

Teoria Fuzzy e Aplicações

1 Introdução

- Representação das incertezas:
 - Probabilidade: estatísticas
 - Teoria Fuzzy: imprecisões, informações vagas, ambiguidades, subjetividades
- Linguagem natural (variáveis linguísticas): subjetividade
 - Uma garrafa de 1 litro com 1 litro de água está cheia; se tirar uma gota ainda estará cheia? Se tirar duas gotas, ainda estará cheia?
 - Uma pessoa de 1.75m é alta?
 - Quando podemos dizer que a temperatura está baixa?
 - etc.
- Como manipular tolerância a imprecisões?

2 Histórico

- Bertrand Russel:
 - Paradoxo: Um cretense diz que "todo cretense mente" (Whitehead, A.N.; Russell, B. - Principia Mathematica, University of Cambridge Press, v. I, 1910).
 - Lógica multivariada: início da lógica "vaga" (Russell, B. - Vagueness, Australian Journal of Philosophy, v. 1, 1923).
- Lukasiewicz, J. - Philosophical remarks on many-valued systems of propositional logic, Selected works in Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 1920. *(min, max)*
- Max Black - Vagueness: an exercise in logical analysis, Philosophy of science, v. 4, 1937. *"fuzzy" de curva*
- Lotfi Zadeh introduziu a expressão **fuzzy** em 1965 e formalizou a teoria de conjuntos fuzzy e operadores fuzzy (Zadeh, L.A. - Fuzzy Sets, Information and Control, v. 8, 1965) - recebeu medalha de Honra da IEEE em 1995 pelos seus trabalhos nesta área.
- Ebrahim H. Mamdani iniciou *fuzzy engineering* em 1977 aplicando *fuzzy set theory* em um problema de controle (Mamdani, E.H. - Application of Fuzzy Logic to Approximate Reasoning Using Linguistic Synthesis, IEEE Transactions on Computers, v. 26, n. 12, 1977).

Ex: O barbeiro ~~se~~ ~~barbeia~~ ~~o~~ ~~homem~~ ~~que~~ ~~barbeia~~
 É o barbeiro?

$$\left. \begin{array}{l} \text{Se } \bar{b} \text{ barbeia } x \text{ barbeia } y \text{ então } \bar{b} \text{ } \\ \text{Se } b \text{ barbeia } x \text{ barbeia } y \text{ então } b \text{ } \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Grupos de vocab.} \\ T(b) = T(\bar{b}) \\ T(b) + T(\bar{b}) = 1 \\ \dots \end{array}$$

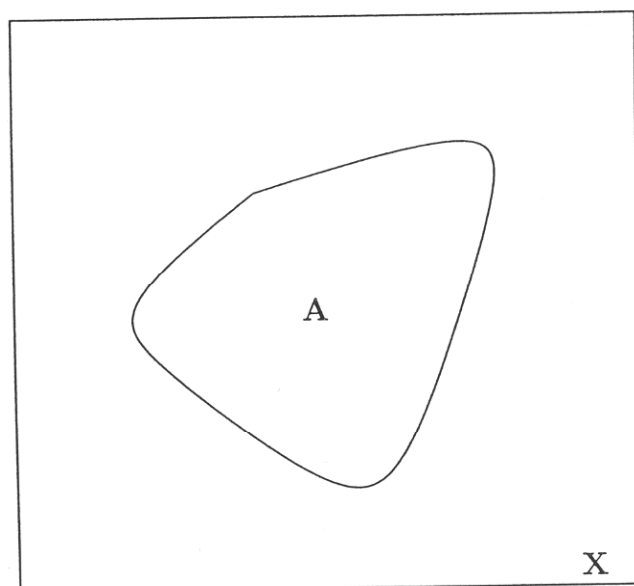
3 Conceitos Básicos

- Lógica Aristotélica: A ou $not-A$ ($x \in A$ ou $x \notin A$)

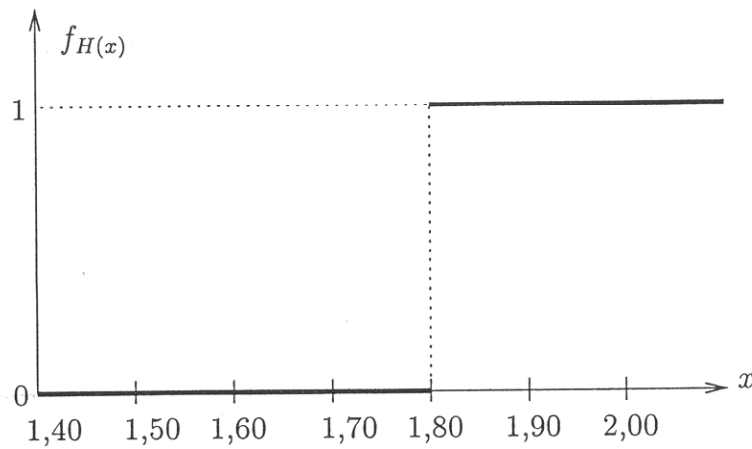
Exemplos: conjunto dos número pares, ímpares, etc.

