

## **EA513 I - Circuitos Elétricos I**

### **Cap. V - Circuitos de Segunda Ordem**

Como visto no capítulo anterior, capacitores e indutores são elementos armazenadores de energia. Assim, ao escrever um modelo matemático de um circuito elétrico com dois ou mais indutores e/ou capacitores, obtém-se equação diferencial de ordem superior.

#### **1 Circuitos autônomos de segunda ordem**

Quando o circuito é do tipo  $RLC$  (com um resistor, um indutor e um capacitor), obtém-se equação diferencial de segunda ordem.

Circuitos autônomos de segunda ordem são aqueles sem fontes, como mostrado na Figure 1 a seguir (circuito  $RLC$ ).

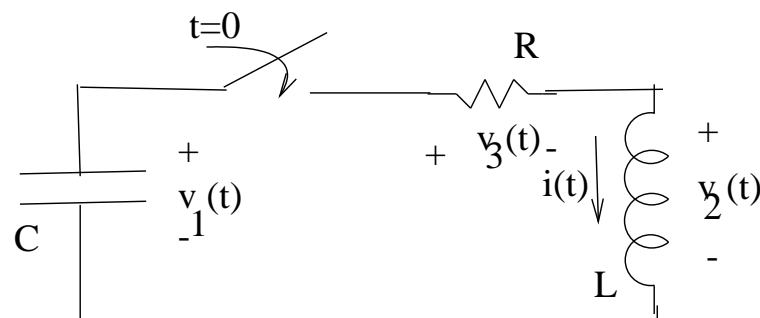


Figure 1: Circuito  $RLC$  autônomo de segunda ordem

A chave é fechada em  $t = 0$ , quando  $v_1(0)$  e  $i(0)$  são conhecidos, e as seguintes equações podem ser escritas:

$$\begin{aligned} i &= -C \frac{dv_1}{dt} \\ v_2 &= L \frac{di}{dt} \\ v_3 &= Ri \\ v_1 &= v_2 + v_3 \end{aligned} \quad .$$

Consequentemente:  $v_1 = L \frac{di}{dt} + Ri$

Ou seja:

$$v_1 = -LC \frac{d^2 v_1}{dt^2} + RC \frac{dv_1}{dt}$$

Portanto:

$$\frac{d^2 v_1}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{LC} v_1 = 0$$

com  $v_1(0)$  e  $\frac{dv_1(0)}{dt} = -\frac{1}{C} i(0)$

que é uma equação diferencial linear homogênea a coeficientes constantes de segunda ordem.

Outras configurações de circuitos autônomos de segunda ordem são possíveis, como *RLC* paralelo, misto, etc..

A literatura costuma escrever as equações diferenciais de segunda ordem na forma:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dx(t)}{dt} + \omega_n^2 x(t) = 0$$

onde:

- $\omega_n$  = frequência natural de oscilação
- $\xi$  = fator de amortecimento

Analogamente ao visto em equações diferenciais de primeira ordem, a solução é do tipo:

$$x(t) = K e^{\lambda t}$$

Substituindo:

$$\frac{d^2}{dt^2} K e^{\lambda t} + 2\xi\omega_n \frac{d}{dt} K e^{\lambda t} + \omega_n^2 K e^{\lambda t} = 0$$

que fornece:

$$\lambda^2 + 2\xi w_n \lambda + w_n^2 = 0$$

que é conhecida como equação característica da equação diferencial acima.

Ela é um polinômio de segunda ordem, cuja solução fornece:

$$\lambda_{1,2} = -\xi w_n \pm w_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

3 situações são possíveis:  $\xi > 1$ ,  $\xi = 1$  e  $\xi < 1$ .

A)  $\xi > 1$

Neste caso  $\lambda_{1,2}$  são raízes reais e distintas.

A solução homogênea pode ser do tipo:

$$C_1 e^{\lambda_1 t} \text{ ou } C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Consequentemente a combinação linear delas também é solução homogênea:

$$x(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}$$

Os parâmetros  $K_1$  e  $K_2$  são determinados utilizando as condições iniciais  $x(0)$  e  $\frac{dx(0)}{dt}$ .

Exemplo: Considere o circuito da Figure 1 com  $R = 15\Omega$ ,  $L = 5$  H,  $C = 0.1$  F,  $v_1(0) = 1$  V,  $i(0) = -0.1$  A. Ache  $v_1(t)$ ,  $t \geq 0$ .

Solução: Neste caso:

$$\frac{R}{L} = 3 \text{ e } \frac{1}{LC} = 2$$

Note que  $2\xi\omega_n = 3$  e  $\omega_n^2 = 2 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{2}$  e  $\xi = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ .

Equação característica:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

que fornece:  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$

Portanto:  $v_1(t) = K_1e^{-t} + K_2e^{-2t}$

Como:

$$\begin{aligned}v_1(0) &= 1 = K_1 + K_2 \\ \frac{d}{dt}v_1(0) &= -\frac{1}{C}i(0) = -\frac{1}{0.1}(-0.1) = 1 \\ \frac{dv_1(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}(K_1e^{-t} + K_2e^{-2t}) = -K_1e^{-t} - \\ &2K_2e^{-2t}\end{aligned}$$

$$\text{obtem-se: } \frac{dv_1(0)}{dt} = -K_1 - 2K_2 = 1$$

Resolvendo:  $K_1 = 3$ ,  $K_2 = -2$

Ou seja:  $v_1(t) = 3e^{-t} - 2e^{-2t}$

cujo gráfico está mostrado na Figure 2.

