B. ANÁLISE E ÁLGEBRA LINEAR

EPC.1 - Dado Ax = b

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 10 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 8 & -1 & 2 \\ 20 & 26 & 2 & 40 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 34 \end{bmatrix}$$

tomando I = (6.1.3), fazer todas as operações necessárias para determinar $(A^I)^{-1}$.

EPC.2 - Considere que a fábrica do (EPC.1) opera fabricando mensalmente 100 chapas A. 1650 B e 125 C. Diga sem resolver o problema, sem aplicar o simplex se esta solução é a mais lucrativa.

EPC.3 - Elabore uma solução factível para o problema do petróleo (EPC.5). Há dificuldade em reconhecer se ela é básica?

EPC.4 - Coloque na forma padrão os dois seguintes problemas de PL.

a) Max $-2x_1-3x_2 + 5x_3$

$$\begin{aligned} \text{s.a.}\quad & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \geq 5 \\ & 2x_1 + x_3 \leq 4 \\ & x_2 + x_3 + x_4 = 6 \end{aligned}$$

$x_1 \leq 0$: $x_2 \geq 0$: $x_3 \geq 0$: $x_4 \geq 0$

b) Min $3x_1-3x_2 + 7x_3$

$$\begin{aligned} \text{s.a.}\quad & x_1 + x_2 - x_3 \leq 40 \\ & x_1 + 9x_2 - 7x_3 \geq 50 \\ & 5x_1 + 3x_2 = 20 \\ & |5x_1 + 8x_2| \leq 100 \end{aligned}$$

$x_1 \geq 0$: $x_2 \geq 0$: x_3 livre

EPC.5 - Esboce as regiões viáveis do conjunto ($\underline{x}$:A$\underline{x}$ ≤ b) onde A e $\underline{b}$ são dados abaixo: A região é vazia? É limitada?

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

EPC.6 - Mostre como resolver um sistema de m equações a m incógnitas. Evidencie a identificação dos seguintes casos:

a) Inconsistência do sistema;
b) Redundância das equações;
c) Solução única;
d) Explique como no caso c) pode se calcular a inversa da matriz. Exemplifique com o sistema abaixo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

EPC.7 - B é uma matriz regular dada pelas suas colunas. Sua inversa A é conhecida pelas suas linhas

$$B = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ B^1 & B^2 & B^3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} \leftarrow A_1 \rightarrow \\ \leftarrow A_2 \rightarrow \\ \leftarrow A_3 \rightarrow \end{bmatrix}$$

Em termos de A_1, A_2 e A_3, dê as inversas de C e D, definidas abaixo

$$C = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ B^1 & B^2 & \alpha B^3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ B^1 + B^2 & B^2 & B^3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$$

EPC.8 - Como você mostraria, usando técnicas de PL, que

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow 8x_1 + 3x_2 \leq 23$$

EPC.9 - É possível resolver o problema abaixo com técnicas de PL? Explique.

Maximizar $f = -x_1 + 2x_2 + 3x_3$

Sujeito a

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$$
$$|-2x_1 + 3x_3| \geq 12$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 2$$

$\underline{x} > 0$

EPC.10 - Para a forma padrão da PL, defina clara e sucintamente:

- solução básica
- solução factível
- solução básica
- solução básica factível
- solução ótima
- solução básica ótima
- solução tipo β (beta)

Indicar as condições para que uma solução factível não básica seja ótima.

EPC.11 - Dado:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & f = c\,x \\ \text{s.a.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Definir sucintamente:

. Base

. Forma Preparada

. Vetor Multiplicador

EPC.12 - Coloque os problemas abaixo na forma padrão de um PL e determine suas soluções através de interpretação geométrica.

a) Max $f = -3x_1 + 2x_2$

s.a. $x_1 + 2x_2 \geq 4$

$|x_1 + x_2 \; 2| \leq 3$

$x_1 \leq 0 \;\; x_2 \geq 0$

b) Max $z = -3x_1 + 2x_2$

s.a. $x_1 + 2x_2 \geq 4$

$x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0 \;\; x_2$ qualquer

EPC.13 - Seja o problema P.

$$\text{Max } f = (3 \;\; 2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)\, x$$

$$P: \quad \text{s.a.} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x \geq 0$$

a) Coloque o problema P na forma preparada da relação a $I = (1, 4, 2)$.

b) Identifique uma solução tipo β para P. Escreva suas equações, evidenciando a tendência para infinito.

