Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DT-FEEC-UNICAMP

EA513 I - Circuitos Elétricos I

Cap. IV - Circuitos de Primeira Ordem

Capacitores e indutores são elementos armazenadores de energia modelados como:

- Capacitores: $i(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt}$
- Indutores: $v(t) = \frac{d\lambda}{dt} = L\frac{di}{dt}$

Portanto, ao escrever um modelo matemático de um circuito elétrico com indutores e/ou capacitores, obtém-se equação diferencial.

1 Circuitos autônomos de primeira ordem

Quando o circuito é do tipo RC (com um resistor e um capacitor) ou RL (um resistor e um indutor), obtém-se equação diferencial de primeira ordem.

Circuitos autônomos de primeira ordem são aqueles sem fontes, como mostrado na Figure 1 a seguir (circuito RC).

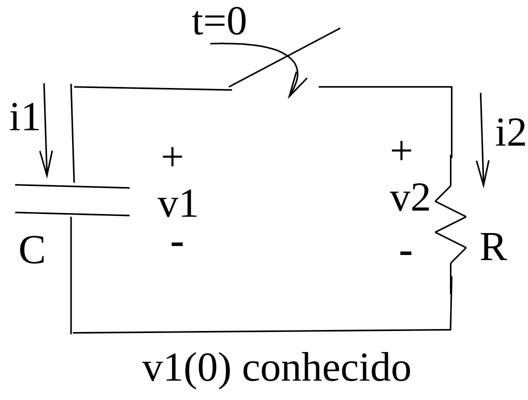

Figure 1: Circuito RC autônomo de primeira ordem

A chave é fechada em $t = 0$ e as seguintes equações podem ser escritas:

$$\begin{aligned}
&i_1 + i_2 = 0\\
&i_1 = C\frac{dv_1}{dt}\\
&v_2 = Ri_2 \Rightarrow i_2 = \frac{v_2}{R}\\
&v_1 = v_2
\end{aligned}.$$

Consequentemente:

$$C\frac{dv_1}{dt} + \frac{v_2}{R} = 0$$
$$\Rightarrow C\frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1}{R} = 0$$

ou, rearrumando:

$$\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{RC}v_1 = 0,\ v1(0)\ \mathit{conhecido}$$

que é uma equação diferencial linear homogênea a coeficientes constantes de primeira ordem.

A equação acima pode ser colocada na forma:

$\frac{dv_1}{dt} = (-\frac{1}{RC})v_1$

Logo, a derivada de v_1 é proporcional a v_1. A função que satizfaz esta condição é do tipo:

$v_1(t) = ke^{\lambda t}$

com λ e k desconhecidos. Esta expressão deve satisfazer a equação diferencial:

$\frac{d}{dt}(ke^{\lambda t}) = (-\frac{1}{RC})ke^{\lambda t}$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{RC}$

o que fornece: $v_1(t) = ke^{-\frac{1}{RC}t}$

Mas para $t = 0$, $v_1(t) = v_1(0)$ conhecido.

Logo, a solução é:

$$v_1(t) = v_1(0)e^{-\frac{1}{RC}t}$$

onde RC recebe o nome de **constante de tempo**.

Para $RC = 1$ e $v_1(0) = 1$, o gráfico de v_1 em função do tempo t fica como mostrado na Figure 2.