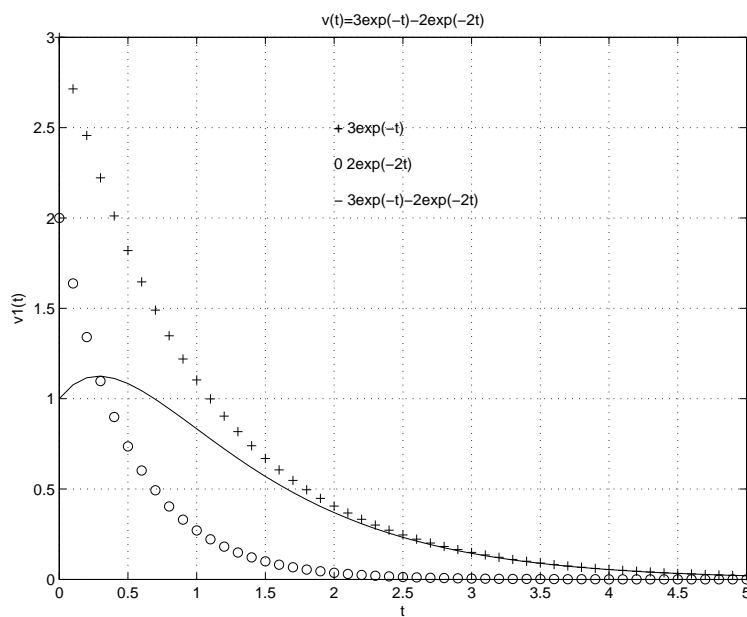


Figure 2: Resposta do circuito  $RLC$  com  $\xi > 1$



B)  $\xi = 1$

Neste caso,  $\xi - 1 = 0$  e, portanto, terá 2 raízes reais e iguais.

Para determinar a solução deste caso, pode-se fazer inicialmente  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  e depois  $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$ .

Foi visto que no caso  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  tem-se:

$$x(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}$$

com  $x(0)$  e  $\frac{dx(0)}{dt} = \dot{x}(0)$  conhecidos.

Resolvendo para  $K_1$  e  $K_2$  utilizando as condições iniciais, obtém-se:

$$K_1 = \frac{\lambda_2 x(0) - \dot{x}(0)}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$K_2 = \frac{-\lambda_1 x(0) - \dot{x}(0)}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Portanto:

$$x(t) = \frac{(\lambda_2 x(0) - \dot{x}(0))e^{\lambda_1 t} - (\lambda_1 x(0) - \dot{x}(0))e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Fazendo agora,  $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$ :

$$x(t) = \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{(\lambda_2 x(0) - \dot{x}(0))e^{\lambda_1 t} - (\lambda_1 x(0) - \dot{x}(0))e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

que resulta em indeterminação.

Utilizando L'Hopital e calculando o limite de  $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$ , adotando  $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$ :

$$x(t) = x(0)e^{\lambda t} - (\lambda x(0) - \dot{x}(0))te^{\lambda t}$$

Exemplo: Considere o circuito da Figure 1

com  $R = 4\Omega$ ,  $L = 1$  H,  $C = \frac{1}{4}$  F,  $v_1(0) = 1$  V,  $i(0) = 0$  A. Ache  $v_1(t)$ ,  $t \geq 0$ .

Solução:

$$\frac{R}{L} = 4, \frac{1}{LC} = 4$$

Equ. característica:  $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -2$$

$$v_1(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 t e^{-2t}$$
$$v_1(0) = 1, \dot{v}_1(0) = \frac{1}{C} i(0) = 0$$

obtém-se:  $K_1 = 1$ ,  $K_2 = 2$

$$\Rightarrow v_1(t) = e^{-2t} + 2te^{-2t}$$

cujo gráfico está apresentado na Figure 3.

