CAPÍTULO III - MÉTODO SIMPLEX

EPC.1 – Seja o PL:

$$
\begin{array}{ll}
(\text{Max}) & 3x_1 + x_2 \\
\text{s.a} & |\, x_1 + 2x_2 + 10 \,| \leq 4 \\
 & x_1 - x_2 \leq 5 \\
 & x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0
\end{array}
$$

a) Resolva usando o Método Simplex
b) Faça a interpretação geométrica no plano x_1 , x_2.

EPC.2 – Suponha que ao final da FASE I exista pelo menos uma variável artificial na base,indicando que o sistema original

$$
\begin{array}{l}
Ax = b \\
x \geq 0
\end{array}
$$

é inconsistente. Diferencie os dois seguintes casos:

a) O sistema Ax = b é incompatível.
b) O sistema Ax = b é compatível,mas implica em $x \geq 0$.

EPC.3 Resolver com o auxílio do algoritmo simplex.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & f = 9x_1 + 6x_2 + 12x_3 \\
\text{s.a} & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4 \\
 & 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 \\
 & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 6 \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

EPC.4 Explique se é possível encontrar uma solução tipo β na FASE I.

EPC.5 $x^T = (5 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 0 \;\; 0)$ é uma solução factível do problema

$$\text{Max } f = (10 \quad 24 \quad 20 \quad 20 \quad 25)x$$

$$
\text{s.a} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 19 \\ 57 \end{bmatrix}, \quad x \geq 0
$$

A partir dela determine uma solução básica factível.

EPC.6 Procurar uma solução factível para:

Max f = (2 3   5)x

$$\begin{bmatrix} 3 & 10 & 5 \\ 33 & -10 & 9 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 15 \\ 33 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x \geq 4$$

$$x \geq 0$$

EPC.7 Elabore um diagrama de blocos para uma rotina computacional que obtenha uma solução básica factível, a partir de uma solução factível conhecida.

EPC.8 Admitindo a inexistência de soluções degeneradas, apresente um argumento convincente para a convergência do algoritmo simplex.

EPC.9 Uma indústria pode fabricar dois produtos (P_1 e P_2) a partir de duas matérias primas (A e B), cujas disponibilidades são respectivamente 14 e 10.

Para produzir P_1 utiliza-se 2 unidades de cada uma das matérias primas e 1 unidade de mão de obra (u.m.o.). Para P_2 utiliza-se 3 unidades de A, 1 de B e 1 u.m.o.

O produto P_1 fornece um lucro unitário de \$5 e P_2 de \$1.

A agência financiadora exige a absorção de pelo menos 8 u.m.o.

a) Formule o problema.
b) Pela resolução de uma FASE I, mostre que ele é infactível.
c) Você tem o direito de relaxar uma das restrições de matéria prima (aquisição livre de custo). Mostre que a decisão correta é relaxar a restrição de A.

   Sugestão: no quadro ótimo, permita que a variável de folga correspondente à matéria prima A possa crescer negativamente.

d) Determine o ótimo do problema relaxado.
e) Visualize o problema relaxado no plano (matéria prima B) x (mão de obra)

EPC.10 Seja o seguinte (P.L.) onde v_1 e v_2 são variáveis artificiais e apenas x_3 é variável de folga.

$$\begin{array}{llrl} \text{Max} & Z = & x_1 + 2x_2 & \\ \text{s.a.} & & 2x_1 + 3x_2 \qquad + v_1 = 5 & (1) \\ & & 6x_1 + 9x_2 \qquad + v_2 = 15 & (2) \\ & & -x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 0 & (3) \end{array}$$

$$x \geq 0, \qquad v \geq 0$$

No final da FASE I o QUADRO SIMPLEX é o seguinte

X_1	X_2	X_3	V_1	V_2	LD	
0	0	0	4	0	(Min)	Func. artificial
$\boxed{1}$	0	-3/5	1/5	0	1	Ponto A
0	0	0	-3	$\boxed{1}$	0	
0	1	2/5	2/5	0	1	

Obtenha a solução ótima do (P.L.) dado. Explique através de um gráfico a caminhada rumo ao ótimo, a partir do ponto dado pelo quadro acima.

EPC.11 Resolver pelo método das duas fases e dar uma interpretação geométrica

c) Max Z $= x_1 + 2x_2$

$$-x_1 + x_2 \geq 3$$
$$x_1 + x_2 \leq 27$$
$$2x_1 - x_2 \geq -3$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

EPC.12 Considere o problema

Min z(x) $= 14x - 18x_3 - 16x_4 - 80x_5$

$$-4.5x - 8.5x_3 + 6x_4 + 20x_5 \leq 6000$$

$$x + x_3 + 4x_4 + 40x_5 \leq 4000$$

x irrestrito, x3, x_4 , x5 ≥ 0

Complete o tableau

		X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
					1/4 -1/160	-1/8 9/320	

a) Determine a base e a solução básica correspondente
b) Encontre $(A^I)^{-1}$
c) Determine π e πb
d) Este quadro é ótimo? Comente.

