Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DT-FEEC-UNICAMP

EA513 I - Circuitos Elétricos I
Cap. VII - Excitação Senoidal e Fasores

1 Propriedade de Senóides

Sinais senoidais estão presentes em diversos ambientes: transmissão de sinais, eletricidade, etc..

Foi visto que a resposta de sistemas dinâmicos a excitações pode ser separada em parte homogênea, que depende das caracrterísticas intrinsecas do sistema e das condições iniciais, e parcela particular que depende essencialmente de excitações. Além disso, cabe lembrar que a solução homogênea representa a parcela transitória e a solução particular representa a parcela permanente.

Neste capítulo serão estudados os comportamentos de sistemas elétricos quando sujeitos a excitações senoidais. Consequentemente, serão consideradas apenas as respostas forçadas (ou particulares, que são de regime permanente).

De uma forma geral, sinais senoidais podem ser representados como:

$$v(t) = V_m sin(wt + \phi)$$

onde:

$$\begin{cases} V_m & amplitude\ de\ oscilacao \\ w & frequencia\ de\ oscilacao \\ \phi & fase \end{cases}$$

Obs.:

1. Período $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{w}$
2. w em radianos/segundo
3. ϕ pode ser em graus ou em radianos
4. $\phi > 0$: sinal adiantado
5. $\phi < 0$: sinal atrasado
6. $sin(wt) = cos(wt - \frac{\pi}{2})$
7. $Acoswt + Bsinwt = \sqrt{A^2 + B^2} cos(wt - \phi)$ onde ϕ depende do quadrante

Exemplo: No circuito da Figure 1, deseja-se obter $v(t)$ em regime permanente.

Solução:

$$\begin{cases} I_m coswt & = i_R + i_C \\ i_R & = \frac{v}{R} \\ i_C & = C\frac{dv}{dt} \end{cases}$$

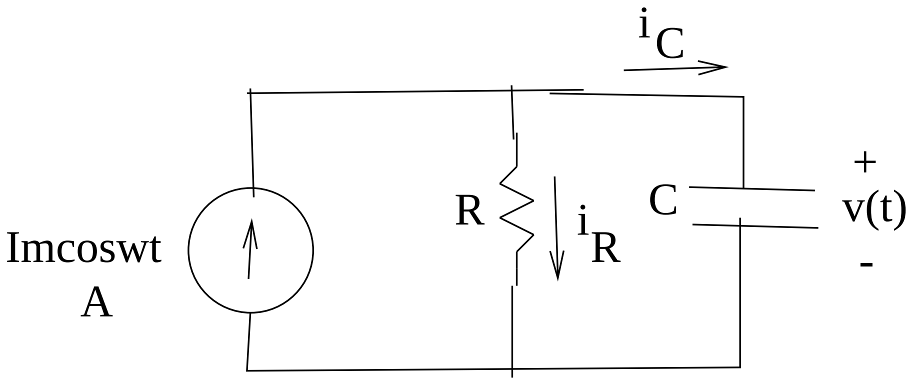

Figure 1: Circuito exemplo

Portanto:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = \frac{I_m}{C}coswt$$

Logo: $v_p(t) = Acoswt + Bsinwt$

Lembrando que neste capítulo procura apenas a solução paticular, tem-se:

$$v_p(t) = v(t) = Acoswt + Bsinwt$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -Awsinwt + Bwcoswt$$

Resolvendo:

$$v(t) = \frac{RI_m}{\sqrt{1+w^2R^2C^2}} cos(wt - arctg(wRC))$$

2 Excitações Complexas

Euler: $e^{jx} = cosx + jsinx$

Seja o exemplo logo acima, onde se obteve a equação diferencial:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC} v = \frac{I_m}{C} coswt$$

Pode-se escrever:

$$I(t) = I_m coswt = I_m Re[e^{jwt}]$$

onde *Re* refere-se à parte real. A equação diferencial pode ser re-escrita na forma:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = \frac{I_m}{C}Re[e^{jwt}]$$

Abstraindo Re, obtém-se:

$$\frac{d\tilde{v}}{dt} + \frac{1}{RC}\tilde{v} = \frac{I_m}{C}e^{jwt}$$

cuja solução $\tilde{v}$ é composta de parte real e parte imaginária.

Tendo em vista que aqui estuda-se sistemas lineares, vale o princípio de superposição e, portanto, a solução de:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = \frac{I_m}{C}coswt$$

é a parte real de $\tilde{v}$, ou seja:

$$v(t) = Re[\tilde{v}(t)]$$

A equação:

$\frac{d\tilde{v}}{dt} + \frac{1}{RC}\tilde{v} = \frac{I_m}{C}e^{jwt}$

tem solução particular do tipo:

$\tilde{v} = Ke^{jwt}$ (ver a Tabela do Item 2 do Capítulo IV)

Substituindo na equação diferencial acima, obtém-se:

$K = \frac{RI_m}{1+jwRC}$

que fornece:

$\tilde{v} = \frac{RI_m}{1+jwRC}e^{jwt}$

Escrevendo $1 + jwt$ na sua forma polar:

$(1+jwt) = \sqrt{1+w^2R^2C^2}e^{jarctg(wRC)}$

Logo:

$\tilde{v} = \frac{RI_m}{\sqrt{1+w^2R^2C^2}}e^{j(wt-arctg(wRC))}$

Consequentemente:

$v(t) = Re[\tilde{v}]$ que fornece:

$v(t) = \frac{RI_m}{\sqrt{1+w^2R^2C^2}}cos(wt - arctg(wRC))$

que é a mesma obtida no exemplo do item 1 deste capítulo.