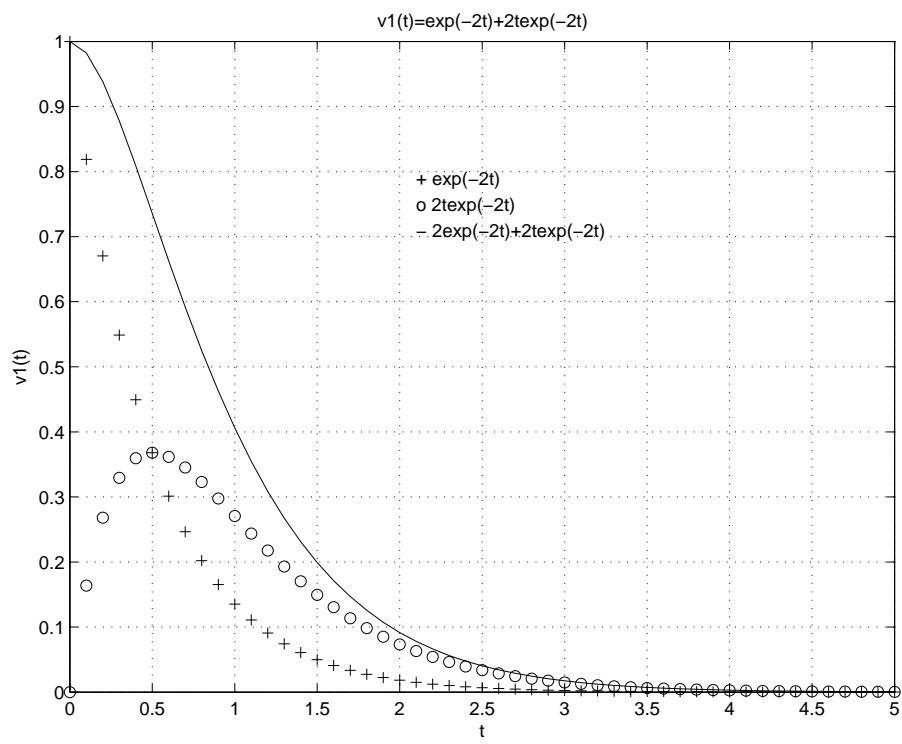


Figure 3: Resposta do circuito  $RLC$  com  $\xi = 1$

C)  $\xi < 1$

Quando  $\xi < 1$  a equação característica terá 2 raízes complexas conjugadas.

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

onde  $j = \sqrt{-1}$

Costuma-se escrever:

$$\lambda_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

sendo:  $\sigma = \xi\omega_n$  parte real,  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$   
frequência natural amortecida

A solução:

$$x(t) = K_1e^{\lambda_1 t} + K_2e^{\lambda_2 t}$$

fica:

$$x(t) = K_1 e^{(-\sigma - j\omega_d)t} + K_2 e^{(-\sigma + j\omega_d)t}$$

ou:

$$x(t) = e^{-\sigma t} (K_1 e^{-j\omega_d t} + K_2 e^{+j\omega_d t})$$

Lembrando a regra de Euler:

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

após algumas operações, chega-se a:

$$x(t) = A e^{-\sigma t} (\cos \theta \cos \omega_d t - \sin \theta \sin \omega_d t)$$

ou:

$$x(t) = A e^{-\sigma t} \cos(\omega_d t + \theta)$$

$A$  e  $\theta$  são determinados utilizando as condições iniciais  $x(0)$  e  $\dot{x}(0)$ .

Exemplo: Retomando o circuito da Figure 1 com  $R = 4\Omega$ ,  $L = 2$  H,  $C = \frac{1}{20}$  F,  $v_1(0) = 1$  V,  $i(0) = 0$  A, ache  $v_1(t)$ ,  $t \geq 0$ .

Solução:

$$\frac{R}{L} = 2, \frac{1}{LC} = 10$$

Equ. característica:  $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$

$$\Rightarrow 2\xi\omega_n = 2, \omega_n^2 = 10$$

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{10}, \xi = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \sigma = \xi\omega_n = 1, \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = 3$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d = -1 \pm j3$$

$$v_1(t) = Ae^{-t}\cos(3t + \theta)$$

$$v_1(0) = 1 = A\cos(\theta)$$

$$\dot{v}_1(0) = 0 = -A\sin(\theta) - A\cos(\theta)$$

resolvendo em  $A$  e  $\theta$ :

$$A = \sqrt{2} \text{ e } \theta = -45^\circ$$

Finalmente:

$$v_1(t) = \sqrt{2}e^{-t}\cos(3t - 45^\circ)$$

cujo gráfico está mostrado na Figure 4.



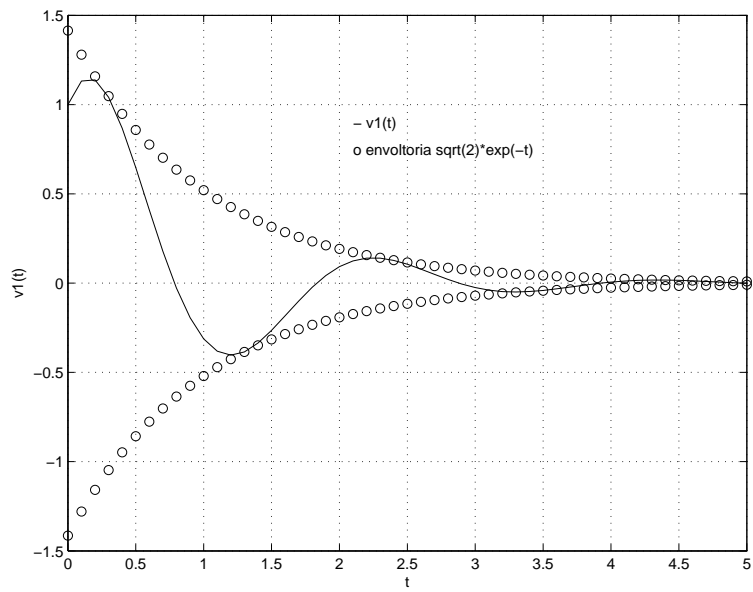


Figure 4: Resposta do circuito  $RLC$  com  $\xi < 1$

D) Caso particular

Quando  $R = 0\Omega$ ,  $\xi = \frac{R}{2w_nL} = 0$

$\Rightarrow w_d = w_n$  e  $\sigma = 0$

e a solução fica:

$$v_1(t) = A \cos(w_n t + \phi)$$

$A$  e  $\phi$  são determinados a partir das condições iniciais  $v_1(0)$  e  $\dot{v}_1(0)$

Note que:

$$i(t) = -C \frac{dv_1(t)}{dt} = Aw_n C \sin(w_n t + \phi)$$

e, portanto,  $v_1(t)$  no capacitor e  $i(t)$  no indutor são sinais oscilatórios sem amortecimento

(oscila para sempre).