Função Característica:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$



Conjunto dos homens altos $H = \{x \in \mathcal{R} \mid x \geq 1,80\}$



Alguém com 1,79m não pode ser considerado alto?

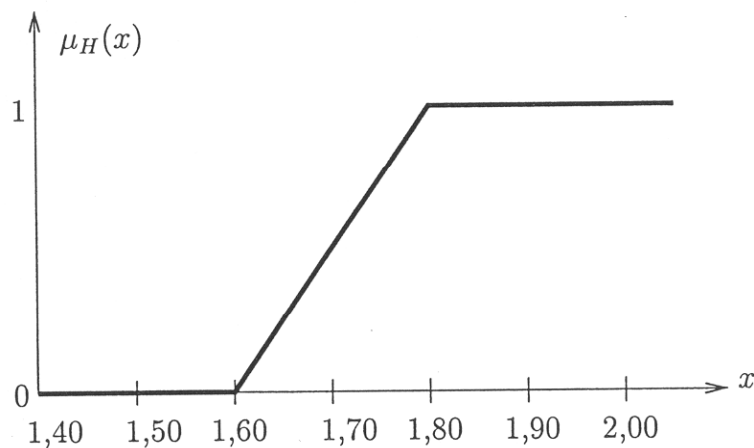
Conjuntos Nebulosos (Zadeh, 1965): associa *graus de pertinência* de um objeto ao conjunto.

Conjunto Clássico: $f_H : X \rightarrow \{0, 1\}$

Conjunto Nebuloso: $\mu_H : X \rightarrow [0, 1]$

Funções de Pertinência: A função característica pode ser generalizada de maneira que valores atribuídos a elementos do conjunto universo, estejam dentro de um intervalo específico de valores, indicando o grau de pertinência desses elementos ao conjunto considerado.

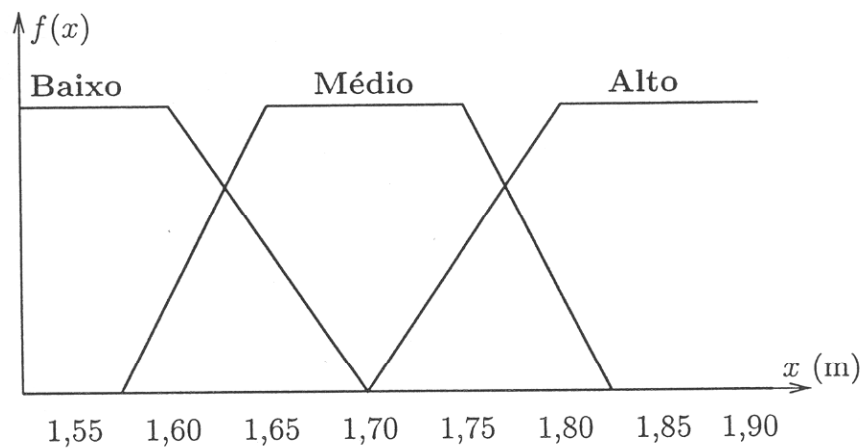
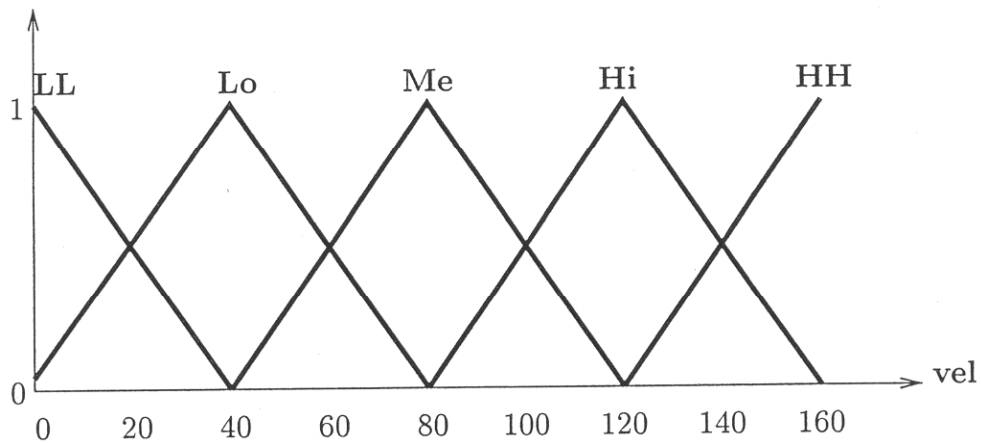
Representação de conceitos como alto, baixo, longe, perto, etc.