Este fato sugere que, para achar soluções de circuitos elétricos com excitações senoidais, em regime permanente, é melhor expressar as excitações senoidais nas suas formas exponenciais, resolver e extrair a parte real.

Exemplo: Considere o circuito da Figure 6 do Capítulo V, cuja equação diferencial é:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = \frac{1}{LC}E(t)$$

Considere: $R = 4\Omega$, $L = 2$ H, $C = \frac{1}{16}$ F, $E(t) = \frac{3}{2}\sqrt{2}cos(2t + 15^o)$. Achar $v(t)$ em regime permanente.

Solução: A equação diferencial fica:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt} + 8v = 12\sqrt{2}cos(2t + 15^o)$$

Transformando a entrada $f(t) = 12\sqrt{2}cos(2t + 15^o)$ na forma exponencial:

$$\tilde{f} = 12\sqrt{2}e^{j(2t+15^o)} = 12\sqrt{2}e^{j2t}e^{j15^o}$$

a solução é do tipo: $\tilde{v} = Ve^{j2t}$

Substituindo na equação diferencial:

$$(-V4 + 4Vj + 8V)e^{j2t} = 12\sqrt{2}e^{j2t}e^{j15^o}$$

$$V = \frac{12\sqrt{2}e^{j15^o}}{4+4j}$$

$$V = \frac{12\sqrt{2}e^{j15^o}}{4\sqrt{2}e^{arctg1}} = \frac{12\sqrt{2}e^{j15^o}}{4\sqrt{2}e^{j45^o}}$$

$$V = 3e^{-j30^o}$$

Portanto, $\tilde{v} = Ve^{j2t} = 3e^{j(2t-30^o)}$

Finalmente: $v(t) = 3cos(2t - 30^o)$

3 Fasores

Um sinal senoidal pode ser representado utilizando forma exponencial:

$$v(t) = V_m cos(wt + \theta) = Re[V_m e^{j(wt+\theta)}]$$

$$v(t) = Re[V_m e^{j\theta} e^{jwt}]$$

A parcela:

$V = V_m e^{j\theta}$ recebe a denominação de **fasor** ou **representação fasorial**.

Notação: $V = V_m e^{j\theta}$ ou $V = V_m \angle \theta$

Observação: o ângulo θ refere-se **ao de coseno**.

Exemplo: Seja o sinal $v(t) = 8sin(3t + 30^o)$. Achar o fasor associado.

$v(t) = 8cos(3t + 30^o - 90^o) = 8cos(3t - 60^o)$

Fasor: $V = 8\angle(-60^o) = 8e^{-j60^o}$

Note que: $V_m = 8$, $w = 3$, $\theta = -60^o$

Relação Tensão-Corrente

- Resistores $\tilde{i} = Ie^{jwt}$
  $\tilde{v} = R\tilde{i} = RIe^{jwt} = Ve^{jwt}$
  Portanto: $V = RI$ e $V_m = RI_m$
  Como R tem faze zero, as fases de $\tilde{v}$ e de $\tilde{i}$ são iguais.
- Indutores $\tilde{i} = Ie^{jwt}$
  $\tilde{v} = L\frac{d\tilde{i}}{dt} = jwLIe^{jwt} = Ve^{jwt}$
  Portanto: $V = jwLI = wLIe^{j90^o}$
  $V_m = wLI_m$

A corrente atrasa 90^o em relação à tensão.

- Capacitores $\tilde{v} = Ve^{jwt}$
  $\tilde{i} = C\frac{d\tilde{v}}{dt} = jwCVe^{jwt} = Ie^{jwt}$
  Portanto: $V = \frac{1}{jwC}I = \frac{1}{wC}Ie^{-j90^o}$
  $V_m = \frac{I_m}{wC}$
  A corrente adiante 90^o em relação à tensão.

4 Impedância e Admitância, Leis de Kirchoff

Seja o circuito da Figure 2, escrito na sua forma fasorial:

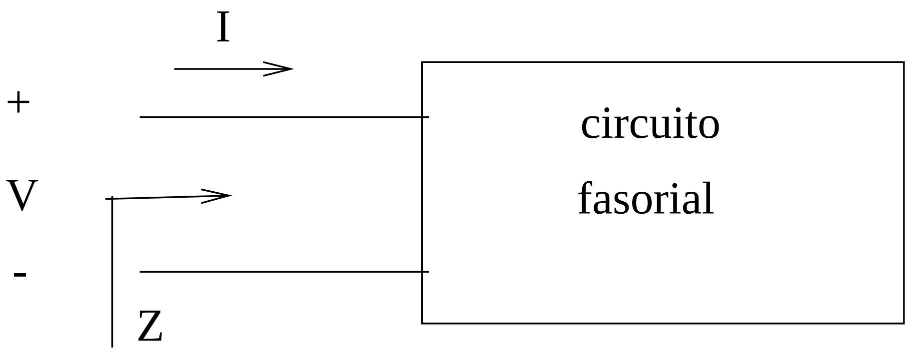

Figure 2: Circuito na forma fasorial

com $V = V_m\angle\theta$ e $I = I_m\angle\phi$.

Define-se **impedância** do circuito como:

$$Z = \frac{V}{I} = |Z|\angle(\theta_Z)$$

Portanto: $Z = \frac{V_m\angle\theta}{I_m\angle\phi} = \frac{V_m}{I_m}\angle(\theta - \phi)$

Pode-se escrever:

$$Z = R + jX$$

onde R é o componente resistivo (resistência) e X é o componente reativo (reatância), ambos medidos em Ohms (Ω).