Lembrando que as energias em capacitores e indutores são:

- $\varepsilon_C(t) = \frac{1}{2}Cv_1^2(t) = \frac{1}{2}A^2C\cos^2(\omega_n t + \phi)$
- $\varepsilon_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t) = \frac{1}{2}A^2LC^2\omega_n^2\sin^2(\omega_n t + \phi)$

$$\Rightarrow \varepsilon_{total} = \varepsilon_C(t) + \varepsilon_L(t) = \frac{1}{2}A^2C$$

pois  $\omega_n = \frac{1}{LC}$ .

A energia total no circuito é constante no tempo, migrando entre capacitor e indutor.

Exemplo: Seja o circuito da Figure 1 com  $R = 0\Omega$ ,  $L = 10 \text{ H}$ ,  $C = 10\mu\text{F}$ ,  $v_1(0) = 1 \text{ V}$ ,  $i(0) = 0 \text{ A}$ . Achar  $v_1(t)$  e a energia total no circuito.

Solução: Como  $R = 0\Omega$ ,  $\xi = 0$ ,  $\sigma = 0$

$$w_d = w_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 10 \cdot 10^{-6}}} = 100$$

$$\Rightarrow v_1(t) = A \cos(100t + \phi)$$

$$v_1(0) = 1 = A \cos \phi$$

$$\dot{v}_1(0) = -\frac{1}{C}i(0) = -A100 \sin \phi = 0$$

$$\Rightarrow \phi = 0 \text{ e } A = 1$$

$$v_1(t) = \cos 100t \text{ V}$$

$$i(t) = -C \frac{dv_1(t)}{dt} = 10^{-3} \sin 100t$$

$$\varepsilon_C(t) = \frac{1}{2} C v_1^2(t) = 5 \cdot 10^{-6} \cos^2 100t$$

$$\varepsilon_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) = 5 \cdot 10^{-6} \sin^2 100t$$

$$\varepsilon_{total} = \varepsilon_C(t) + \varepsilon_L(t) = 5 \cdot 10^{-6} \text{ J} = 5 \mu\text{J}$$

A Figure 5 mostra o comportamento da energia no circuito.

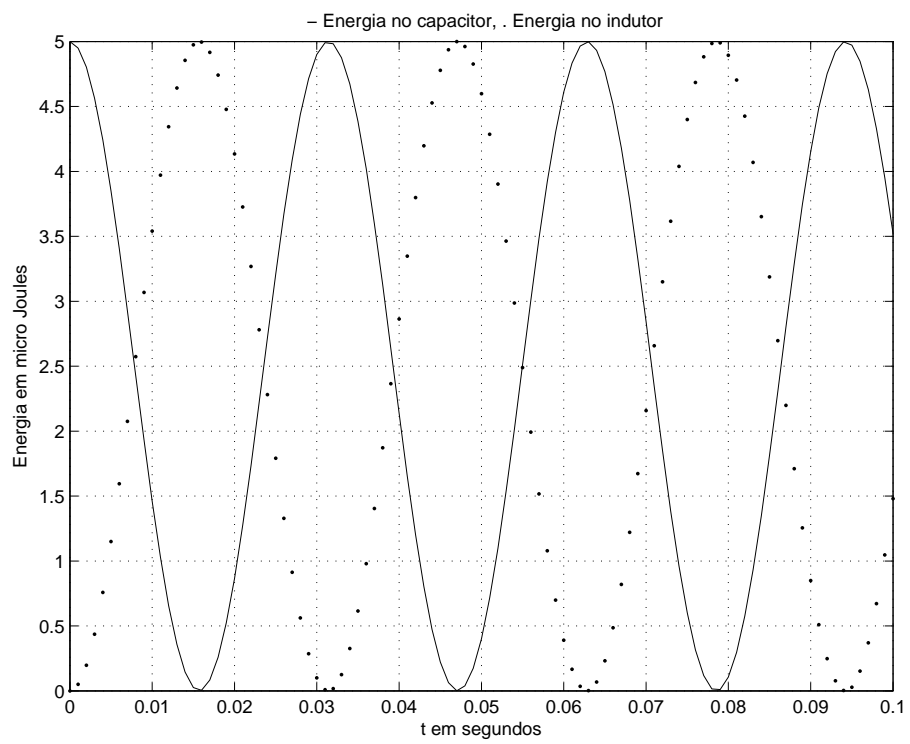


Figure 5: Energia num circuito  $LC$

## 2 Circuitos não autônomos de segunda ordem

São circuitos  $RLC$  (ou variantes) com fonte de tensão ou de corrente, como mostrado na Figure 6.