$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 1,60 \\ 5(x-1,60), & \text{se } 1,60 \leq x \leq 1,80 \\ 1, & \text{se } x \geq 1,80 \end{cases}$$

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_H(x)}{x} = \frac{0,5}{1,70} + \frac{1,0}{1,80} + \frac{1,0}{1,90} + \frac{1,0}{2,00}$$

As funções de pertinência mais comuns são as triangulares e trapezoidais



- Dubois, D.; Prade, H. - Fuzzy sets and systems: Theory and applications, Academic Press, 1980.
- Klir, G.J.; Folger, T.A. - Fuzzy sets: Uncertainty and information, Prentice Hall, 1988.
- Pedrycz, W.; Gomide, F. - An introduction to fuzzy sets: Analysis and design, MIT Press, 1998.

FD IV: Fuzzy Linear Programming

Linear programming with flexible constraints

- H.-J. Zimmermann Description and optimization of fuzzy systems, *Internat. J. General Systems* **2** (1975) 209-215.

The conventional model of Linear Programming (LP) can be stated as

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle &\rightarrow \min \\ \text{s. t. } Ax &\leq b. \end{aligned}$$

where

- $\langle c, x \rangle = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ is called the objective function,
- $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ is the decision variable,
- $(Ax)_i = \langle a_i, x \rangle = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$
- $X = \{x | Ax \leq b\}$ is the set of *feasible* alternatives.
- x_{opt} is called a solution to LP problem if

$$\langle c, x_{opt} \rangle \leq \langle c, x \rangle$$

for all $x \in X$.

In many real-world problems instead of minimization of the objective function it may be sufficient to determine an x such that

$$\begin{aligned}c_1x_1 + \cdots + c_nx_n &\leq b_0, \\a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m,\end{aligned}$$

where b_0 is a predetermined *aspiration level*.

The fuzzy objective function is characterized by its membership function, and so are the constraints.

Since we want to satisfy (optimize) the objective function as well the constraints, a decision in a fuzzy environment is defined in analogy to nonfuzzy environment as the selection of activities which simultaneously satisfy objective function(s) *and* constraints.

In fuzzy set theory the intersection of sets normally corresponds to the logical *and*.

The decision in fuzzy environment can therefore be viewed as the intersection of fuzzy constraints and fuzzy objective function(s).

The relationship between constraints and objective functions in a fuzzy environment is therefore fully symmetric, i.e. there is no longer difference between the former and latter.

Starting from the problem

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle &\rightarrow \min \\ \text{s. t. } Ax &\leq b. \end{aligned}$$

the adopted fuzzy version is

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle &\lesssim b_0 \\ \text{s. t. } Ax &\lesssim b. \end{aligned}$$

That is

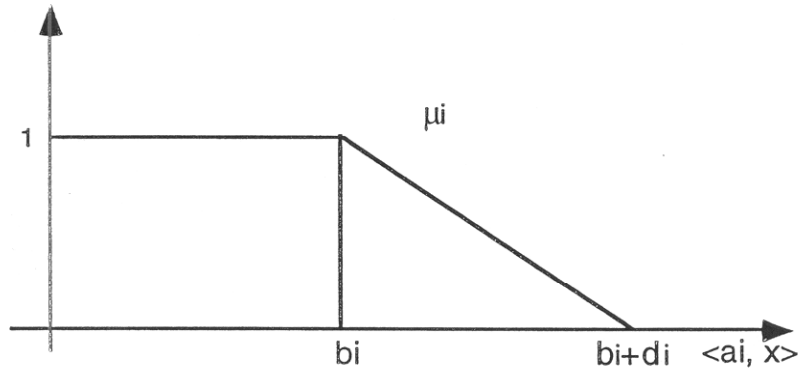
$$\begin{aligned} c_1x_1 + \cdots + c_nx_n &\lesssim b_0, \\ a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &\lesssim b_1, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &\lesssim b_m, \end{aligned}$$

Here b_0 means an aspiration level of the decision maker.