Note que:

$$Z = R + jX = \sqrt{R^2 + X^2}\angle(arctg\frac{X}{R})$$

com $R = |Z|cos\theta_Z$ e $X = |Z|sin\theta_Z$.

Exemplos:

- Resistor: $Z_R = R$
- Capacitor: $Z_C = \frac{1}{jwC} = \frac{1}{wC}\angle{-90^o}$
- Indutor: $Z_L = jwL = wL\angle{+90^o}$
- $V = 10\angle 60^o$, $I = 2\angle 30^o$, $\Rightarrow$
  $Z = 5\angle 30^o = 5(cos30^o + jsin30^o)$

Define-se **admitância** como sendo $Y = \frac{1}{Z}$

Leis de Kirchoff em Circuitos Fasoriais

As Leis de Kirchoff vistos no item 3 do Capítulo I continuam valendo em circuitos na representação fasorial.

Exemplos:

1. Impedâncias em série: Considere a configuração da Figure 3.

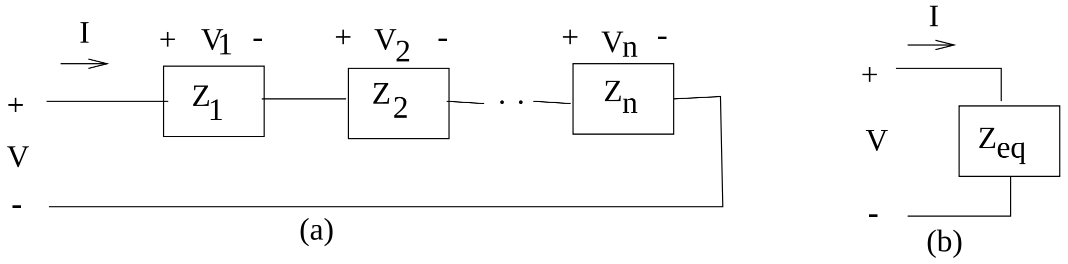

Figure 3: Impedâncias em série

No circuito (a): $V = V_1 + V_2 + ... + V_n$ e $V_i = Z_i I$

Portanto: $V = (Z_1 + Z_2 + ... + Z_n)I$

No circuito (b): $V = Z_{eq} I$

$\Rightarrow Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n$

2. Impedâncias em paralelo: Considere a configuração da Figure 4.

No circuito (a): $I = I_1 + I_2 + ... + I_n$ com

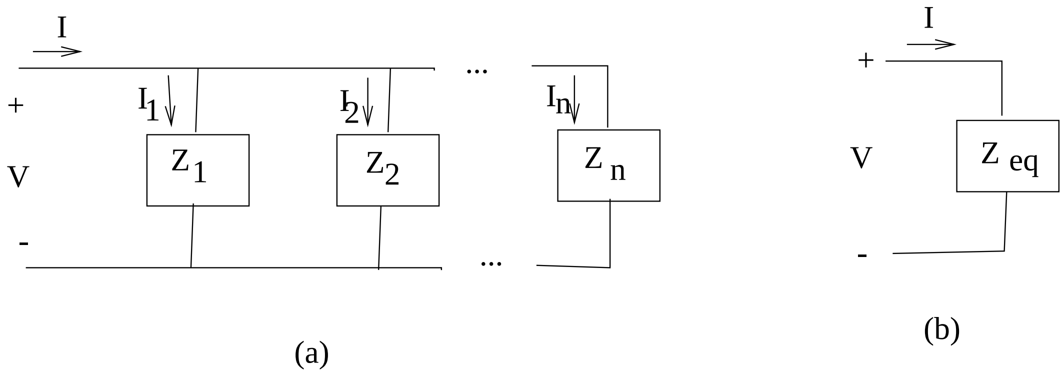

Figure 4: Impedâncias em paralelo

$$I_i = \frac{V}{Z_i}$$

No circuito (b): $I = \frac{1}{Z_{eq}} V$

$$\Rightarrow \frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + ... + \frac{1}{Z_n}$$

3. Seja o circuito da Figure 5(a) em regime permanente. Determinar $i(t)$.

   O circuito fasorial correspondente está na Figure 5(b), que fornece:

$$\begin{cases} V &= V_R + V_L \\ V_R &= RI \\ V_L &= jwLI \end{cases}$$

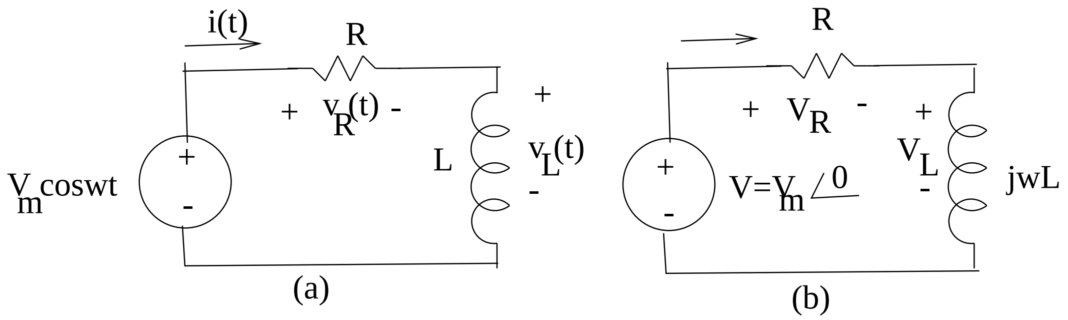

Figure 5: Circuito do exemplo 3

$$V_m\angle 0 = (R + jwL)I$$

$$I = \frac{V_m\angle 0}{R+jwL} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+w^2L^2}}\angle(0 - arctg\frac{wL}{R})$$

