Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DT-FEEC-UNICAMP

Teoria de Grafos

1 Conceitos, Definições, Notações

Def. 1: Sejam N = conjunto de vértices e A = conjunto de arestas ligando os vértices $v \in N$. Define-se grafos como sendo $G(N, A)$.

Obs.: vértice = nó; aresta = ramo (não-orientado) ou arco (orientado)

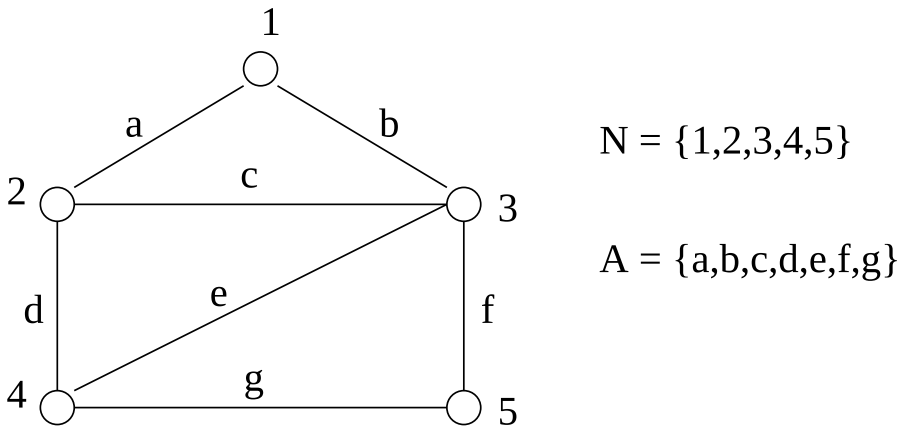

Figure 1: Exemplo de um grafo não orientado

Def. 2: Grafo orientado ou direcionado - quando as arestas têm orientação.

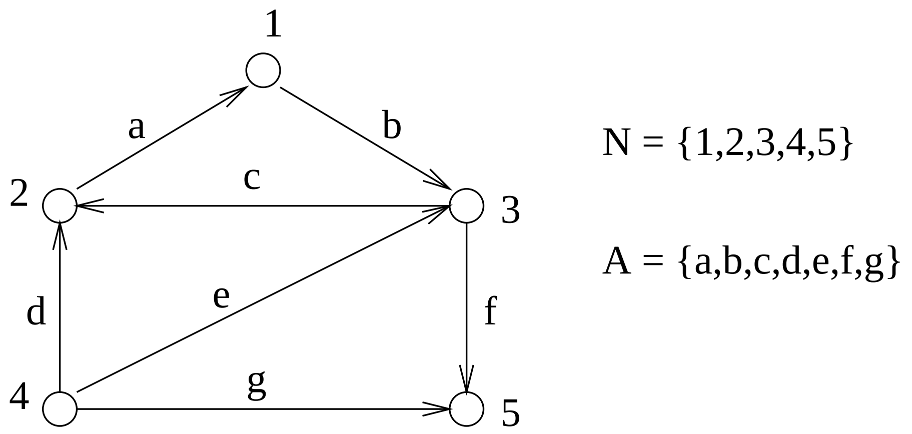

Figure 2: Exemplo de um grafo orientado

Def. 3: Grau de um vértice é o número de arestas que incidem nele (no caso orientado, arcos que entram mais que saem).

Def. 4: Cadeia é uma sequência consecutiva de arestas em que todos os nós visitados são distintos. Exemplo: nas figuras 1 ou 2 - (a, b, f, g).

Def. 5: Caminho é um caso particular de cadeia onde os arcos têm os mesmos sentidos. Exemplo na figura 2 - (d, a, b, f).

Def. 6: Um grafo é dito ser conexo se sempre existe uma cadeia entre qualquer par de vértices.

Def. 7: Ciclo ou laço é uma cadeia fechada (termina no nó que iniciou). Exemplo na figuar 1 - (a, b, f, g, d).

Def. 8: Circuito é um caminho fechado. Exemplo na figura 2 - (a, b, c).