EPC.14 - Seja o PL na forma preparada.

$$\hat{c}^J x_J = Z(\max) - Z_o$$

$$x_I + \hat{A}^J x_J = b$$

$$x_I \geq 0, \quad x_J \geq 0$$

Seja i a primeira componente da base 1, i.e.. $1 = (i, \bar{I})$.

Qual a condição sobre $\hat{A}^J$, para que j possa substituir i na base.

Justifique a resposta.

EPC.15 - Uma função é super-aditiva se:

$$g(Y_1 + Y_2) \geq g(Y_1) + g(Y_2)$$

Mostre que o valor ótimo de f, suposto tipo α, em:

$$\begin{array}{ll} \text{Max.} & f = c\,x \\ \text{s.a.} & A\,x = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

é uma função super-aditiva de b.

EPC.16 - Uma função é super-aditiva se:

$$g(Y_1 + Y_2) \leq g(Y_1) + g(Y_2)$$

Mostre que o valor ótimo de f, suposto tipo α, em:

$$\begin{array}{ll} \text{Max.} & f = c\,x \\ \text{s.a.} & A\,x = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

é uma função sub-aditiva de c.

EPC.17 - Para os casos seguintes, onde é dada uma base B = [$\underline{e}_1$ $\underline{e}_2$ $\underline{e}_3$ $\underline{e}_4$], indique os vetores que a compõem que podem ceder lugar ao vetor $\underline{d}$ de forma que se continue a ter uma base. Explique.

a) $\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{d} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

EPC.18 - Considere o sistema de equações

$$2x_1 + x_2 + 10x_3 + 7x_4 + Ax_5 = 19$$

$$x_1 + x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 13$$

$$5x_1 + 2x_2 + 24x_3 + 17x_4 + 15x_5 = 44$$

$$2x_1 + 3x_2 + 14x_3 + 9x_4 + 17x_5 = 35$$

$$+ 4x_2 + 6x_3 + x_4 + 20x_5 = 40$$

Coloque-o em forma de quadro. Após dois pivoteamentos, o primeiro em torno do elemento (1.2), o segundo em torno de (2.1), chega-se a:

0	1	2	1	5	7
1	0	4	3	1	6
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	2
0	0	-2	-3	0	12

Comente redundâncias e incompatibilidades nos casos: (a) $\underline{x} \geq 0$ e (b) $\underline{x}$ livre. Qual o valor de A? Explique.

EPC.19 - Coloque o problema abaixo na forma padrão:

$$\text{Max} \quad f = 2x_1 + x_3 + 5x_5$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & 2x_1 + x_3 + 6x_4 + x_5 \leq 13 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 \geq 20 \\ & x_3 + x_4 + x_5 = 15 \\ & |2x_1 + x_3 + x_5| \leq 10 \\ & x_1 \geq 0 \,,\ x_2 \leq 0 \,,\ x_3 \ \text{irrestrito},\ x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

EPC.20 - Prove que o conjunto

$$S = \{x \in R^n \mid Ax = b \ ,\ x \geq 0\}$$

onde $A \in R^{mxn}$ e $b \in R^m$ é convexo.

EPC.21 - Resolva por inspeção e justifique

$$\text{Max} \quad f = 8x_1 \quad + 7x_2 \quad -4x_3 \quad -2x_4$$

$$0 \le x_1 \le 3 \quad , \quad 0 \le x_2 \le 5 \quad , \quad 0 \le x_3 \le 20 \quad , \quad 0 \le x_4 \le 2$$