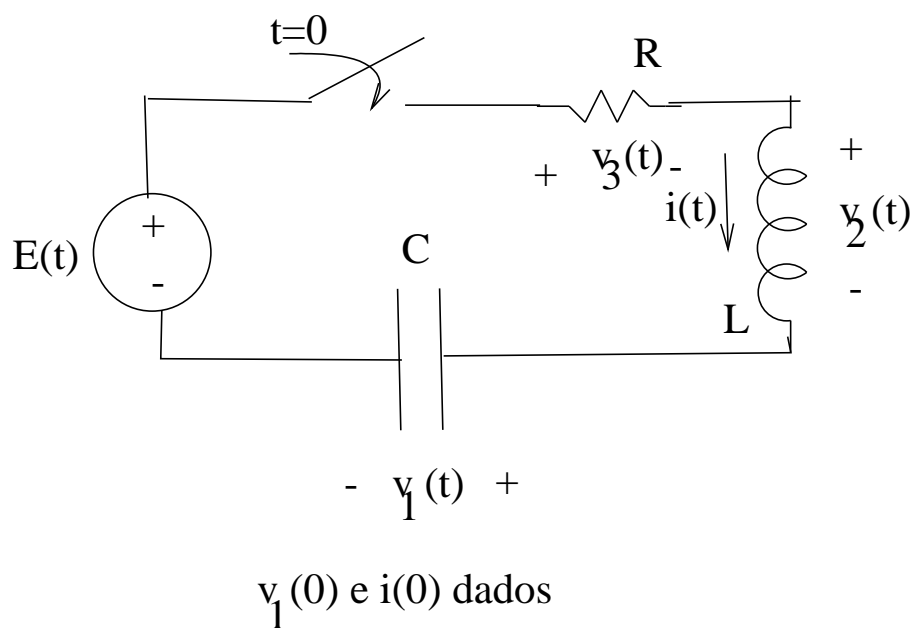


Figure 6: Circuito  $RLC$  com fonte

A diferença com relação ao caso autônomo é a presença de uma fonte. Escrevendo as suas equações (LKT, LKC, relação entre tensão e

corrente em cada componente  $R$ ,  $L$  e  $C$ ), obtém-se:

$$\frac{d^2 v_1}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{LC} v_1 = \frac{1}{LC} E(t)$$
$$v_1(0) \text{ e } \frac{dv_1(0)}{dt} = -\frac{1}{C} i(0) \text{ dados}$$

que é uma equação diferencial linear a coeficientes constantes de segunda ordem.

Outras configurações de circuitos são possíveis, como em paralelo, misto, com fonte de corrente, etc..

Em analogia ao caso autônomo, pode-se escrever:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\xi w_n \frac{dx(t)}{dt} + w_n^2 x(t) = w_n^2 E(t)$$

Adotando a metodologia utilizada no caso de



circuito de primeira ordem autônomo (solução homogênea) e no método de coeficientes a determinar apresentado no caso de circuito de primeira ordem não autônomo, a seguir apresentase alguns exemplos de abordagem na solução conforme diferentes  $\xi$  e  $E(t)$ .

**Exemplo 1:** Seja o circuito da Figure 6 com  $R = 15 \Omega$ ,  $L = 5 \text{ H}$ ,  $C = \frac{1}{10} \text{ F}$ ,  $v_1(0) = 0 \text{ V}$ ,  $i(0) = 0 \text{ A}$ ,  $E(t) = 5 \text{ V}$ . Determinar  $v_1(t)$ ,  $t \geq 0$ .

$$\text{Solução: } 2\xi w_n = \frac{R}{L} = 3 \text{ e } w_n^2 = \frac{1}{LC} = 2$$

$$\text{Portanto: } \xi = \frac{3\sqrt{2}}{4} > 1, w_n = \sqrt{2}$$

A equação diferencial fica:

$$\frac{d^2 v_1(t)}{dt^2} + 3 \frac{dv_1(t)}{dt} + 2v_1(t) = 10$$

com  $v_1(0) = 0$  V e  $\dot{v}_1 = 0$  V/seg.

a) Homogênea:

$$\frac{d^2 v_{1h}}{dt^2} + 3 \frac{dv_{1h}}{dt} + 2v_{1h} = 0$$

Eq. característica:  $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$$

$$v_{1h}(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t}$$

b) Particular:

$$v_{1p}(t) = K_p \Rightarrow K_p = 5$$

Portanto  $v_{1p}(t) = 5$

c) Completa

$$v_1(t) = 5 + K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t}$$

Como:  $v_1(0) = 0$  e  $i(0) = 0 \Rightarrow \dot{v}_1(0) = 0$

- $v_1(0) = 0 = 5 + K_1 + K_2$
- $\dot{v}_1(0) = 0 = -K_1 - 2K_2$

Resolvendo:

$$K_1 = -10, K_2 = 5$$

Logo:  $v_1(t) = 5 - 10e^{-t} + 5e^{-2t}$

cujo gráfico está na Figure 7 a seguir.