Def. 9: Comprimento de um caminho é a soma dos pesos das arestas do caminho.

Def. 10: Dois vértices v_i e v_j são vizinhos ou adjacentes se existe uma aresta que liga v_i a v_j.

Def. 11: v_j é dito ser sucessor de v_i se existe um arco ligando v_i a v_j e neste caso, v_i é dito ser antecessor de v_j.

Notação: $\Gamma^+(v)$ = conjunto de todos os sucessores de v e $\Gamma^-(v)$ = conjunto de todos os antecessores de v. Exemplo na figura 2 - $\Gamma^+(3) = \{2, 5\}$; $\Gamma^-(3) = \{1, 4\}$

Def. 12: Fecho transitivo direto do vértice v é o conjunto de vértices que podem ser alcançados por sucessivas relações de vizinhança a partir de v (notação: $\Gamma^{+n}(v)$, onde n indica o nível do fecho) e fecho transitivo indireto é o conjunto de vértices que podem ser alcançados por relações de vizinhanças antecessoras (notação: $\Gamma^{-n}(v)$). Exemplos: na figura 2 - $\hat{\Gamma}^{+1}(1) = \Gamma^+(1) = \{3\}$, $\Gamma^{+2}(1) = \{2, 3, 5\}$, $\Gamma^{-1}(1) = \Gamma^-(1) = \{2\}$, $\Gamma^{-2}(1) = \{2, 3, 4\}$.

Def. 13: $G_s(N_s, A_s)$ é um sub-grafo de $G(N, A)$ se $N_s \subseteq N$

e $A_s \subseteq A$ tal que se $(i,j) \in A_s \;\Rightarrow\; i,j \in N_s$.

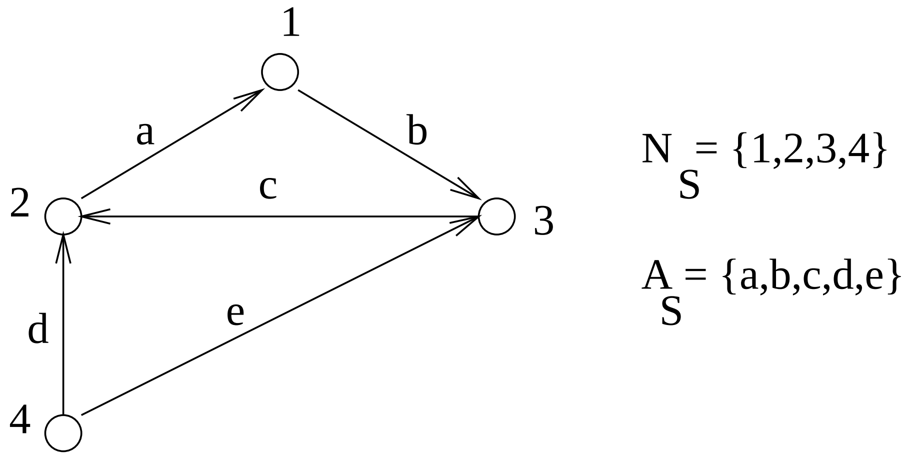

Figure 3: Exemplo de um sub-grafo (do grafo da figura 2)

Def. 14: Árvore geradora é um sub-grafo conexo de $G(N, A)$ contendo todos os nós N mas sem nenhum ciclo (portanto, tem $n - 1$ arestas, onde $n =$ cardinalidade de $\{N\}$).

Def. 15: Aresta ou ramo de ligação (arco de ligação) são as arestas (arcos) que não pertencem à árvore (tem $(m - (n - 1))$ arestas, onde $m =$ cardinalidade de $\{A\}$).

Def. 16: Corte de um grafo é um conjunto de arestas (ou arcos) tal que a sua remoção deixa 2 sub-grafos conexos, não conexos entre si e a remoção de todos menos uma ainda deixa o grafo conexo.

Def. 17: Corte fundamental é o corte definido por uma única aresta da árvore e arestas de ligação (tem $(n - 1)$ cortes fundamentais, uma para cada aresta da árvore).

