**Universidade Estadual de Campinas**
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DT-FEEC-UNICAMP

**EA513 I - Circuitos Elétricos I**

**Cap. VI - Representação por Equações de Estado**

Pode-se escrever modelo matemático de um circuito elétrico com indutores e/ou capacitores e fontes, através de Equações de Estado.

Nos casos aqui estudados, as equações são lineares e, portanto, pode-se fazer uso da teoria de sistemas lineares para modelar, resolver e analisar.

# 1 Equações de Estado

A representação na forma de equações de estado é do tipo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

onde:

- $x \in \Re^n$ são variáveis de estado
- $y \in \Re^r$ são variáveis de saída
- $u \in \Re^m$ são variáveis de entrada ou de controle

e $A$, $B$, $C$, $D$ têm dimensões adequadas.

Esta modelagem permite representar sistemas com múltiplas entradas (fontes) e múltiplas saídas (grandezas elétricas).

Exemplo: Considere o circuito da Figure 1 e deseja-se obter $v(t)$.

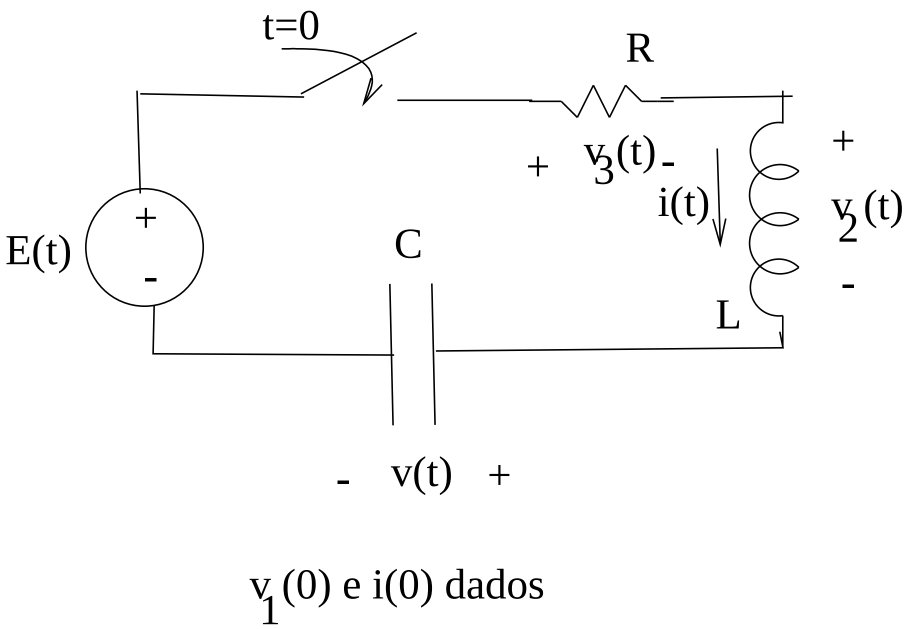


Figure 1: Circuito $RLC$

Foi visto, no Capítulo 5, item 2 que a equação diferencial associada é:

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC}v(t) = \frac{1}{LC}E(t)$$

Por outro lado:

$$\begin{cases} (LKT)\ Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + v(t) = E(t) \\ (capacitor)\ i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \end{cases}$$

que podem ser re-escritas na forma:

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{1}{L}v(t) + \frac{1}{L}E(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t) \end{cases}$$

que pode ser colocado na forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{di(t)}{dt} \\ \frac{dv(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} E(t)$$

$$\begin{bmatrix} i(0) \\ v(0) \end{bmatrix} conhecidos$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + [0]E(t)$$

Chamando de:

$$x(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = [0] .$$

obtém-se a expressão:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Observações:

1- São variáreis naturais, tensão nos capacitores e corrente nos indutores.

2- A cada capacitor, escrever uma equação de corrente (LKC), evitando fonte de tensão na escolha do nó.

3- A cada indutor, escrever uma equação de tensão (LKT), evitando fonte de corrente na escolha da malha.

Exemplo 1: Considere o circuito da Figure 2 a seguir.