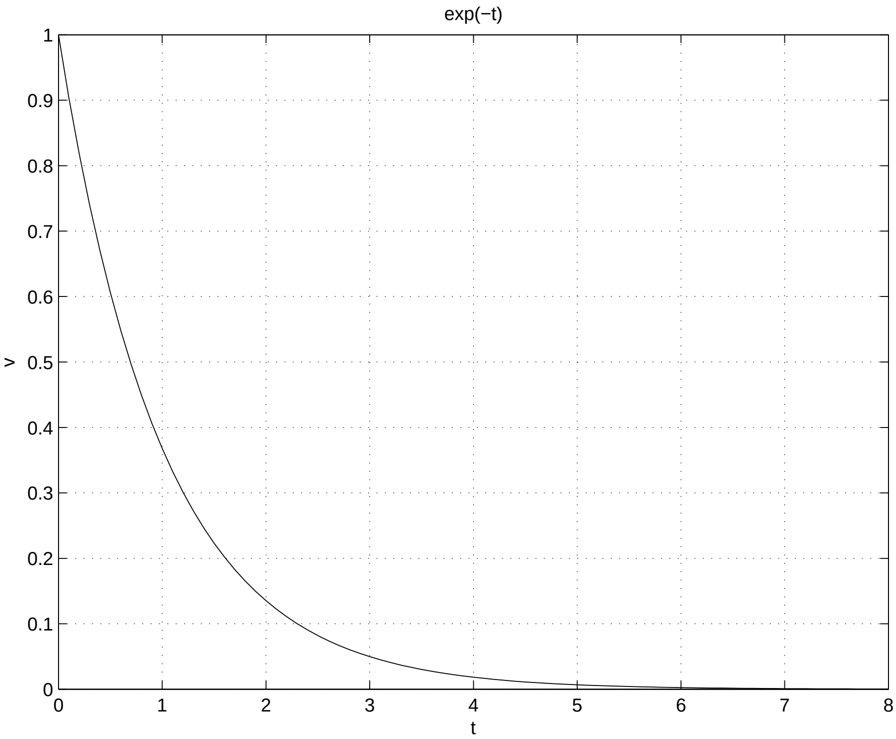

Figure 2: Circuito autônomo de primeira ordem

Do gráfico, é possível notar que:

- $t = 0$: $v(t) = v(0) = 1$
- $t = 1$: $v(t) = v(0)e^{-1} \cong 0.37v(0)$
- $t = 2$: $v(t) = v(0)e^{-2} \cong 0.13v(0)$
- $t = 3$: $v(t) = v(0)e^{-3} \cong 0.05v(0)$
- $t = 4$: $v(t) = v(0)e^{-4} \cong 0.02v(0)$

Considerando em termos percentuais, houve redução em relação ao valor inicial, de aproximadamente:

- $t = 0$: $\Delta v = 0\%$
- $t = 1$: $\Delta v \cong 63\%$
- $t = 2$: $\Delta v \cong 87\%$
- $t = 3$: $\Delta v \cong 95\%$
- $t = 4$: $\Delta v \cong 98\%$

A literatura adota as seguintes denominações:

- $t = 0$: condição inicial ou valor inicial (CI)
- $t \to \infty$: valor em regime permanente ou valor de regime

Frente ao exposto, normalmente considera-se que para $t \geq 4RC$ o sistema entrou em regime permanente ou em regime (depende da precisão desejada).

Na Figure 3, é mostrado um circuito RL autônomo.

Onde: $L\frac{di}{dt} + Ri = 0$

ou: $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$

que é uma equação idêntica ao de RC, trocando C por L e $\frac{1}{R}$ por R. Portanto, a solução

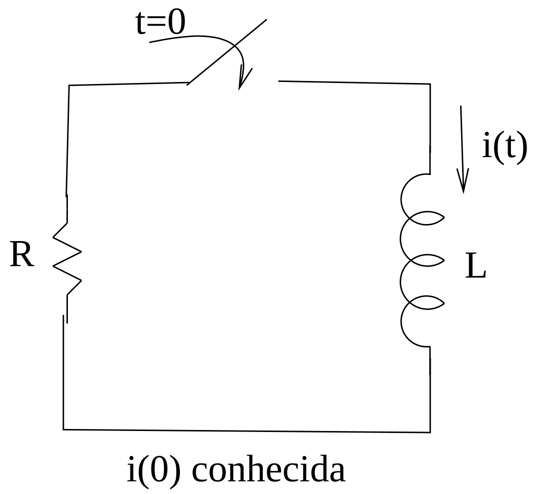

Figure 3: Circuito RL autônomo de primeira ordem

é:

$$i(t) = i(0)e^{-\frac{R}{L}t}$$

Obs.: Pode-se escrever:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i$$

$$di = -\frac{R}{L}idt$$

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt$$

Integrando no intervalo $i(0)$ e $i(t)$:

$$ln\frac{i(t)}{i(0)} = -\frac{R}{L}t$$

$$\Rightarrow i(t) = i(0)e^{-\frac{R}{L}t}$$

2 Circuitos não autônomos de primeira ordem

São circuitos RC ou RL com fonte de tensão ou de corrente, como mostrado na Figure 4.