Def. 18: Ciclo ou laço fundamental é um ciclo ou laço constituído de uma única aresta ou arco de ligação e arestas ou arcos da árvore (tem $(m-(n-1))$ ciclos fundamentais). Exemplos: na figura 4 - $c1 = \{a, c, d\}$, $c2 = \{a, e, b\}$, $c3 = \{b, c, f\}$, $l1 = \{a, d, e\}$, $l2 = \{b, e, f\}$, $l3 = \{c, f, d\}$.

Obs.: Em grafos orientados, o sentido do laço fundamental deve coincidir com o do arco de ligação.

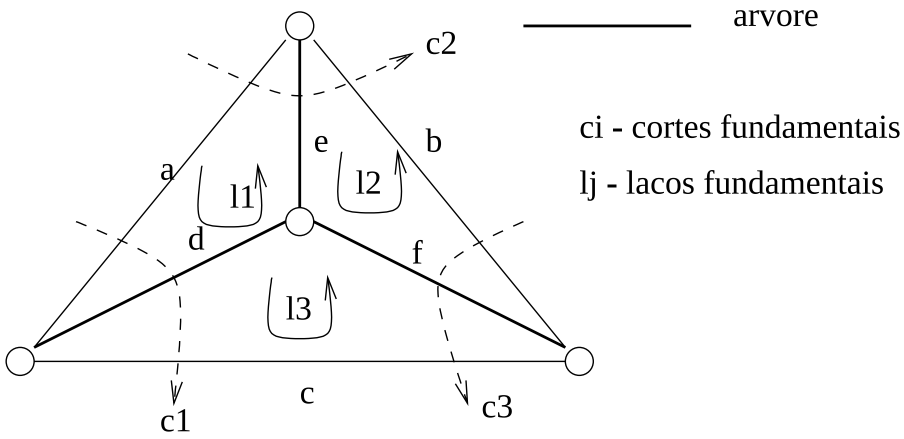

Figure 4: Exemplo de árvore, cortes fundamentais e ciclos fundamentais

Def. 19: Matriz de adjacência $A_d = \{a_{ij}\} \in \mathbf{R^{nxn}}$ é tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & se \ \exists \ aresta \ (i,j) \\ 0 & se \ c.c. \end{cases}$$

Exemplo: Na figura 5, a matriz de adjacência é dada por (considerando que não tem arcos (i,i)):

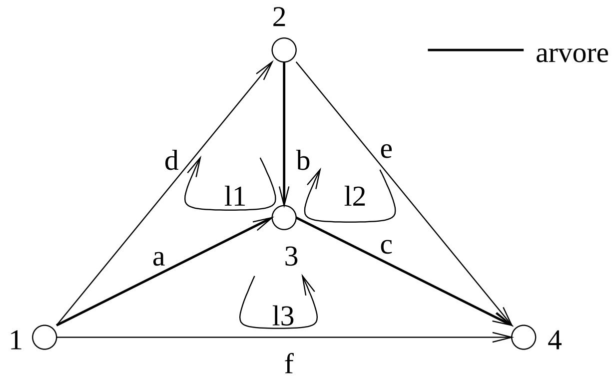

Figure 5: Grafo exemplo

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Def. 20: Matriz de incidência é uma matriz $A = \{a_{ij}\} \in \mathbf{R^{(n-1)xm}}$ onde n é o número de vértices, m é número de arcos, sendo cada linha um nó e cada coluna um arco, tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & se\ arco\ (i,j)\ incide\ no\ no' \text{ j} \\ +1 & se\ arco\ (i,j)\ sai\ do\ no' \text{ i} \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Obs.: A matriz é $(n-1)xm$ pois a n-ésima linha é linearmente dependente das anteriores.