EPC.13 Dado o problema de maximização representado na figura a seguir, onde o poliedro ABC representa o conjunto factível de um PL e ∇f é o gradiente da função objetivo no ponto (0,0):

a) Descreva o problema PL em forma analítica.

b) Quantas soluções básicas factíveis tem o problema? Escreva o conjunto de índices I correspondente a cada solução básica factível.

c) Mostre, caso haja, uma solução degenerada ao problema e o(s) conjunto(s) J correspondente (s).

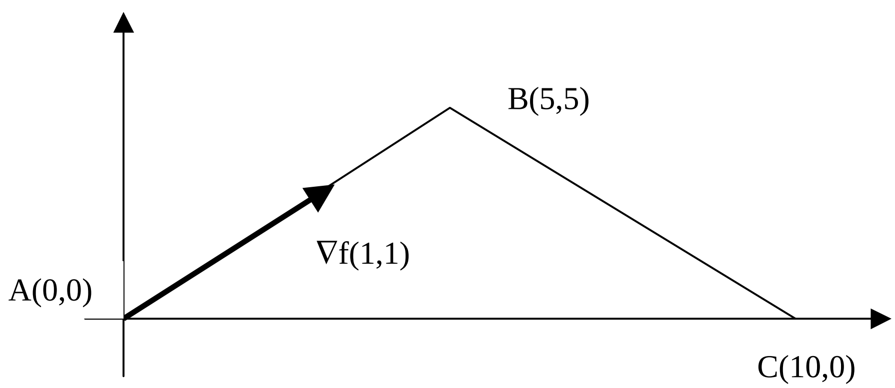
d) O problema tem alguma redundância? Qual? Explique.

e) Escreva o problema na forma preparada em relação a cada um dos conjuntos básicos factíveis.

f) Quantas soluções ótimas temo problema? Apresente o conjunto de soluções ótimas escrito em formar analítica. Este conjunto corresponde a que na figura?

g) Olhando para uma forma preparada do problema acima, como você determina
   - que ela é ótima
   - o valor das variáveis ótimas?
   - o valor da função objetivo?
   - sendo a forma ótima, se há soluções alternativas ótimas?

h) Quantas soluções básicas tem o problema? Mostre-as na figura. Este número é menor que o previsto teoricamente? Por que?



EPC.14 Resolva algebricamente o PL abaixo:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

EPC.15 Obtenha uma solução básica factível para o problema abaixo utilizando fase I do Método Simplex.

$$\text{MAX} \quad z = x_1$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 10 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 11 \\ & x_1 + x_2 - x_4 = 1 \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0 \,,\ i = 1,4$$

EPC.16 Coloque o problema na forma preparada em relação à base {2,4,1}, onde x_4 é uma variável de folga. A partir da análise do tableau obtido, diga qual a solução do problema e justifique.

$$\text{Max} \quad f = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 5 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

EPC.17 Resolva o PL utilizando a fase I se necessário:

$$\text{Max} \quad 3x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & x_1 + 3x_3 \leq 5 \\ & x_2 \leq 5 \\ & 3x_1 + 2x_3 \geq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 10 \end{aligned}$$

$$x \geq 0$$

a) Quantas soluções básicas ótimas o problema tem?
b) Alguma solução ótima é degenerada? Qual?
c) O problema tem alguma restrição redundante?Qual?
d) Qual a relação entre a redundância e a degenerescência, em caso de (b) e (c) serem afirmativas?
e) Faça uma interpretação geométrica.

EPC.18 a)Ache a solução ótima pelo método das duas fases para os PPL's abaixo:

I) MAX $f = x_1 + x_2$

s.a

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\
8x_1 - x_2 + x_4 &= 40 \\
5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 46
\end{aligned}
$$

$x_i \geq 0$, $i = 1,2,3,4$

II) MAX $f = x_1 + x_2$

s.a

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\
8x_1 - x_2 + x_4 &= 40 \\
- x_1 + 3x_2 + \quad + x_5 &= 24
\end{aligned}
$$

$x_i \geq 0$, $i = 1,2,3,4$

III) Max $f = 3x_1 + x_2$

s.a

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\geq 5 \\
-x_1 + 3x_2 &\leq 10 \\
2x_1 - x_2 &\leq 10 \\
|-x_1 + x_2| &\leq 5
\end{aligned}
$$

$x_i \geq 0$, $i = 1,2$

IV) Max $f = x_1 + x_2 + 0x_3$

s.a

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_3 &\geq 1 \\
x_1 - 3x_2 - x_3 &\geq 1 \\
x_1 - x_2 + 5x_3 &\geq 5 \\
x_1 + x_2 + x_3 &\leq 5
\end{aligned}
$$

$x_1 , x_2, x_3 \geq 0$

b) A partir dos PLL's da parte a):

1. Desenhe suas regiões de factibilidade
. PPL-I e II, coloque (x_3, x_4) e (x_3, x_4, x_5) na base e considere estas variáveis como de folga
PPL-IV, Pontos Extremos (0,0,1), (0,4,1), (1,4,0), (4,1,0), (0,1,4)

2. Se existir redundância nos problemas I, II, III e IV, comente as diferenças entre elas, se houver, em relação ao método simplex.