We now define the membership functions for the constraints

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \langle a_i, x \rangle \leq b_i \\ 1 - \frac{\langle a_i, x \rangle - b_i}{d_i} & \text{if } b_i < \langle a_i, x \rangle \leq b_i + d_i \\ 0 & \text{if } \langle a_i, x \rangle > b_i + d_i, \end{cases}$$

where $d_i > 0$ are subjectively chosen constants of admissible violations, $i = 1, \dots, m$.

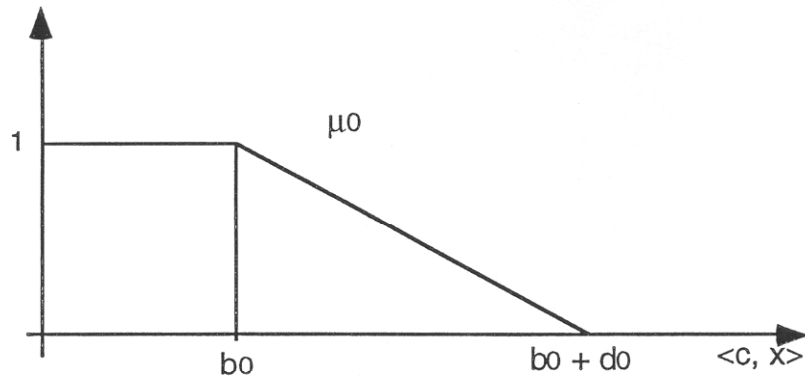


$\mu_i(x)$ denotes the degree to which x satisfies the i th constraint

We define the membership functions for objective function

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \langle c, x \rangle \leq b_0 \\ 1 - \frac{\langle c, x \rangle - b_0}{d_0} & \text{if } b_0 < \langle c, x \rangle \leq b_0 + d_0 \\ 0 & \text{if } \langle c, x \rangle > b_0 + d_0, \end{cases}$$

where $d_0 > 0$ are subjectively chosen constants of admissible violations.



$\mu_0(x)$ denotes the degree to which x satisfies the fuzzy goal function

The *fuzzy decision* is defined by Bellman and Zadeh's principle as

$$D(x) = \min\{\mu_0(x), \mu_1(x), \dots, \mu_m(x)\}$$

where x can be any element of the n dimensional space, because any element has a degree of feasibility, which is between zero and one.

And an optimal solution to the fuzzy LP is determined from the relationship

$$D(x_{opt}) = \max_x D(x).$$

How can we solve the resulting (crisp) problem

$$D(x) \rightarrow \max?$$

We should find an x which satisfies the constraints and the fuzzy objective function with the biggest possible degree.

$$\begin{aligned} & \lambda \rightarrow \max \\ & \min\{\mu_0(x), \mu_1(x), \dots, \mu_m(x)\} \geq \lambda \\ & \lambda \in [0, 1], x \in \mathfrak{R}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda \rightarrow \max \\ & \mu_0(x) \geq \lambda, \mu_1(x) \geq \lambda, \dots, \mu_m(x) \geq \lambda \\ & \lambda \in [0, 1], x \in \mathfrak{R}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda \rightarrow \max \\ & 1 - \frac{\langle c, x \rangle - b_0}{d_0} \geq \lambda, \quad 1 - \frac{\langle a_i, x \rangle - b_i}{d_i} \geq \lambda, \\ & i = 1, \dots, m, \lambda \in [0, 1], x \in \mathfrak{R}^n \end{aligned}$$

The resulting crisp LP problem can be written as

$$\begin{aligned} & \lambda \rightarrow \max \\ & \langle c, x \rangle - b_0 \geq d_0(1 - \lambda) \\ & \langle a_i, x \rangle - b_i \geq d_i(1 - \lambda), \\ & i = 1, \dots, m, \lambda \in [0, 1], x \in \mathfrak{R}^n \end{aligned}$$

Let λ^* and x^* be an optimal solution to the above problem. Then x^* is considered as a best compromise solution, and λ^* is interpreted as the degree of reality (or achievability) of x^* .