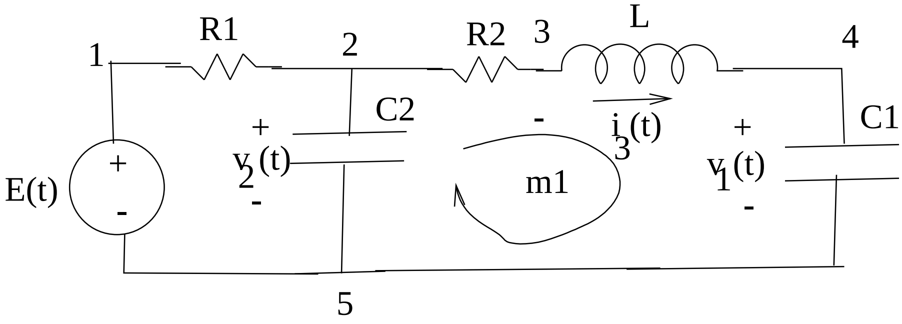


Figure 2: Circuito Exemplo 1

- Nó 2: $C_2\frac{dv_2}{dt} + i_3 - \frac{E(t)-v_2}{R_1} = 0$
- Nó 4: $C_1\frac{dv_1}{dt} = i_3$

- Malha 1: $L\frac{di_3}{dt} + R_2 i_3 + v_1 - v_2 = 0$

Re-arrumando:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} i_3 \\ \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{1}{C_2} i_3 - \frac{1}{R_1 C_2} v_2 + \frac{1}{C_2} E(t) \\ \frac{di_3}{dt} &= -\frac{R_2}{L} i_3 - \frac{1}{L} v_1 + \frac{1}{L} v_2 \end{cases}$$

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{i}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_2} \\ 0 \end{bmatrix} E(t)$$

Exemplo 2: Dada uma equação diferencial de ordem $n$, pode-se re-escrevê-la na forma de equações de estado, como no exemplo a seguir (de ordem 3).

$$\frac{d^3y}{dt^3} + a_2\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_o y = u(t)$$

Chamando de:

$$\begin{cases} x_1 = y & \Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{dy}{dt} = x_2 \\ x_2 = \frac{dy}{dt} & \Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{d^2y}{dt^2} = x_3 \\ x_3 = \frac{d^2y}{dt^2} & \Rightarrow \dot{x}_3 = -a_o x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 + u(t) \end{cases}$$

Consequentemente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_o & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Exemplo 3: No caso da Figure 1, foi visto que:

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC}v(t) = \frac{1}{LC}E(t)$$

Chamando de $x_1(t) = v(t)$, $x_2(t) = \frac{dv(t)}{dt}$ e $u(t) = E(t)$, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u(t)$$

## 2 Resolução de Equações de Estado

Foi visto que uma equação diferencial de um sistema monovariável de primeira ordem não autônoma do tipo:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

com $x(0)$ conhecido, pode ser resolvido utilizando a expressão (ver Capítulo IV):

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_o^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \qquad (1)$$

Analogamente, equação de estado do tipo:

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

pode ser resolvido utilizando:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_o^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)d\tau \qquad (2)$$

onde $A$ e $B$ são matrizes.

Como determinar $e^{At}$?

Novamente, fazendo analogia ao caso monovariável:

$e^{xt} = 1 + xt + \frac{1}{2}(xt)^2 + ... = \Sigma_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(xt)^i$

obtém-se:

$e^{At} = 1 + At + \frac{1}{2}(At)^2 + ... = \Sigma_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(At)^i$

Portanto, $e^{At}$ é uma matriz de mesma dimensão de $A$.

Se a matriz $A$ for diagonal, ou seja:

$A = diag[a_{11}, a_{22}, a_{33}...]$:

$e^{At} =$
$diag[1, 1, 1, ...] + diag[a_{11}t, a_{22}t, a_{33}t, ...] + ... =$

$$diag\begin{bmatrix} 1 + a_{11}t + \frac{1}{2}(a_{11}t)^2 + ... \\ 1 + a_{22}t + \frac{1}{2}(a_{22}t)^2 + ... \\ . \\ . \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{a11t} & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & e^{a22t} & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & e^{annt} \end{bmatrix}$$

Consequentemente, se $u(t) = 0$:

$$x(t) = e^{At}x(0) = \begin{bmatrix} x_{10}e^{a11t} \\ x_{20}e^{a22t} \\ . \\ . \\ x_{n0}e^{annt} \end{bmatrix}$$

o que permite obter as soluções facilmente:

$$\begin{cases} x_1(t) = & x_{10}e^{a11t} \\ x_2(t) = & x_{20}e^{a22t} \\ . & . \\ . & . \\ x_n(t) = & x_{n0}e^{annt} \end{cases}$$

Uma forma de diagonalizar a matriz $A$ sem perder as suas características é fazendo transformação de similaridade, que a seguir é mostrada.

Considere $T$ uma matriz de transformação de similaridade:

$x(t) = T\tilde{x}(t)$

Assim $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ fica:

$T\frac{\tilde{x}(t)}{dt} = AT\tilde{x}(t) + Bu(t)$

$T^{-1}T\frac{\tilde{x}(t)}{dt} = T^{-1}AT\tilde{x}(t) + T^{-1}Bu(t)$

Chamando de $\tilde{A} = T^{-1}AT = diag[\lambda_1, \lambda_2, ...]$, $\tilde{B} = T^{-1}B$ obtém-se:

$\frac{\tilde{x}(t)}{dt} = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t)$

Os auto-valores de $A$ e de $\tilde{A}$ são os mesmos.