3. Sempre que ocorre degenerescência, também ocorre redundância?Por que? Sempre que ocorre redundância ocorre degenerescência? Por que? Em relação à primeira pergunta, se a resposta for sim, posso eliminar a linha redundante ao final da fase I (para a linha em que uma variável básica é de folga a nível zero)?

4 É possível, em alguma iteração do simplex, estarmos com uma solução ótima e,no caso de maximização, ainda estarmos com custos relativos positivos? Se a resposta for afirmativa, quando isto ocorre? Algum problema apresenta solução múltipla? Quais são estas soluções?

EPC.19 Resolver pelo método das duas fases:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & f = x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & -x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 + x_2 \leq 27 \\ & 2x_1 - x_2 \leq -3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

EPC.20 a) Resolva aplicando a Fase I:

$$\begin{array}{ll} \text{MIN } z(x) & = 4x_1 + 12x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

b) Encontrando o ótimo, verifique se existe soluções ótimas alternativas. Explique.

c) Resolva o mesmo problema mas maximizando $z(x) = x_1 + x_2$.

EPC.21 Considere o PL:

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & f = x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ \text{s.a} & -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ & x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 2 \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \end{array}$$

Após algumas iterações, obteve-se o quadro simplex abaixo:

0	0	0	1	0	2	f + 10
1	-1/3	0	1/3	0	-2/3	2/3
0	2	0	0	1	1	4
0	2/3	1	1/3	0	1/3	8/3

a) Determine a base e a solução básica correspondente ao quadro.
b) Encontre a matriz inversa $(A^I)^{-1}$.
c) Determine o vetor multiplicador.
d) Encontre p valor de πb. comente.
e) Este quadro é ótimo? Comente.
f) Há uma solução alternativa à apresentada no quadro, com o mesmo valor de f.o? Explique.

EPC.22 Uma indústria de móveis produz linhas de móveis e deseja saber qual a produção em cada linha que melhor utiliza seus recursos de mão de obra. São disponíveis mensalmente 24.000 horas-homem no setor de carpintaria e 18.000 horas-homem e no setor de acabamento. A primeira linha de móveis (colonial) consome 300 horas-homem por unidade produzida, tanto na seção de carpintaria como na de acabamento. A segunda linha de móveis (moderna) consome 400 horas-homem na carpintaria e 200 horas-homem no acabamento por unidade produzida. Estima-se a lucratividade da linha colonial em $ 1.050 por unidade e a lucratividade da linha moderna em $ 1.000 por unidade.

a) Formule matematicamente o problema.
b) Resolva usando o algoritmo SIMPLEX.
c) Sabendo que os salários de mercado são $1.2/hora (carpintaria) e $2.0/hora (acabamento) seria interessante contratar empregados na indústria?

EPC.23 Uma fábrica de papel recebeu três pedidos para a venda de rolos, quais sejam:

PEDIDO	LARGURA	COMPRIMENTO (m)
1	5	10.000
2	7	30.000
3	9	20.000

Os rolos são produzidos em duas larguras padrões: 10 e 20m.
Não existe limite de comprimento e o objetivo é minimizar as perdas.
Formule como P.P.L. e resolva.

EPC.24 Seja o seguinte P.L.

$$\text{MAX} \quad f = -x_1 + Cx_2$$

$$\text{s.a} \quad -x_1 + x_2 \leq 4$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 7$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

Determine os valores de C para as quais a solução é:

a) única
b) múltipla
c) tipo β

EPC.25 Uma certa fábrica produz 3 produtos (I, II e III), a partir da mesma matéria prima. A quantidade de matéria prima necessária, espaço para armazenamento, emprego de mão de obra e lucro, estão na tabela abaixo. A quantidade total de matéria prima disponível por dia é de 120kg, e a área total para armazenamento da produção diária é de 140 m^2. Por exigência governamental (decorrente de incentivos), um mínimo de300 homens-horas deve ser usado na produção diária. Toda a produção será escoada no final do dia.

a) Formule o problema;
b) Pela resolução de uma FASE I, mostre que não existe um plano diário de produção factível;
c) Se for possível adquirir uma quantidade adicional de matéria prima a custo de 6 u.m.p/kg, determine o melhor plano diário de produção.

	I	II	III
Matéria Prima (kg/peça)	2	2	1
Espaço para Armazenamento (m2 p/peça)	2	1	2
Mão de Obra (homens-hora p/peça)	2	3	3
Lucro (u.m.p./peça)	10	5	10