Tipo 1: Conjuntos Nebulosos de Grafos Clássicos

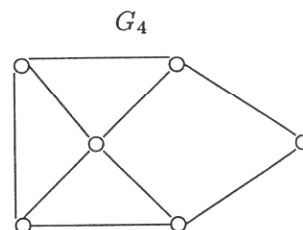
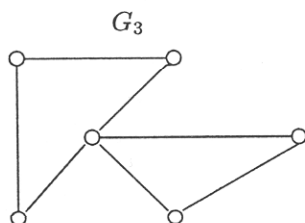
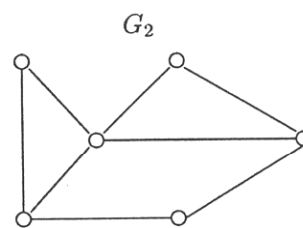
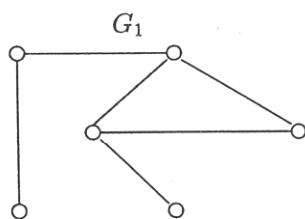
Considera-se G um conjunto nebuloso de grafos ordinários G_i :

$$G = \frac{\mu_1}{G_1} + \frac{\mu_2}{G_2} + \dots + \frac{\mu_{n_G}}{G_{n_G}}$$

com $G_i = (V_i, A_i)$.

Exemplo:

$$V = V_1 = V_2 = \dots = V_{n_G}$$



Tipo 2: Conjuntos de Nós Clássicos e Arcos Nebulosos

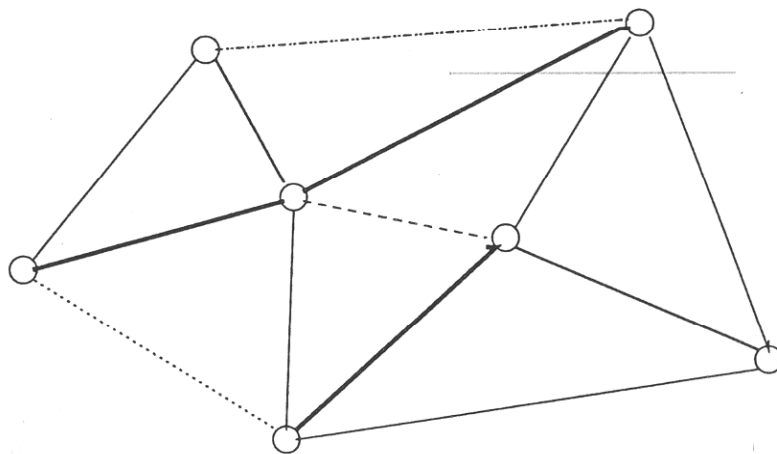
Um grafo que possui os nós conhecidos, mas não seus arcos. Neste caso, seus conjuntos são da forma:

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_{n_V}\}$$

e

$$A = \frac{\mu_1}{a_1} + \frac{\mu_2}{a_2} + \dots + \frac{\mu_{n_A}}{a_{n_A}}$$

onde cada arco a_i é um número não-fuzzy.



Tipo 3: Conjunto de Nós Clássicos e Arcos com Conectividade Nebulosa

O grafo possui nós e arcos conhecidos, mas a conectividade destes arcos desconhecida. Então temos:

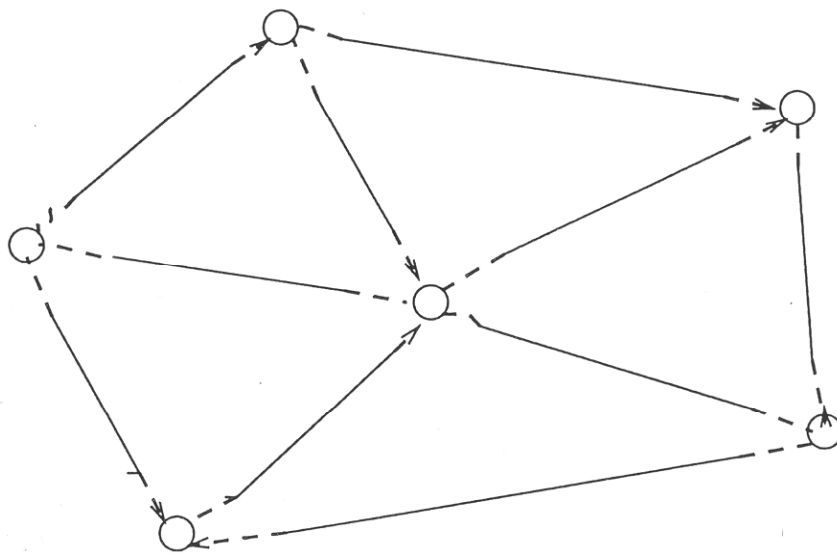
$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_{n_V}\}$$

e

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_A}\}$$

são conjuntos ordinários e seus pontos de conexão (cabeça e cauda, h e t)

$$h_i = \frac{\sigma_{i,1}}{h_{i,1}} + \frac{\sigma_{i,2}}{h_{i,2}} + \dots + \frac{\sigma_{i,n_V}}{h_{i,n_V}}$$
$$t_i = \frac{\tau_{i,1}}{t_{i,1}} + \frac{\tau_{i,2}}{t_{i,2}} + \dots + \frac{\tau_{i,n_V}}{t_{i,n_V}}$$