Exemplo: Na figura 5, a matriz de incidência é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Def. 21: Matriz das malhas é uma matriz $M = \{m_{ij}\} \in \mathbf{R^{(m-(n-1))xm}}$, onde $(m-(n-1))$ são as malhas independentes, m é número de arcos, sendo cada linha uma malha e cada coluna um arco, tal que:

$$m_{ij} = \begin{cases} +1 & \textit{se arco } (i,j) \textit{ tem sentido coincidente da malha} \\ -1 & \textit{se arco } (i,j) \textit{ tem sentido inverso da malha} \\ 0 & \textit{c.c.} \end{cases}$$

Exemplo: Na figura 5, a matriz das malhas é dada por:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Def. 22: Matriz de cortes fundamentais é uma matriz $Q = \{q_{ij}\} \in \mathbf{R^{(n-1)xm}}$, onde cada linha é um arco da árvore, cada coluna é um arco do grafo, tal que:

$$q_{ij} = \begin{cases} +1 & \textit{se arco } (i,j) \textit{ tem sentido igual do arco da arvore} \\ -1 & \textit{se arco } (i,j) \textit{ tem sentido inverso do arco da arvore} \\ 0 & \textit{c.c.} \end{cases}$$

Exemplo: Na figura 5, a matriz de cortes fundamentais é dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Def. 23: Matriz de laços fundamentais é uma matriz $B = \{b_{ij}\} \in \mathbf{R^{(m-(n-1))xm}}$, onde cada linha é um arco de ligação, cada coluna é um arco do grafo, tal que:

$$q_{ij} = \begin{cases} +1 & se\ arco\ (i,j)\ tem\ sentido\ igual\ do\ arco\ de\ ligacao \\ -1 & se\ arco\ (i,j)\ tem\ sentido\ inverso\ do\ arco\ de\ ligacao \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Exemplo: Na figura 5, a matriz de laços fundamentais é dada por:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 Caminhos mínimos

Problema: dado $G(N, A)$, encontrar o caminho mais curto (de menor comprimento) entre vértices $o \in N$ e $d \in N$.

Formulação matemática:

$$
\begin{cases}
Min \quad z = \Sigma_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\
s.a \quad \Sigma_{(i,j) \in A} x_{ij} - \Sigma_{(k,i) \in A} x_{ki} = \begin{cases} +1 & se \quad i = o \\ -1 & se \quad i = d \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases} \\
\qquad x_{ij} \in \{0, 1\} \; \forall (i, j) \in A
\end{cases}
$$

Principais algoritmos:

- Dijkstra
- Ford-Moore-Bellman

2.1 Algoritmo de Dijkstra

F	lista dos nós fechados
B	lista dos nós abertos
t	contador de iterações
r	vértice a ser fechado na iteração t
V	lista dos nós vizinhos candidatos a entrar para F
d_{ij}^t	distância entre os vértices v_i e v_j na iteração t (∞ se não existe)
$\Gamma^+(r)$	conjunto de sucessores do vértice r
$rot(i)$	vértice que deu origem ao último d_{ij}^t

Algoritmo:

- Ler dados do grafo (m, n, N, A)
- $d_{11}^0 = 0$, $d_{1i}^0 = \infty \ \forall i \in \{N - \{1\}\}$
- $V = \{1\}$, $B = \{N\}$, $F = \emptyset$
- $rot(i) = 0 \ \forall i \in N$
- Para $t = 1$ até N faça:
- $r \quad v_i \ | \ min_{v_i \in B}\{d_{1i}\}$
- $F \quad F \cup \{r\}$
- $B \quad B - \{r\}$
- $V \quad V - \{r\}$
- $V \quad V \cap \Gamma^+(r)$

- Para $i \in V$ faça:
- $p \quad min\{d_{1i}^{t-1}, (d_{1r}^{t-1} + d_{ri})\}$
- Se $p < d_{1i}^{t-1}$:
- $d_{1i}^{t} \quad p$
- $rot(i) \quad r$
- Fim se
- Fim
- Fim

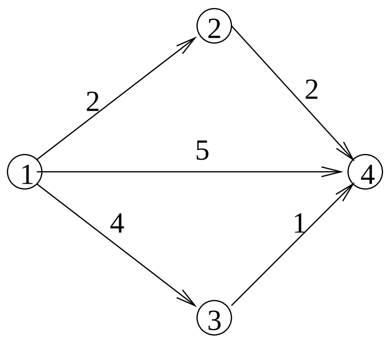

Figure 6: Grafo Exemplo para Algoritmo de Dijkstra

Na figura 6:

1. $d_{11}^0 = 0$, $d_{12}^0 = d_{13}^0 = d_{14}^0 = \infty$
2. $V = \{1\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $F = \emptyset$
3. $rot(1) = rot(2) = rot(3) = rot(4) = 0$

4. $t = 1$:

5. $\quad r = 1$

6. $\quad F = \{1\}$

7. $\quad B = \{2, 3, 4\}$

8. $\quad V = \{2, 3, 4\}$

9. $\quad d^1_{12} = 2;\ d^1_{13} = 4;\ d^1_{14} = 5$

10. $\quad rot(2) = 1;\ rot(3) = 1;\ rot(4) = 1$

11. $t = 2$:

12. $\quad r = 2$

13. $\quad F = \{1, 2\}$

14. $\quad B = \{3, 4\}$

15. $\quad V = \{3, 4\}$

16. $\quad d^2_{13} = 4;\ d^2_{14} = 4$

17. $\quad rot(3) = 1;\ rot(4) = 2$

18. $t = 3$:

19. $\quad r = 4$

20. $\quad F = \{1, 2, 4\}$

21. $\quad B = \{3\}$

22. $\quad V = \{3\}$

23. $\quad d_{13}^3 = 4$

24. $\quad rot(3) = 1$

25. $t = 4$:

26. $\quad r = 3$

27. $\quad F = \{1, 2, 4, 3\}$

28. $\quad B = \emptyset$

29. $\quad V = \emptyset$

30. Fim

2.2 Algoritmo de Ford-Moore-Bellman

$l(i,j)$	comprimento do arco (i,j)
k	contador de iterações
l_j^k	menor comprimento da origem s ao nó j usando no máximo k arcos
$rot(i)$	vértice que deu origem ao último l_j^k

Algoritmo:

1. Ler dados do grafo (m, n, N, A, l_{ij})
2. $l_s^0 = 0$, $l_j^0 = \infty\ \forall i \in \{N - \{s\}\}$
3. $k = 1$
4. $rot(i) = 0\ \forall i \in N$

5. Enquanto $l_j^{k-1} \neq l_j^k, \forall j \in N$ faça:

6. $\quad l_j^{k+1} \quad\quad min\left\{l_j^k,\ min_i[l_i^k + l(i,j)]\right\}\ i \neq j, s;\ j = 1, ..., n$

7. $\quad$ Atualizar $rot(j)$

8. $\quad k \quad\quad k + 1$

9. Fim Enquanto

Considerando o grafo da figura 6:

1. $l_1^0 = 0,\ l_2^0 = l_3^0 = l_4^0 = \infty$

2. $rot(1) = rot(2) = rot(3) = rot(4) = 0$

3. $k = 1$:

4. $\quad l_2^1 = 2,\ rot(2) = 1$

5. $\quad l_3^1 = 4,\ rot(3) = 1$

6. $\quad l_4^1 = 5,\ rot(4) = 1$

7. $k = 2$:

8. $\quad l_2^2 = 2,\ rot(2) = 1$

9. $\quad l_3^2 = 4,\ rot(3) = 1$

10. $\quad l_4^2 = min\{5, min\{l_2^1 + 2 = 4, l_3^1 + 1 = 5\}\} = 4,\ rot(4) = 2$

11. $k = 3$:

12. $\quad l_2^3 = 2 = l_2^2,\ rot(2) = 1$

13. $\quad l_3^3 = 4 = l_3^2,\ rot(3) = 1$

14. $\quad l_4^3 = 4 = l_4^2,\ rot(4) = 2$

15. Fim

3 Problemas de árvore geradora mínima

Problema: Determinar árvore geradora (portanto, que contém todos os nós do grafo), minimizando: a) aresta máxima da árvore; b) soma das arestas da árvore.