Para cada valor de $\lambda_i$ pode-se encontrar um auto-vetor $v^i$ associado:

$$Av^i = \lambda_i v^i$$

A matriz $T$ pode ser determinada utilizando os auto-vetores $v^i$:

$$T = [v^1 \;\; v^2 \;\; v^3 \;\; \ldots \;\; v^n]$$

Exemplo: Seja a equação diferencial:

$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 0$ com $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$

1. Colocar na forma de equação de estado.
2. Encontre a matriz $T$ de transformação de

similaridade tal que $\tilde{A} = T^{-1}AT$ seja diagonal.

3. Ache $e^{\tilde{A}t}$.

4. Ache a solução do sistema obtido em 1.

Solução:

1- $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$.
Logo $\dot{x}_1 = x_2$ e $\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

com:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2- Determinação da matriz $T$:

Auto-valores de $A$ são $\lambda$ que satisfazem:

$det(A - \lambda I) = 0$

ou, da equação característica associada à equação diferencial:

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

Portanto: $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$.

Para $\lambda_1 = -1$:

$Av^1 = -1v_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{bmatrix}$$

que fornece:

$$\begin{cases} \quad v_2^1 \quad = -v_1^1 \\ -2v_1^1 - 3v_2^1 = -v_2^1 \end{cases}$$

Escolhendo $v_1^1 = 1$ (tem um grau de liberadde), obém-se:

$$v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Analogamente para $\lambda_2 = -2$, escolhendo $v_1^2 = 1$:

$$v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Consequentemente:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

3- $e^{\tilde{A}t}$

Como:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

4- Para achar $x(t)$:

$x(t) = Te^{\tilde{A}t}T^{-1}x(0)$ com:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$T^{-1} = \frac{1}{det(T)} Adjunta(T)$

$$T^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ou seja:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Como $x_1(t) = y(t)$ e $x_2(t) = \dot{y}(t)$:

$$\begin{cases} y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \\ \dot{y}(t) = -2e^{-t} + 2e^{-2t} \end{cases}$$

A Figure 3 mostra as trajetórias de $y(t)$ e de $\dot{y}(t)$ no tempo.

A. Y.
DSE-FEEC-UNICAMP
1s/2020

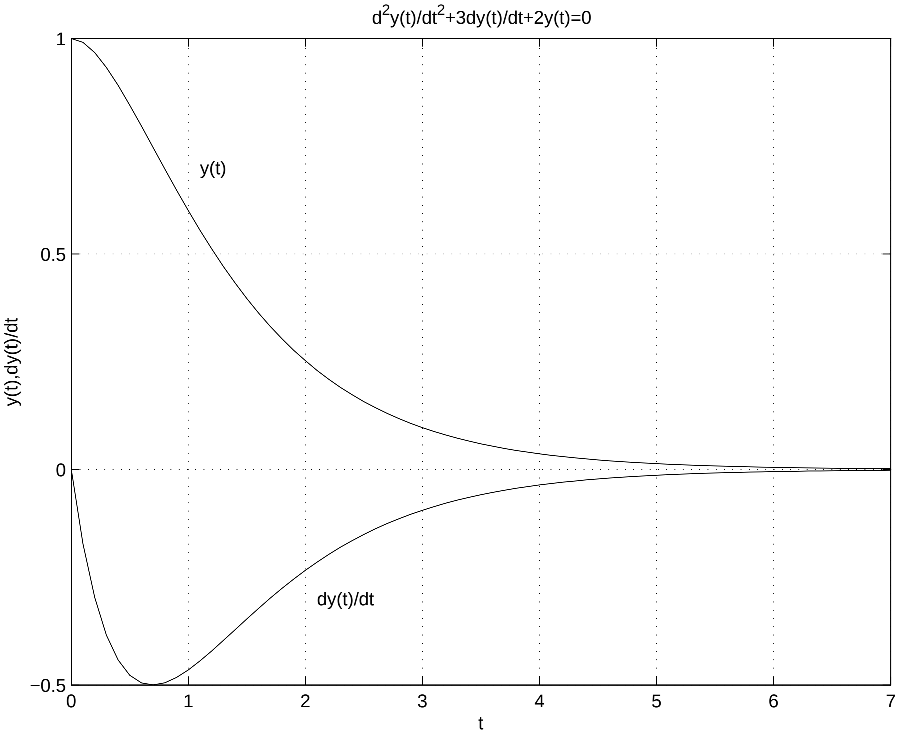


Figure 3: Respostas $y(t)$ e $\dot{y}(t)$