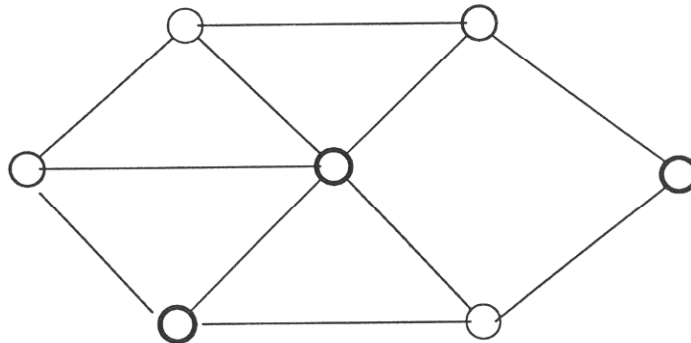
Tipo 4: Conjunto de Nós Nebulosos e Arcos Clássicos

Um grafo pode ter nós não conhecidos e arcos conhecidos

$$V = \frac{\mu_1}{v_1} + \frac{\mu_2}{v_2} + \dots + \frac{\mu_{N_V}}{v_{n_V}}$$

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_A}\}$$

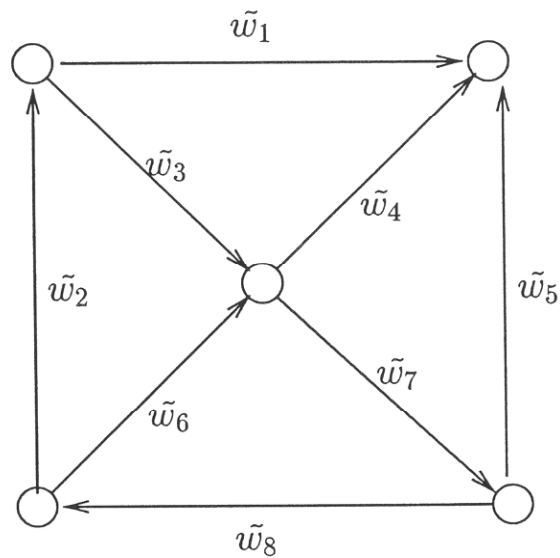
tomando o cuidado de quando pelo menos um dos nós relacionados ao arco a_i não existirem, o arco será excluído do conjunto.



Tipo 5: Grafos Clássicos com Pesos Nebulosos

O grafo possui estrutura conhecida mas pesos (ou capacidades) desconhecidas nos arcos.

$$w_i = \frac{\mu_{i,1}}{w_{i,1}} + \frac{\mu_{i,2}}{w_{i,2}} + \dots$$



Grafos Nebulosos proposto por Rosenfeld

Qualquer relação $R \subseteq S \times S$ sobre um conjunto S pode ser vista definido um *grafo* com conjunto de nós S e conjunto de arcos R .

Um grafo fuzzy $G = (\sigma, \mu)$ é um par de funções $\sigma : S \rightarrow [0, 1]$ e $\mu : S \times S \rightarrow [0, 1]$, onde para todo $x, y \in S$ temos $\mu(x, y) \leq \sigma(x) \wedge \sigma(y)$.

O grafo fuzzy $H = (\tau, \nu)$ é chamado um *subgrafo fuzzy* (parcial) de G se

$$\tau(x) \leq \sigma(x), \quad \forall x \in S$$

e

$$\nu(x, y) \leq \mu(x, y), \quad \forall x, y \in S$$

Diz-se que o subgrafo fuzzy (τ, ν) *gera* o grafo fuzzy (σ, μ) se $\tau(x) = \sigma(x)$ para todo x . Neste caso, os dois grafos tem o mesmo conjunto de nós, eles diferem somente no peso dos arcos.