Formulação matemática:

- T = conjunto de todas as árvores do grafo.
- t_k = k-ésima árvore, $t_k \subset T$
- $t_k = \{v_j\},\ j = 1, ..., n-1$
- c_{v_i} = custo associado ao arco v_i
- P_{v_i} = peso associado ao arco v_i
- $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$

$$\begin{cases} Min_{t_k \in T} & z(t_k) \\ s.a & z(t_k) = \alpha * max_{v_i \in t_k}\{P_{v_i}\} + \beta * \Sigma_{v_i \in t_k} c_{v_i} \end{cases}$$

Principais algoritmos:

- Prim
- Kruskal
- Borŭvka

3.1 Algoritmo de Prim

$S \subseteq A$	conjunto dos arcos da árvore fechados
$T \subseteq N$	conjunto dos nós da árvore fechados
$V \subseteq N$	conjunto dos nós não visitados
d_{ij}	custo associado à aresta (i, j)

Algoritmo:

1. Ler dados do grafo (m, n, N, A, d_{ij})
2. Escolher um vértice $i \in N$, $S \qquad \emptyset$
3. $T \qquad \{i\}$, $V \qquad N - \{i\}$
4. Enquanto $T \neq N$, $\forall j \in T$ faça:
5. Encontrar menor aresta $(j, k) \in A$, tal que $j \in T,\ k \in V$
6. $T \qquad T \cup \{k\}$
7. $V \qquad V - \{k\}$
8. $S \qquad S \cup (j, k)$
9. Fim Enquanto

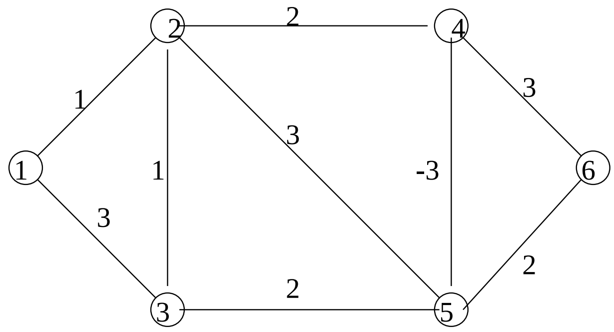

Figure 7: Grafo Exemplo para Algoritmos de Árvore Geradora Mínima

Na figura 7:

1. Ler $G(N, A)$, d_{ij}, $\forall (i, j) \in A$
2. $T = \{1\}$, $V = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $S = \emptyset$
3. iteração 1:
4. Escolher $min\{d_{12}, d_{13}\} \;\Rightarrow\; (1, 2)$
5. $T = \{1, 2\}$
6. $V = \{3, 4, 5, 6\}$
7. $S = \{(1, 2)\}$
8. iteração 2:
9. Escolher $min\{d_{13}, d_{23}, d_{24}, d_{25}\} \;\Rightarrow\; (2, 3)$
10. $T = \{1, 2, 3\}$
11. $V = \{4, 5, 6\}$
12. $S = \{(1, 2), (2, 3)\}$

13. iteração 3:

14. Escolher $min\{d_{24}, d_{25}, d_{35}\} \;\Rightarrow\; (2,4)$

15. $T = \{1,2,3,4\}$

16. $V = \{5,6\}$

17. $S = \{(1,2),(2,3),(2,4)\}$

18. iteração 4:

19. Escolher $min\{d_{25}, d_{35}, d_{45}, d_{46}\} \;\Rightarrow\; (4,5)$

20. $T = \{1,2,3,4,5\}$

21. $V = \{6\}$

22. $S = \{(1,2),(2,3),(2,4),(4,5)\}$

23. iteração 5:

24. Escolher $min\{d_{46}, d_{56}\} \;\Rightarrow\; (5,6)$

25. $T = \{1,2,3,4,5,6\}$

26. $V = \emptyset$

27. $S = \{(1,2),(2,3),(2,4),(4,5),(5,6)\}$

28. Fim

3.2 Algoritmo de Kruskal

$S \subseteq A$	conjunto dos arcos da árvore fechados
d_{ij}	custo associado à aresta (i, j)
T	árvore geradora

Algoritmo:

1. Ler dados do grafo (m, n, N, A, d_{ij})
2. Ordenar as arestas de $G(N, A)$ em ordem não decrescente de d_{ij} num vetor $h = \{h_i\}, i = 1, 2, ..., m$
3. $S \quad \{h_1\}$, $i = 2$
4. Enquanto $T \neq N$, escolher h_i e faça:
5. Se $S \cup h_i$ não formar ciclo:
6. $S \quad S \cup h_i$
7. $i \quad i + 1$
8. Caso contrário:
9. $i \quad i + 1$
10. Fim se
11. Fim Enquanto

Na figura 7:

1. Ler $G(N, A)$, $d_{ij}, \ \forall (i,j) \in A$
2. $h = \{(4,5), (1,2), (2,3), (2,4), (3,5), (5,6), (1,3),$
   $(2,5), (4,6)\}$
3. $S = \{(4,5)\}$, $i = 2$
4. iteração 1:
5. $\quad (1,2)$ não forma ciclo:
6. $\quad S = \{(4,5), (1,2)\}$
7. $\quad i = 3$
8. iteração 2:
9. $\quad (2,3)$ não forma ciclo:
10. $\quad S = \{(4,5), (1,2), (2,3)\}$
11. $\quad i = 4$
12. iteração 3:
13. $\quad (2,4)$ não forma ciclo:
14. $\quad S = \{(4,5), (1,2), (2,3), (2,4)\}$
15. $\quad i = 5$
16. iteração 4:
17. $\quad (3,5)$ forma ciclo:
18. $\quad i = 6$

19. iteração 5:
20. $\quad (5,6)$ não forma ciclo:
21. $\quad S = \{(4,5),(1,2),(2,3),(2,4),(5,6)\}$
22. $T = N \ \Rightarrow$ Fim

3.3 Algoritmo de Bor$\breve{u}$vka

T_j	j-ésima sub-árvore do grafo $G(N,A)$
$F_i = \{T_j\}$	floresta na iteração i
d_{ij}	custo associado à aresta (i,j)

Algoritmo:

1. Ler dados do grafo (m, n, N, A, d_{ij})
2. $F_0 = \{T_j\}, T_j = \{j\}, j = 1,2,...,n$ (todos os nós isolados)
3. $i = 1$
4. Enquanto T_i não for árvore geradora, faça para cada $T_i \in F_i$:
5. $\quad$ Determinar a menor aresta (x_α, y_α) em T_i com $x_\alpha \in T_i$ e $y_\alpha \in T_k,\ k \neq i$
6. $\qquad T_i \quad T_i \cup T_k$
7. $\qquad F_{i+1} \quad F_i - T_k$
8. $\qquad i \quad i+1$
9. Fim Enquanto

Na figura 7:

1. Ler $G(N, A)$, $d_{ij}, \ \forall (i, j) \in A$
2. $F_0 = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$, $T_i = \{i\}, \ i = 1, 2, ..., 6$
3. $i = 1$
4. iteração 1:
5. $\quad (1, 2)$ é $min\{d_{12}, d_{13}\}$
6. $\quad F_{i+1} = \{T_1, T_3, T_4, T_5, T_6\}, \ T_1 = \{1, 2\}$
7. $\quad i = 2$
8. iteração 2:
9. $\quad (2, 3)$ é $min\{d_{31}, d_{32}, d_{35}\}$
10. $\quad F_{i+1} = \{T_3, T_4, T_5, T_6\}, \ T_3 = \{1, 2, 3\}$
11. $\quad i = 3$
12. iteração 3:
13. $\quad (4, 5)$ é $min\{d_{42}, d_{45}, d_{46}\}$
14. $\quad F_{i+1} = \{T_3, T_4, T_6\}, \ T_4 = \{4, 5\}$
15. $\quad i = 4$
16. iteração 4:
17. $\quad (5, 6)$ é $min\{d_{64}, d_{65}\}$

18. $F_{i+1} = \{T_3, T_6\},\ T_6 = \{4, 5, 6\}$

19. $i = 5$

20. iteração 5:

21. $(3, 5)$é $min\{d_{24}, d_{25}, d_{35}\}$

22. $F_{i+1} = \{T_3\},\ T_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

23. $T_3 = N \ \Rightarrow$ Fim

4 Outros problemas

4.1 Problemas de emparelhamento

São problemas em que se procura unir (ligar, casar) elementos de um conjunto S_1 com de um outro conjunto S_2, otimizando algum critério.