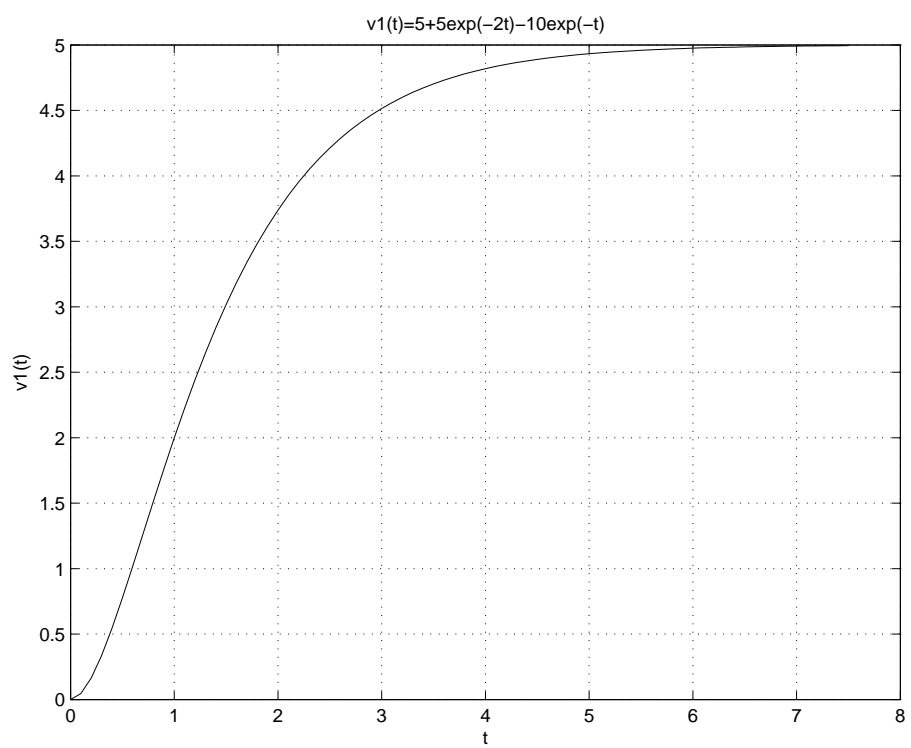


Figure 7:  $v_1(t)$  com  $\xi > 1$

Note que a figura começa em  $v_1(0) = 0$  e tende para o valor de regime  $v_1(t) = 5$  quando  $t \rightarrow \infty$ , que é a solução particular da equação diferencial.

Concluindo, a parcela homogênea tende para zero quando  $t \rightarrow \infty$  e, portanto, também chamada de parcela transitória, e a solução particular é o valor de regime.

**Exemplo 2:** Seja o circuito da Figure 6 com  $R = 4 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = \frac{1}{100} \text{ F}$ ,  $v_1(0) = 0 \text{ V}$ ,  $i(0) = 0 \text{ A}$ ,  $E(t) = 5 \text{ V}$ . Determinar  $v_1(t)$ ,  $t \geq 0$ .

$$\text{Solução: } 2\xi w_n = \frac{R}{L} = 4 \text{ e } w_n^2 = \frac{1}{LC} = 10$$

$$\text{Portanto: } \xi = \frac{\sqrt{10}}{5} < 1, w_n = \sqrt{10}, \sigma = \xi w_n = 2 \text{ e } w_d = w_n \sqrt{1 - \xi^2} = 2\sqrt{24} \simeq 9.8$$

A equação diferencial fica:

$$\frac{d^2v_1(t)}{dt^2} + 4\frac{dv_1(t)}{dt} + 100v_1(t) = 500$$

com  $v_1(0) = 0$  V e  $\dot{v}_1 = 0$  V/seg.

a) Homogênea:

$$v_{1h}(t) = Ae^{-2t}\cos(2\sqrt{24}t + \phi)$$

b) Particular:

$$v_{1p}(t) = K_p \Rightarrow K_p = 5$$

Portanto  $v_{1p}(t) = 5$

c) Completa

$$v_1(t) = 5 + Ae^{-2t}\cos(2\sqrt{24}t + \phi)$$

Como:  $v_1(0) = 0$  e  $i(0) = 0 \Rightarrow \dot{v}_1(0) = 0$

- $v_1(0) = 0 = 5 + A\cos\phi$

- $\dot{v}_1(0) = 0 = -2A\cos\phi - 2\sqrt{24}A\sin\phi$

Resolvendo:

$$A \simeq 5.1, \phi \simeq 168.463^\circ$$

Logo:  $v_1(t) = 5 + 5.1e^{-2t}\cos(2\sqrt{24}t + 168.463^\circ)$

cujo gráfico está na Figure 8 a seguir.

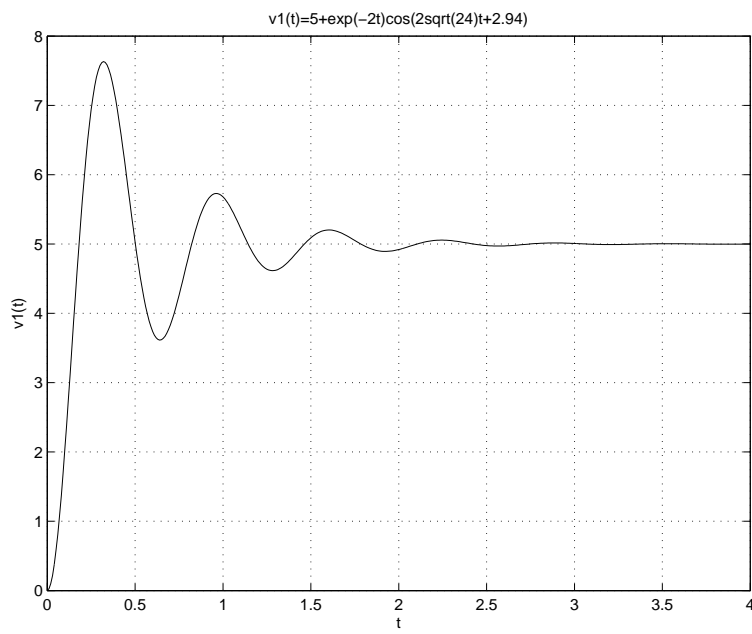


Figure 8:  $v_1(t)$  com  $\xi < 1$



Nesta figura, novamente pode-se notar que o  $v_1(t)$  inicia em  $v_1(0) = 0$  e tende para a solução particular quando  $t \rightarrow \infty$