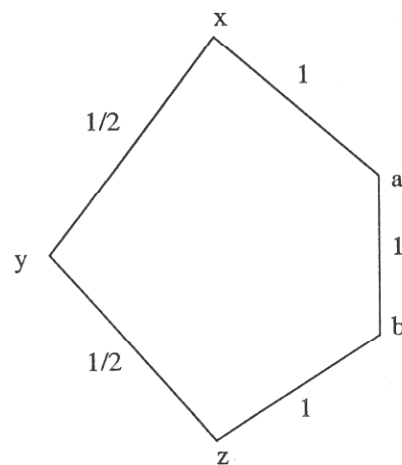
Caminhos Nebulosos

Um caminho ρ em um grafo fuzzy é uma sequência de nós distintos x_0, x_1, \dots, x_n tal que $\mu(x_{i-1}, x_i) > 0$, $1 \leq i \leq n$. No caso, $n \geq 0$ é chamado de comprimento de ρ . A força de ρ é definida como sendo o valor do arco com a menor pertinência: $\bigwedge_{i=1}^n \mu(x_{i-1}, x_i)$. Se o caminho tem comprimento 0, é conveniente definir sua força como sendo $\sigma(x_0)$. Chamamos ρ um ciclo se $x_0 = x_n$ e $n \geq 3$.

Um *caminho mais forte* unindo quaisquer dois nós x, y têm força

$$\mu^\infty(x, y) = \sup \mu^k(x, y)$$

Pode-se tentar definir a *distância* entre x e y como o comprimento do caminho mais forte e mais curto entre eles.



Problema de caminho mínimo fuzzy: dois casos

Um problema pode ter diferente níveis de fuzzissidade. Existem dois problemas principais que devem ser abordados e são citados por todos os trabalhos encontrados na literatura:

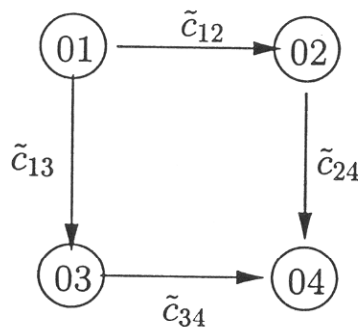
1. A estrutura do grafo é bem definida (grafo crisp) e os parâmetros associados são números fuzzy. É o mais estudado.
2. O comprimento do caminho é um número fuzzy e cada arco do grafo tem um valor de pertinência, isto é, a cada nó e arco existe um conjunto fuzzy associado.

Serão apresentados alguns algoritmos para o problema de caminho mínimo fuzzy (grafo crisp e parâmetros fuzzy).

Dubois e Prade, 1980

- Uma das primeiras referências que tratam do problema de caminho mínimo fuzzy
- Propõe a simples extensão de dois algoritmos clássicos (Floyd e de Ford)
- Ponto fraco: caminho encontrado pelos algoritmos pode não existir.

Exemplo: Seja uma rede fuzzy tendo o nó 1 como origem e o nó 4 como destino.



$$\begin{aligned}c_{12} &= \left\{ \frac{2}{0.8}, \frac{3}{0.3} \right\}, \\c_{13} &= \left\{ \frac{1}{0.5}, \frac{2}{0.6}, \frac{3}{0.2} \right\}, \\c_{24} &= \left\{ \frac{1}{0.2}, \frac{2}{0.3} \right\} \text{ e} \\c_{34} &= \left\{ \frac{1}{0.2}, \frac{2}{0.8} \right\}.\end{aligned}$$

Caminhos possíveis:

(1 → 2 → 4) com comprimento {3/0.2, 4/0.3, 5/0.3}

(1 → 3 → 4) com comprimento {2/0.2, 3/0.5, 4/0.6, 5/0.2}

Dubois e Prade, 1980 (cont.)

Algoritmo:

Passo 0: $f(m) \leftarrow \{0/1\}$

Passo 1: Para o nó $m - 1$ ao nó 1, faça

$$f(i) \leftarrow \min_{k:k>i} \{ \tilde{c}_{ki} + f(k) \}$$

sendo que o valor associado ao nó 1 é a solução do problema.

Usando o algoritmo acima, temos:

$$\tilde{f}(4) = \{0/1\},$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(3) &= \{ \tilde{c}_{34} + \tilde{f}(4) \} = \{1/0.2, 2/0.8\} + \{0/1\}, \\ &= \{1/0.2, 2/0.8\}. \end{aligned}$$

$$\tilde{f}(2) = \{ \tilde{c}_{24} + \tilde{f}(4) \} = \{1/0.2, 2/0.3\}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(1) &= \min\{ \tilde{c}_{12} + \tilde{f}(2), \tilde{c}_{13} + \tilde{f}(3) \} \\ &= \{3/0.2, 4/0.3, 5/0.3\} \tilde{\wedge} \{2/0.2, 3/0.5, 4/0.6, 5/0.2\} \\ &= \{2/0.2, 3/0.3, 4/0.3, 5/0.2\} \end{aligned}$$