Assim: $i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+w^2L^2}}cos(wt-arctg\frac{wL}{R})$

4. Seja o circuito da Figure 6(a) em regime permanente. Ache $i(t)$.

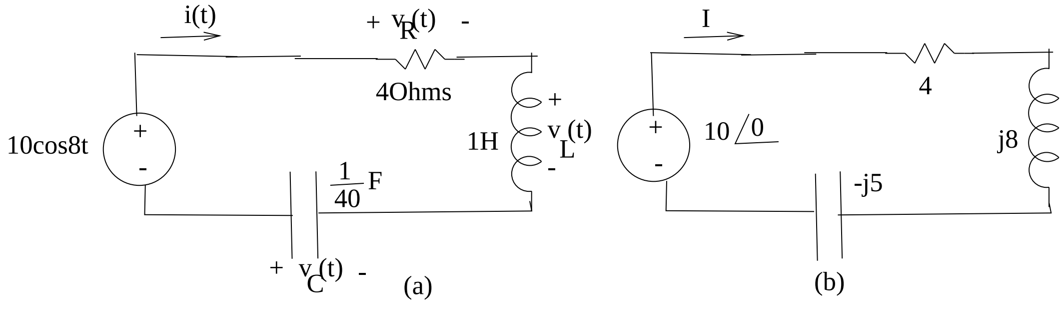

Figure 6: Circuito do exemplo 4

O circuito fasorial correspondente é a Figure 6(b).

$$Z_{eq} = 4 + j8 + (-j5) = 4 + j3 = 5\angle 36.87^o$$

$$\Rightarrow$$

$$I = \frac{10\angle 0}{5\angle 36.87^o} = 2\angle(-36.87^o)$$

$$i(t) = 2cos(8t - 36.87^o)$$

5 Análise Nodal e de Malhas

As leis de Kirchoff vistos em circuitos puramente resistivos (Capítulo I) valem para cenário com fasores. Da mesma forma, os métodos nodais (ou de tensão nos nós) e os métodos de correntes de malhas continuam valendo.

Exemplo: Seja o circuito (a) da Figure 7 em regime permanente. Encontre $v(t)$.

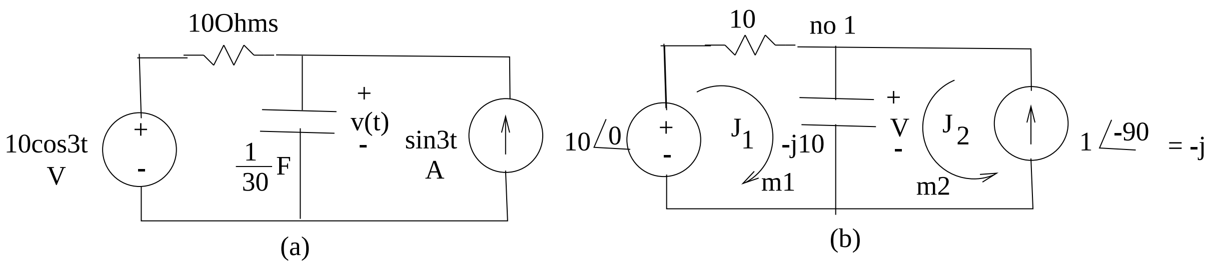

Figure 7: Circuito exemplo para análise nodal e corrente de malhas

Solução:

O circuiro na forma fasorial está mostrado na Figure 7(b).

A) Análise nodal

No nó 1:

$$\frac{V - 10\angle 0}{10} + \frac{V}{-j10} = 1\angle(-90^o) = -j$$

$$V - 10 + jV = -j10$$

$V = \frac{10-j10}{1+j} = \frac{10\sqrt{2}\angle(-45^o)}{\sqrt{2}\angle 45^o} = 10\angle(-90^o)$

$\Rightarrow v(t) = 10cos(3t - 90^o) = 10sin3t$

B) Correntes de malhas

malha m1: $10J_1 - j10(J_1 + J_2) = 10\angle 0$

malha m2: $J_2 = 1\angle -90^o = -j$

$(10 - j10)J_1 = 10 + j10J_2 = 10 + j10(-j) = 20$

$J_1 = \frac{20}{10(1-j)} = \frac{2}{1-j} = \frac{2}{\sqrt{2}\angle -45^o} = \sqrt{2}\angle 45^o$

$J_1 = \sqrt{2}(cos45^o + jsin45^o) = 1 + j$

$V = -j10(J_1 + J_2) = -j10(1 + j - j) = -j10$

$\Rightarrow v(t) = 10cos(3t - 90^o) = 10sin3t$

6 Teorema de Rede, Diagrama Fasorial

A) Teorema de Redes

As propriedades vistas no Capítulo II, item 1.3, continuam válidas no ambiente fasorial: superposição, equivalentes Thévenin e Norton, proporcionalidade, etc..

Exemplos:

- Superposição

  Seja o circuito da Figure 8, em regime permanente. Determinar $i(t)$.

