$

e a solução continua ótima.

b) Mudança de A^1 para $A^1 = [3 \quad -6]^t$.

Como x_1 é básica, criar x_6 com $A^6 = [3 \quad -6]^t$ e $c_6 = c_1 = -2$:

$$\hat{A}^6 = (A^I)^{-1}A^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}_6 = c_6 - c^I(A^I)^{-1}A^6 = -2 - \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = -2 - (-6) = 4$$

e o tableau fica:

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	$\mathbf{-f}$
0	3	1	2	0	4	12
1	1	1	1	0	3	6
0	3	1	1	1	-3	10

Para substituir x_1 pelo x_6, pivotear em $A_1^6 = 3$ e continuar a otimização eliminando x_1.

c) Mudança de A^1 para $A^1 = [0 \quad -1]^t$.

Como x_1 é básica, criar x_6 com $A^6 = [0 \quad -1]^t$ e $c_6 = c_1 = -2$:

$$\hat{A}^6 = (A^I)^{-1}A^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}_6 = c_6 - c^I(A^I)^{-1}A^6 = -2 - \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -2 + 0 = -2$$

e o tableau fica:

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	$-\mathbf{f}$
0	3	1	2	0	-2	12
1	1	1	1	0	0	6
0	3	1	1	1	-1	10

Para substituir x_1 pelo x_6, teria que pivotear em $A_1^6 = 0$, o que não é possível. Utilizar M-grande neste caso, ou seja, trocar f para:

$$\bar{f} = Mx_1 + x_2 - x_3 - 2x_6$$

recalcular π, os $\hat{c}^J$ e $\bar{f}_o$ e continuar a otimização.

d) Adição de uma nova atividade

No exemplo (P), seja a introdução de x_6 com $c_6 = 1$ e $A^6 = [-1 \;\; 2]^t$.

$$\hat{A}^6 = (A^I)^{-1}A^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}_6 = c_6 - c^I(A^I)^{-1}A^6 = 1 - \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - 2 = -1$$

e o tableau fica:

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	$\mathbf{-f}$
0	3	1	2	0	-1	12
1	1	1	1	0	-1	6
0	3	1	1	1	1	10

e continuar a otimização.

e) Introduzindo uma nova restrição $-x_1 + 2x_3 \geq 2$, como a solução atual é $x_1 = 6, x_2 = 0, x_3 = 0$, ela viola a nova restrição. Logo muda o ótimo.

Introduzindo uma variável de excesso x_6 na nova restrição, temos:

$-x_1+2x_3-x_6 = 2$ que pode ser escrita como $x_1-2x_3+x_6 = -2$. Colocando no tableau:

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	$\mathbf{-f}$
0	3	1	2	0	0	12
1	1	1	1	0	0	6
0	3	1	1	1	0	10
1	0	-2	0	0	1	-2

e preparando:

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	$\mathbf{-f}$
0	3	1	2	0	0	12
1	1	1	1	0	0	6
0	3	1	1	1	0	10
0	-1	-3	-1	0	1	-8

e continuar a otimização.

Akebo Yamakami
DT-FEEC-UNICAMP
1s/2011