- Não existe caminho de comprimento $\{2/0.2, 3/0.3, 4/0.3, 5/0.2\}$ do nó 1 ao nó 4.
- Note também que nenhum caminho tem valor de pertinência 0.3 para o comprimento 3
 $\rightarrow \{3/0.2, 4/0.3, 5/0.3\} \tilde{\wedge} \{3/0.5\} = \vee((0.2 \wedge 0.5, 0.3 \wedge 0.5, 0.3 \wedge 0.5))$

Klein, 1991

- Contorna a dificuldade verificada por Dubois e Prade com o uso de dominância de conjuntos fuzzy (tipo *more is better*).
- considera conjuntos discretos fuzzy para os comprimentos dos arcos
- determina-se o comprimento máximo que pode alcançar um caminho e trabalha-se com este valor no algoritmo de programação dinâmica

$$\left. \begin{array}{l} M : \text{ número de camadas} = 3 \\ R : \text{ comprimento máximo dos arcos} = 3 \end{array} \right\} (M - 1) \cdot R = 6$$

Algoritmo:

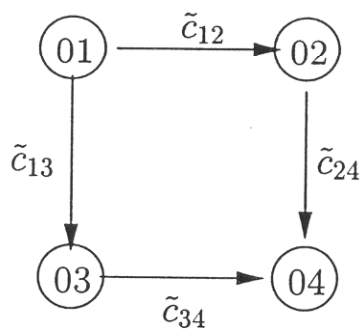
Passo 0: $f(m) \leftarrow (1, \dots, 1)$ (vetor com $(M - 1)R$ posições)

Passo 1: Para $i = (m - 1)$ até 1, faça

$$f(i) \leftarrow \text{dom}_{k:(i,k) \in A} (\tilde{c}_{ik} \tilde{+} f(k))$$

onde o operador de dominância deve escolher o vetor com os maiores valores de pertinência.

Klein, 1991 (cont.)



$$\begin{aligned} \tilde{c}_{12} &= \left\{ \frac{2}{0.8}, \frac{3}{0.3} \right\}, \\ \tilde{c}_{13} &= \left\{ \frac{1}{0.5}, \frac{2}{0.6}, \frac{3}{0.2} \right\}, \\ \tilde{c}_{24} &= \left\{ \frac{1}{0.2}, \frac{2}{0.3} \right\} \text{ e} \\ \tilde{c}_{34} &= \left\{ \frac{1}{0.2}, \frac{2}{0.8} \right\}. \end{aligned}$$

Para o exemplo anterior, temos:

$$\begin{aligned} f(4) &= (1, 1, 1, 1, 1, 1) \\ f(3) &= (0.2, 0.8, 0, 0, 0, 0) \\ f(2) &= (0.2, 0.3, 0, 0, 0, 0) \\ f(1) &= \text{dom}\{\tilde{c}_{13} \tilde{+} f(3), \tilde{c}_{12} \tilde{+} f(2)\} \\ &= \text{dom}\{(0, 0.2, 0.5, 0.6, 0.2, 0), (0, 0, 0.2, 0.3, 0.3, 0)\} \\ &= (0, 0.2, 0.5, 0.6, 0.2, 0) \end{aligned}$$

Caminho escolhido: $(1 \rightarrow 3 \rightarrow 4)$ com comprimento $\left\{ \frac{2}{0.2}, \frac{3}{0.5}, \frac{4}{0.6}, \frac{5}{0.2} \right\}$.

Bibliografia para algoritmos para grafos com parâmetros incertos:

- 1- OKADA, S. – “Fuzzy Shortest Path Problems Incorporating Interactivity Among Paths”, *Fuzzy Sets and Systems*, 143(3), p. 335-357, 2004.
- 2- HERNANDES, F. ; LAMATA, M. T. ; VERDEGAY, J. L. ; YAMAKAMI, A. -“The Shortest Path Problem on Network with Fuzzy Parameters”, *Fuzzy Sets and Systems*, v. 158, p. 1561-1570, 2007.
- 3- ALMEIDA, T. A. ; YAMAKAMI, A. ; TAKAHASHI, M. T. – “ Sistema Imunológico Artificial para Resolver o Problema da Árvore Geradora Mínima com Parâmetros Fuzzy”, *Pesquisa Operacional*, v. 27, p. 131-154, 2007.
- 4- TAKAHASHI, M. T. – “Contribuições ao Estudo de Grafos Fuzzy: Teoria e Algoritmos”, Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 2004.