  Solução:

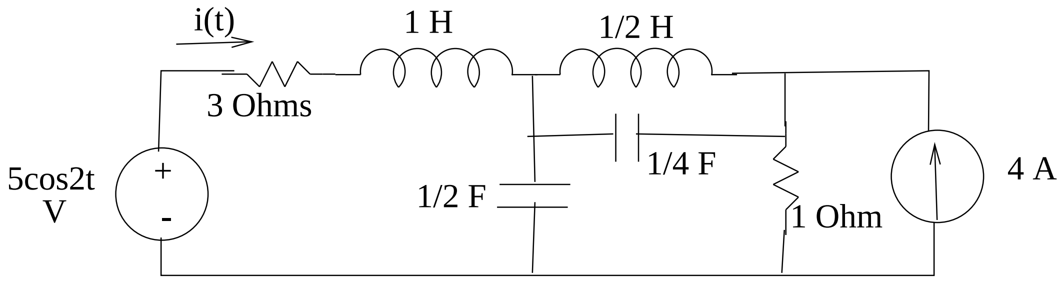

Figure 8: Circuito exemplo para superposição

O circuito tem 2 fontes, uma de tensão ($5cos2t$) e outra de corrente (4 A). Ou seja, a fonte de tensão é do tipo senoidal e a de corrente é contínua. Nestas situações, é preciso utilizar a superposição.

a) Considerando a fonte de tensão e anulando a de corrente, tem-se o circuito da Figure 9 que pode ser simplificado como mostrado na Figure 10.

Note que j em paralelo com $-j2$ resulta em:

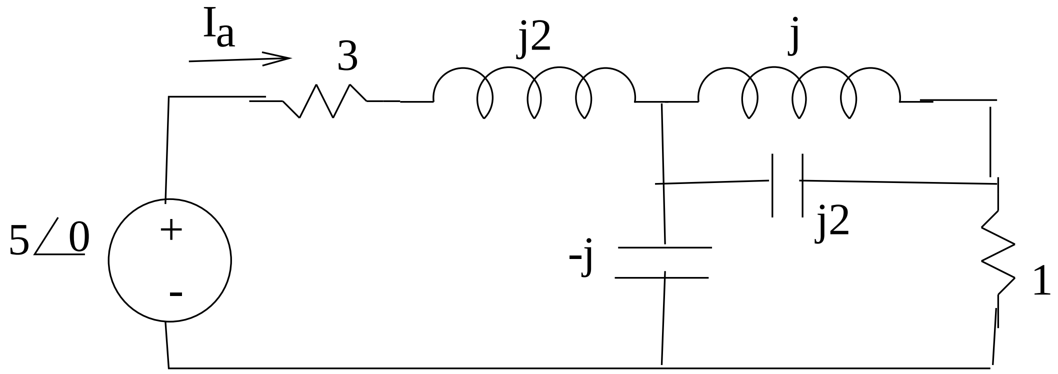

Figure 9: Anulando fonte de corrente

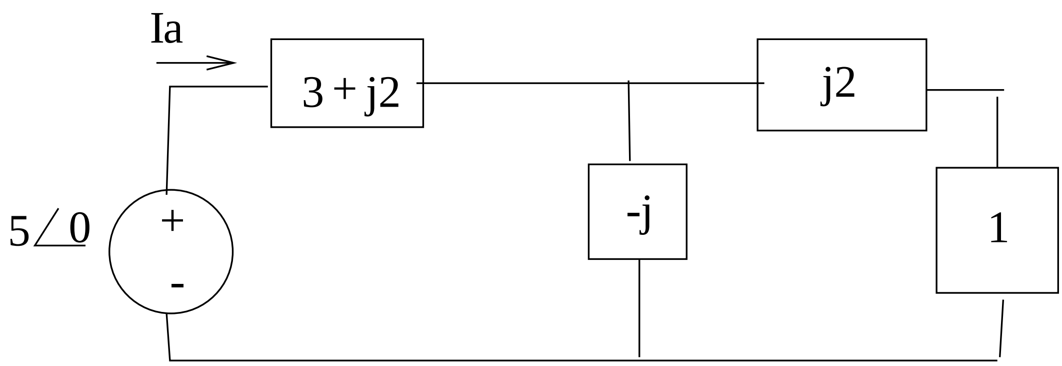

Figure 10: Circuito fasorial simplificado

$$\frac{j.(-j2)}{j-j2} = \frac{2}{-j} = j2$$

$Zeq = (3 + j2) + (-j)$ em paralelo com $(1 + j2)$

$(-j)$ em paralelo com $(1 + j2)$ resulta em:

$$\frac{-j(1+j2)}{-j+1+j2} = \frac{2-j}{1+j}$$

$$Zeq = 3 + j2 + \frac{2-j}{1+j} = \frac{3+j4}{1+j}$$

$$Zeq = \frac{5\angle 53.13^o}{\sqrt{2}\angle 45^o} = \frac{5\sqrt{2}\angle 8.13^o}{2}$$

Portanto:

$$I_a = \frac{5\angle 0}{Zeq} = \frac{2\angle(-8.13^o)}{\sqrt{2}}$$

$$I_a = \sqrt{2}\angle(-8.13^o)$$

Consequentemente:

$$i_a(t) = \sqrt{2}cos(2t - 8.13^o)$$

b) Considerando a fonte de corrente ativa e anulando a de tensão, tem-se o circuito apresentado na Figure 11 que, utilizando divisor de corrente, fornece:

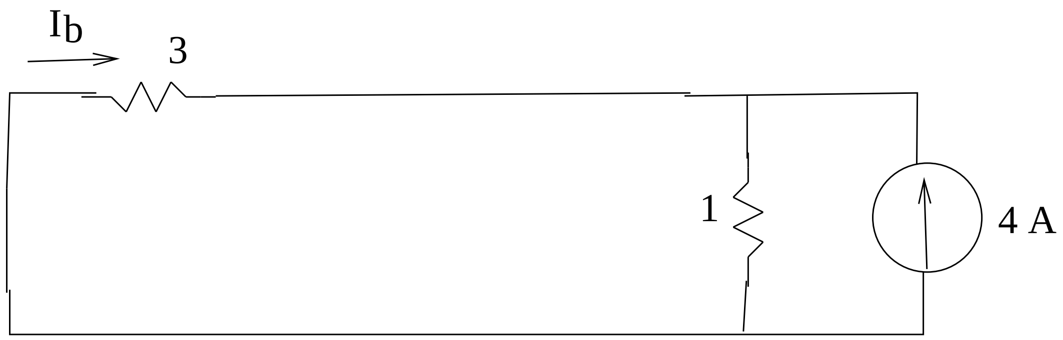

Figure 11: Anulando fonte de tensão

$I_b = -\frac{1}{1+3}4 = -1$ A

Portanto: $i_b(t) = -1$ A

c) Finalmente, como $i(t) = i_a(t) + i_b(t)$

$i(t) = \sqrt{2}cos(2t - 8.13^o) - 1$ A

- Equivalentes Thévenin e Norton

Procedimentos idênticos aos do caso resistivo (Capítulo II, item 3) podem ser tomados nestes casos fasoriais, lembrando que agora, V_{th}, I_N, Z_{th} (no lugar de R_{th}) são fasores.

Resumindo, o circuito da Figure 12 a seguir, pode ser colocado nas formas mostradas nas Figure 13 e Figure 14.

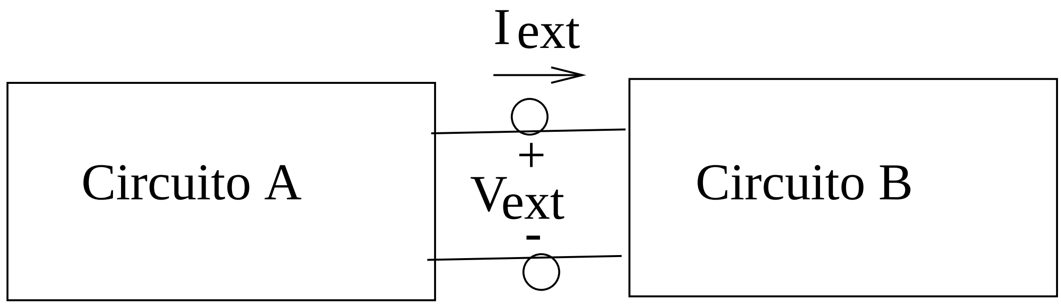

Figure 12: Circuito na forma fasorial

Exemplo: Considere o circuito da Figure 15 em regime permanente. Substitua tudo menos o resistor de 7Ω entre os terminais (a,b) pelo seu equivalente Thévenin.

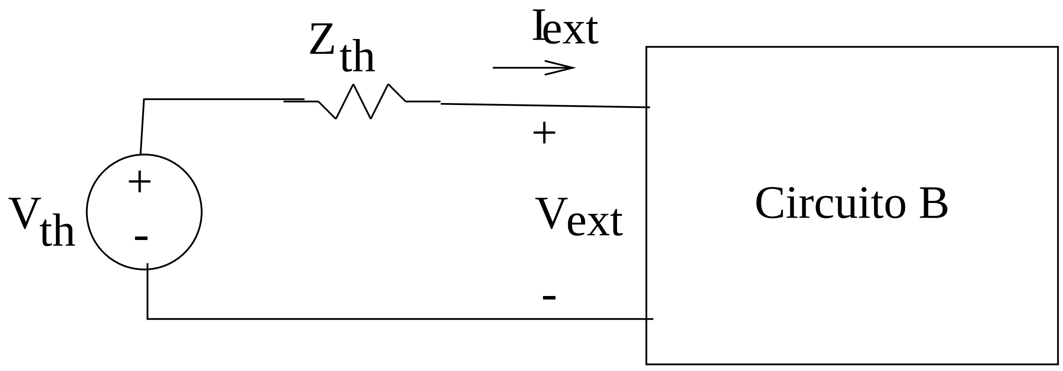

Figure 13: Equivalente Thévenin

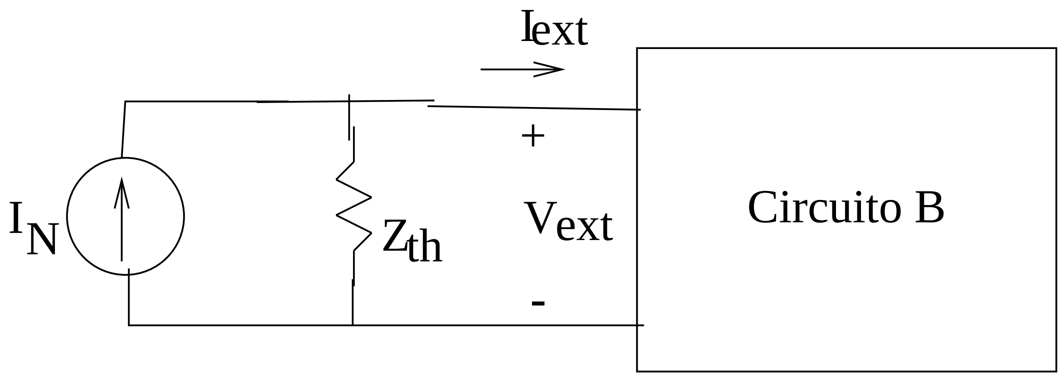

Figure 14: Equivalente Norton

Solução:

A representação fasorial está mostrada na Figure 16.

a) Cálculo de V_{th}.