**Exemplo 3:** Seja o circuito da Figure 6 com  $R = 0 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = \frac{1}{4} \text{ F}$ ,  $v_1(0) = 0 \text{ V}$ ,  $i(0) = 0 \text{ A}$ ,  $E(t) = 5 \text{ V}$ . Determinar  $v_1(t)$ ,  $t \geq 0$ .

$$\text{Solução: } 2\xi\omega_n = \frac{R}{L} = 0 \text{ e } \omega_n^2 = \frac{1}{LC} = 4$$

$$\text{Portanto: } \xi = 0, \omega_n = \sqrt{2} = 2, \sigma = \xi\omega_n = 0 \text{ e } \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = \omega_n = 2$$

A equação diferencial fica:

$$\frac{d^2v_1(t)}{dt^2} + 4v_1(t) = 20$$

com  $v_1(0) = 0 \text{ V}$  e  $\dot{v}_1 = 0 \text{ V/seg}$ .

a) Homogênea:

$$v_{1h}(t) = Ae^{-\sigma t} \cos(\omega_d t + \phi)$$

com  $\sigma = 0$  e  $\omega_d = \omega_n = 2$

$$v_{1h}(t) = A \cos(2t + \phi)$$

b) Particular:

$$v_{1p}(t) = K_p \Rightarrow K_p = 5$$

Portanto  $v_{1p}(t) = 5$

c) Completa

$$v_1(t) = 5 + A \cos(2t + \phi)$$

- $v_1(0) = 0 = 5 + A\cos\phi$
- $\dot{v}_1(0) = 0 = -2A\sin\phi$

Resolvendo:  $A = -5, \phi = 0$

$$v_1(t) = 5 - 5\cos(2t) = 5(1 - \cos 2t)$$

Ou seja, oscila entre 0 e  $2E(t) = 10$  a uma frequência de  $w_n = 2$  rad/seg.

Cabe lembrar que o período de oscilação  $T$  é da forma:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{w_n} \text{ e que neste exemplo } T = \pi.$$

A Figure 9 mostra o gráfico correspondente.

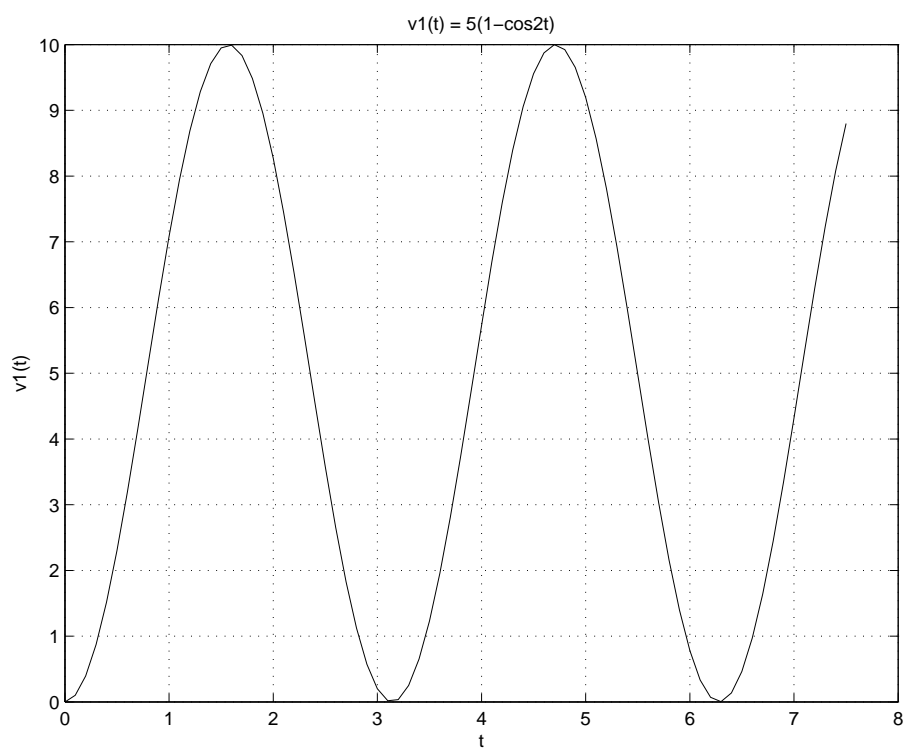


Figure 9:  $v_1(t)$  com  $R = 0\Omega$

**Exemplo 4:** Seja o circuito da Figure 6 com  $R = 0 \Omega$ ,  $v_1(0) = 0 \text{ V}$ ,  $i(0) = 0 \text{ A}$ ,  $E(t) = E \cos \omega t \text{ V}$ . Determinar  $v_1(t)$ ,  $t \geq 0$ .

$$\text{Solução: } 2\xi\omega_n = \frac{R}{L} = 0 \text{ e } \omega_n^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\text{Portanto: } \xi = 0, \omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \sigma = \xi\omega_n = 0 \\ \text{e } \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = \omega_n$$

A equação diferencial fica:

$$\frac{d^2v_1(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}v_1(t) = \frac{1}{LC}E \cos \omega t$$

com  $v_1(0) = 0 \text{ V}$  e  $\dot{v}_1 = 0 \text{ V/seg}$ .

a) Homogênea:

$$v_{1h}(t) = Ae^{-\sigma t} \cos(\omega_d t + \phi)$$

com  $\sigma = 0$  e  $w_d = w_n$

$$v_{1h}(t) = A \cos(w_n t + \phi)$$

b) Particular:

$$v_{1p}(t) = K_p \cos(\omega t + \phi)$$

- $\frac{dv_{1p}(t)}{dt} = -\omega K_p \sin(\omega t + \phi)$
- $\frac{d^2 v_{1p}(t)}{dt^2} = -\omega^2 K_p \cos(\omega t + \phi)$