Podemos destacar:

- Emparelhamento estável: quando não existe um par de agentes unidos onde ambos preferem outros parceiros e/ou que não existam situações em que ocorram violações de restrições.

  Exemplo:

Pessoa	**Lista de preferência**
1	2-3-4-5-6
2	3-4-5-6-1
3	4-5-6-1-2
4	5-6-1-2-3
5	6-1-2-3-4
6	1-2-3-4-5

Emparelhamento estável: (1-2), (3-4), (5-6)

Emparelhamento instável: (1-4), (2-5), (3-6)

- Casamento (monogâmico):

  Emparelhar H homens e M mulheres, procurando maximizar as satisfações (preferências).

  Formulação matemática:

  $S_1(N_1, A_1)$ - grafo com $n1$ nós
  $S_2(N_2, A_2)$ - grafo com $n2$ nós
  $N_1 \cap N_2 = \emptyset$

$$
\begin{array}{ll}
Min & z = \Sigma_{i=1}^{n1} \Sigma_{j=1}^{n2} c_{ij}x_{ij} \\
s.a & \Sigma_{j=1}^{n2} x_{ij} = 1, \ i = 1, 2, ..., n1 \in S_1 \\
 & \Sigma_{i=1}^{n1} x_{ij} = 1, \ j = 1, 2, ..., n2 \in S_2 \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\}, \ \forall (i, j) \in A_1 \cup A_2
\end{array}
$$

- Alocação interna (casamento poligâmico):

  Alocar n agentes com outros m elementos, cada um a 1 ou mais do outro conjunto.

  Exemplo: n médicos a m hospitais, alocação didática

4.2 Árvore de Steiner

Dados $G(N, A)$ e $X \subseteq N$, encontrar $B \subseteq A$ tal que ligue todos os nós $x_i \in X$ em grafo conexo, minimizando $\Sigma_{j \in B} c_j$, onde c_j é o comprimento da aresta $j \in B$.

Obs.: 1) Se $\mid X \mid = 2 \ \rightarrow$ caminho mínimo
2) Se $\mid X \mid = N \ \rightarrow$ árv. ger. mínima

Aplicações:

- Projeto de circuitos eletrônicos
- Redes de comunicações

- Distribuição de gás e óleo
- Projeto de instalações elétricas
- etc.

Formulação com custo fixo e multiproduto:

b_{ij}	custo fixo de instalação do arco (i,j)
y_{ij}^k	fluxo do produto k no arco (i,j) em %
c_{ij}^k	custo variável associado à transmissão do produto k no arco (i,j) por unidade de y_{ij}^k
$k \in K$	k-ésimo par origem-destino (o^k, d^k)

$$
\begin{array}{ll}
Min & z = \Sigma_{(i,j)\in A}\{b_{ij}x_{ij} + \Sigma_{k\in K}\, c_{ij}^k y_{ij}^k\} \\
sa & x_{ij} \geq y_{ij}^k + y_{ji}^k,\ \forall (i,j) \in A, \forall k \in K \\
& \Sigma_{(o^k,j)\in A}\, y_{o^k,j}^k = 1,\ \forall k \in K \\
& \Sigma_{(i,d^k)\in A}\, y_{i,d^k}^k = 1,\ \forall k \in K \\
& \Sigma_{(p,j)\in A}\, y_{pj}^k - \Sigma_{(i,p)\in A}\, y_{ip}^k = 0,\ \forall k \in K, \\
& \qquad\qquad \forall p \in \{N - \{o^k\} - \{d^k\}\} \\
& x_{ij} \in \{0,1\}, y_{ij}^k \in [0,1],\ \forall (i,j) \in A,\ \forall k \in K
\end{array}
$$

Solução via programação inteira mista ou via fluxo em redes.

FEEC, 13 de outubro de 2004.

Akebo Yamakami
DT-FEEC-UNICAMP
2s/2004