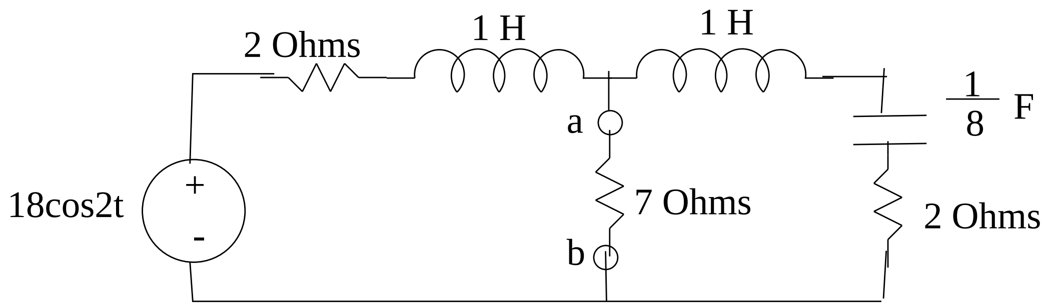

Figure 15: Exemplo de quivalente Thévenin

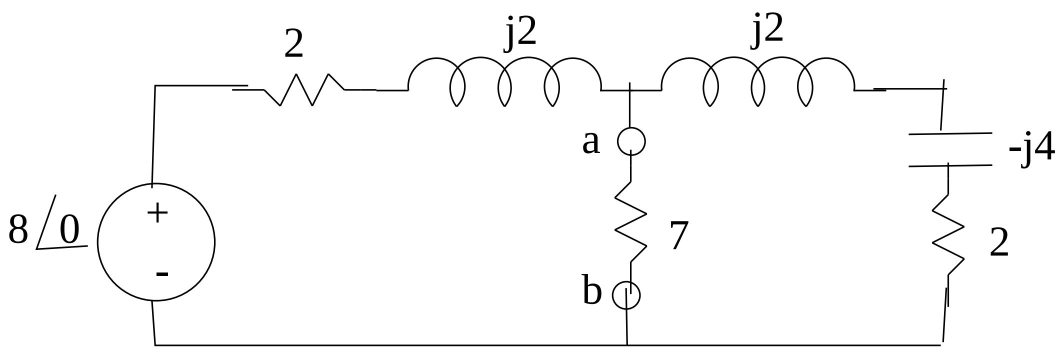

Figure 16: Representação fasorial

Considerar a configuração da Figure 17 e determinar a tensão de aberto entre os terminais (a,b), que corresponde a V_{th}.

$$V_{th} = \frac{2+j2-j4}{2+j2-j4+2+j2} 18\angle 0^o = \frac{2-j2}{4} 18\angle 0^o$$

$$V_{th} = 9\sqrt{2}\angle -45^o$$

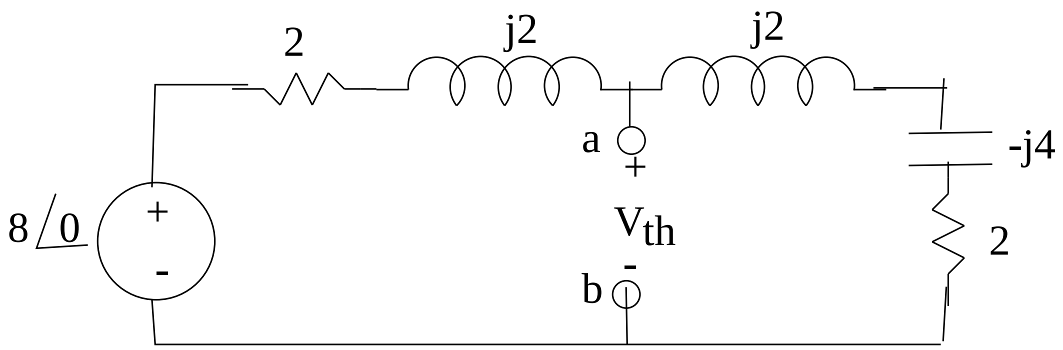

Figure 17: Para determinar V_{th}

b) Cálculo de Z_{th}.

Considerar o circuito da Figure 18 e determinar a impedância vista pelo terminal (a,b):

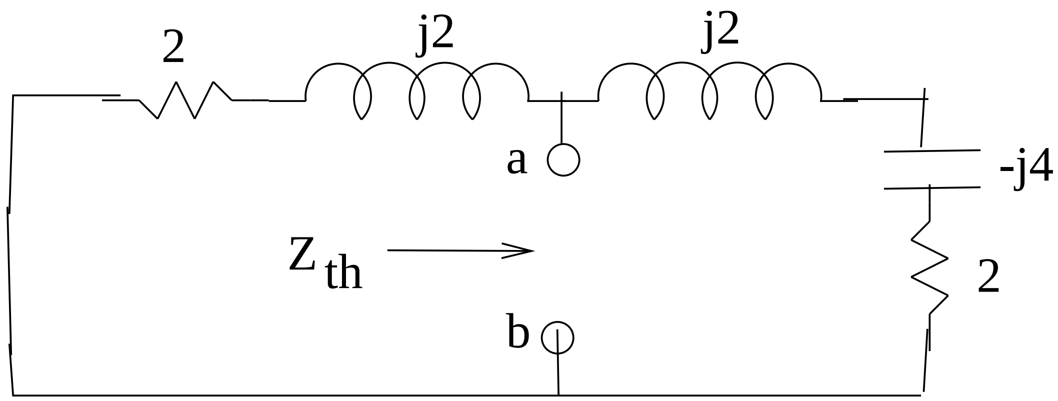

Figure 18: Para determinar Z_{th}

$$Z_{th} = (2 + j2) \text{ paralelo com } (2 + j2 - j4)$$

$$Z_{th} = \frac{(2+j2)(2-j2)}{2+j2+2-j2} = 2$$

c) Equivalente Thévenin:

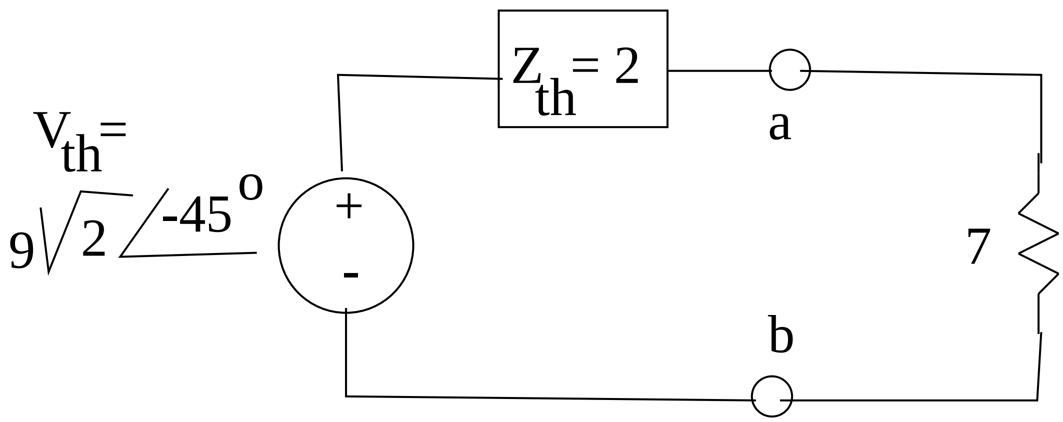

Figure 19: Circuito equivalente de Thévenin

B) Diagrama Fasorial

Como fasores são números complexos, podem ser representados graficamente no plano complexo. Desta forma, soma e subtração podem ser feitas geométricamente.

Em geral, escolhe-se uma referência e a partir dela constrói-se o diagrama fasorial, para depois, aplicar o princípio da proporcionalidade (caso necessário).

Exemplo:

Considere o circuito da Figure 20.

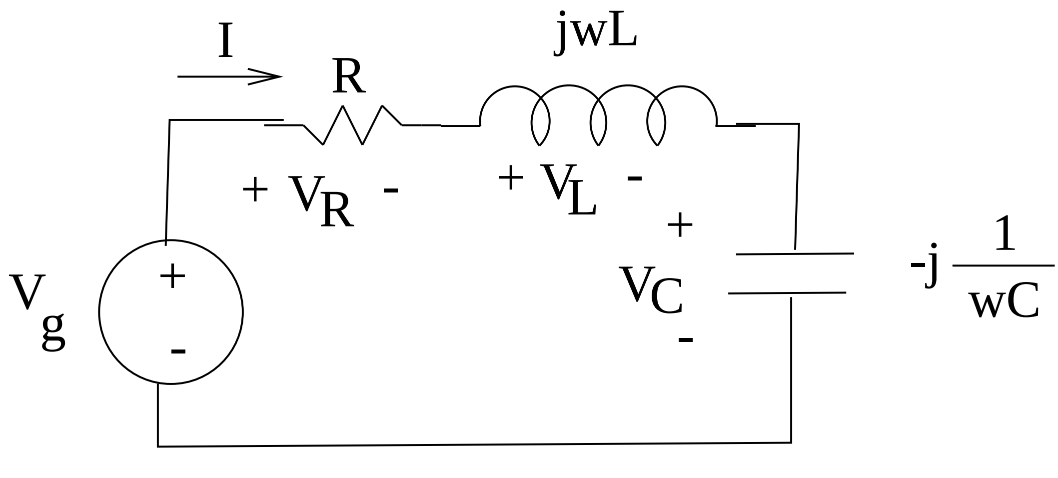

Figure 20: Circuito do exemplo

Tomando I como referência ($|I|\angle 0^o$), pode-se escrever:

$$\begin{cases} V_R = RI & = R|I|\angle O & = R|I| \\ V_L = jwLI & = jwL|I|\angle O & = wL|I|\angle 90^o \\ V_C = -j\frac{1}{wC}I & = -j\frac{1}{wC}|I|\angle O & = w\frac{|I|}{wC}\angle -90^o \end{cases}$$

Como $Vg = V_R + V_L + V_C$, pode-se fazer o diagrama da Figure 21:

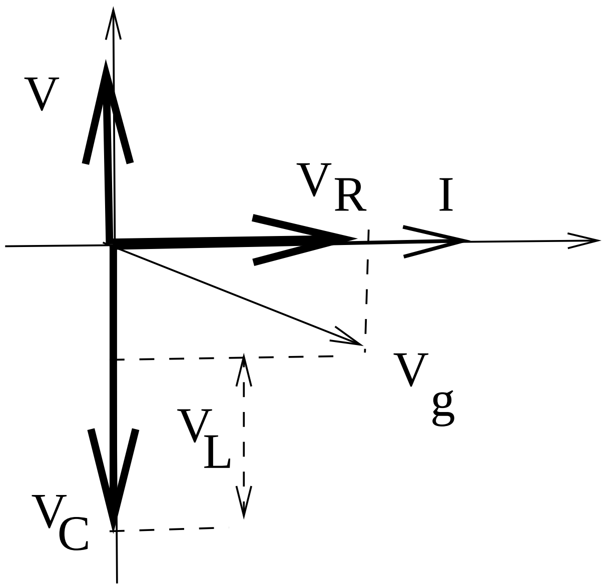

Figure 21: Diagrama fasorial

A. Y.
DSE-FEEC-UNICAMP
1s/2020