Substituindo na equação diferencial e resolvendo em  $K_p$  e  $\phi$ , obtém-se:

- $K_p = \frac{E}{1 - \omega^2 LC}$
- $\phi = 0$

$$\text{Portanto: } v_{1p}(t) = \frac{E}{1 - \omega^2 LC} \cos \omega t$$

c) Completa

$$v_1(t) = A \cos(\omega_n t + \phi) + \frac{E}{1 - \omega^2 LC} \cos \omega t$$

$$\bullet v_1(0) = 0 = A \cos \phi + \frac{E}{1 - \omega^2 LC}$$

$$\bullet \dot{v}_1(0) = 0 = -2A \sin \phi$$

$$\Rightarrow \phi = 0, A = -\frac{E}{1 - \omega^2 LC}$$

$$v_1(t) = \frac{E}{1 - LC\omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_n t)$$

Para analisar quando  $\omega \rightarrow \omega_n$ , sejam  $L = 1$  H,  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  $E(t) = 5 \cos \omega t \Rightarrow LC = 10^{-6} \Rightarrow \omega_n = 1000$

a)  $\omega = 100$  rad/seg. ( $\omega \ll \omega_n$ )

$$v_1(t) \cong 5.05 (\cos 100t - \cos 1000t)$$

b)  $w = 500$  rad/seg. ( $w < w_n$ )

$$v_1(t) \cong 6.67(\cos 500t - \cos 1000t)$$

c)  $w = 900$  rad/seg. ( $w$  próximo de  $w_n$ )

$$v_1(t) \cong 26.31(\cos 900t - \cos 1000t)$$

Ou seja, à medida que  $w \rightarrow w_n$ , a amplitude do sinal cresce, sendo que quando  $w \rightarrow \infty$  a amplitude de oscilação tende a  $\infty$ . Este fenômeno é chamado de **ressonância**.

A Figure 10 apresenta esta situação.



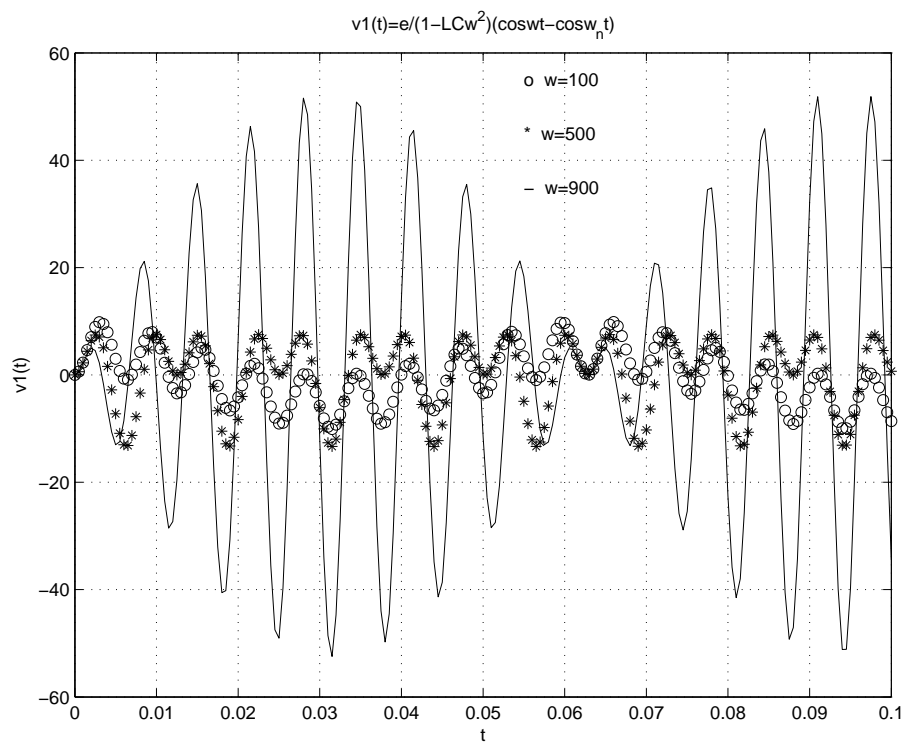


Figure 10: Amplitude de  $v_1(t)$  quando  $w \rightarrow w_n$

**Observação:** Coeficiente de Qualidade de um Circuito  $RLC$

Foi visto que em circuitos  $RLC$  com  $\xi < 1$ , tem-se:

$$v_h(t) = Ae^{-\sigma t} \cos(\omega_d t + \theta)$$

$$\text{com } \sigma = \xi \omega_n \text{ e } \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

que é oscilatório.

Define-se **Coeficiente de Qualidade  $Q$  de um Circuito  $RLC$**  como sendo:

$$Q = \frac{\omega_n}{2\xi\omega_n} = \frac{1}{2\xi}$$

que, lembrando que  $2\xi\omega_n = \frac{R}{L}$  e  $\omega_n^2 = \frac{1}{LC}$ , fornece:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Assim, quanto menor o  $R$ , maior é o  $Q$ , que significa maior qualidade do circuito  $RLC$ .

---

Akebo Yamakami  
DT-FEEC-UNICAMP  
1s/2020