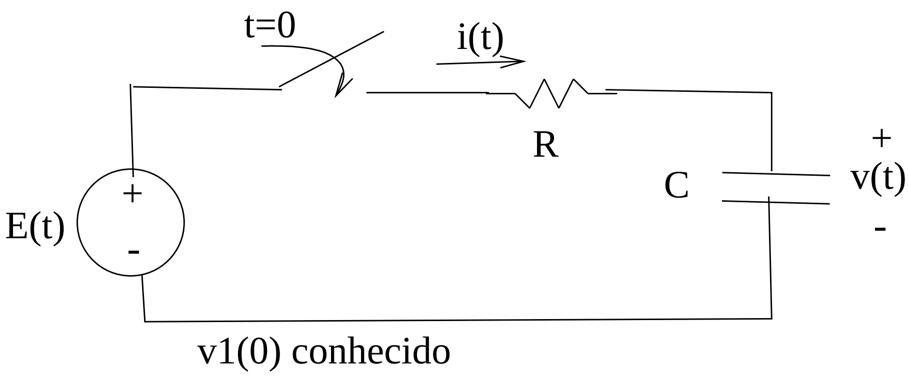

Figure 4: Circuito RC com fonte

Como:

- LKT: $Ri(t) + v(t) = E(t)$
- $i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$

obtém-se:

$$RC\frac{dv(t)}{dt} + v(t) = E(t),\ v(0) \text{ conhecido}$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem não autônoma.

De forma semelhante, para um circuito RL com fonte de tensão em série, obtém-se:

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}E(t)$$

Existem algumas formas para resolver a equação diferencial acima, como fórmula geral, método de coeficientes a determinar, transformada de

Laplace, etc.

A seguir o método de coeficientes a determinar é apresentado de forma resumida.

Seja a equação diferencial:

$$T\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = f(t)$$

e pode-se aplicar a propriedade de superposição:

a) Anulando a fonte $f(t)$ (considerando a condição inicial):

$$T\frac{dx_h(t)}{dt} + x_h(t) = 0$$

b) Considerando $f(t)$:

$$T\frac{dx_p(t)}{dt} + x_p(t) = f(t)$$

- $x_h(t)$ é chamada de **solução homogênea**
- $x_p(t)$ é chamada de **solução particular** (para cada $f(t)$)

A **solução completa** ou **geral** é a soma das duas partes:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$x_h(t)$ é obtida como visto em circuitos autônomos.

Para obter $x_p(t)$, utiliza-se a propriedade:

Se $f(t)$ e suas derivadas $\frac{df}{dt}, \frac{d^2f}{dt^2}, ..., \frac{d^kf}{dt^k}$ forem linearmente independentes (LI), existe uma solução particular $x_p(t)$ que é uma combinação linear de $f(t)$ e de suas derivadas

Ou seja:

$$x_p(t) = a_o f(t) + a_1 \frac{df}{dt} + a_2 \frac{d^2 f}{dt^2} + ... + a_k \frac{d^k f}{dt^k}$$

Os coeficientes $a_o, a_1, a_2, ..., a_k$ são determinados substituindo $x_p(t)$ na equação do item b) acima.

A propriedade acima permite estabeler a tabela que segue.

$f(t)$	$x_p(t)$
$E(t)$ Constante	K_p constante
Ee^{-at}	$K_p e^{-at}$
$\Sigma_{i=0}^{n} a_i t^i$	$\Sigma_{i=0}^{n} K_{pi} t^i$
$Ecos(wt + \phi)$	$K_c cos(wt + \phi) +$ $K_s sin(wt + \phi)$

A seguir, alguns exemplos são apresentados, utilizando o circuito RC não autônomo visto acima:

$$RC\frac{dv(t)}{dt} + v(t) = E(t),\ v(0) \text{ conhecido}$$

que pode ser escrito:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{1}{RC}E(t),\ v(0) \text{ conhecido}$$

Exemplo 1: $E(t) = E$ constante

a) Solução homogênea $v_h(t)$:

$$\frac{dv_h(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_h(t) = 0$$

Como visto em circuitos autônomos:

$$v_h(t) = K_h e^{-\frac{1}{RC}t}$$

b) Solução particular

$\frac{dv_p(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_p(t) = \frac{1}{RC}E$

Da tabela acima: $v_p(t) = K_p$ onde K_p é uma constante

Substituindo na equação diferencial em v_p:

$\frac{dK_p}{dt} + \frac{1}{RC}K_p = \frac{1}{RC}E$

$\Rightarrow K_p = E$

$\Rightarrow v_p(t) = E$

c) Solução completa:

$v(t) = v_h(t) + v_p(t) = K_h e^{-\frac{1}{RC}t} + E$

O valor de K_h é determinado utilizando a condição inicial $v(0)$ conhecido:

Para $t = 0$:

$$v(0) = K_h e^{-\frac{1}{RC}0} + E = K_H + E$$

$$\Rightarrow K_h = v(0) - E$$

Solução completa:

$$v(t) = (v(0) - E)e^{-\frac{1}{RC}t} + E$$

Rearranjando:

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{1}{RC}t} + E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

- $(v(0) - E)e^{-\frac{1}{RC}t}$ é sol. homogênea
- E é sol. particular
- $v(0)e^{-\frac{1}{RC}t}$ é resposta à entrada nula

- $E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$ é resposta à CI nula

Para $R = 5k\Omega$, $C = 1\mu F$, $E = 12$ V, $v(0) = 2$ V, tem-se:

$$RC = 5.10^3.1.10^{-6} = 5.10^{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{RC} = 200$$

e a solução fica:

$$v(t) = 12 + (2 - 12)e^{-200t}$$

$$v(t) = 12 - 10e^{-200t}$$

cujo gráfico está na Figure 5. Note que para:

- $t = 0: \quad v(0) = 2$ V
- $t \to \infty: \quad v(t) = 12$ V

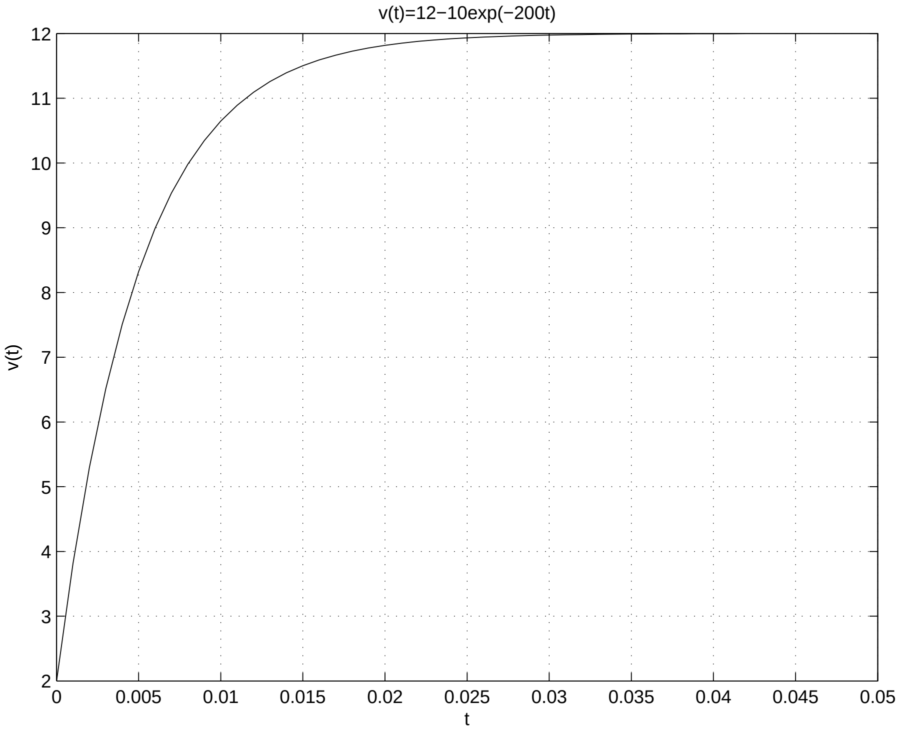

Figure 5: Resposta do circuito RC exemplo

Obs.: Lembrando que $i(t) = C\frac{v(t)}{dt}$, pode-se escrever:

$$i(t) = C\frac{d}{dt}(E + (v(0) - E)e^{-\frac{1}{RC}t})$$

$$i(t) = \frac{E - v(0)}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Considerando $v(0) = 0$, nota-se que (ver Figure 4):

- $t = 0 : i = \frac{E}{R} \Rightarrow$ C é curto
- $t \to \infty : i = 0 \Rightarrow$ C é aberto

Observação 1: Para circuito RL com fonte de tensão como mostrado na Figure 6, seguindo os passos do caso RC, obtém-se:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{1}{L}E$$

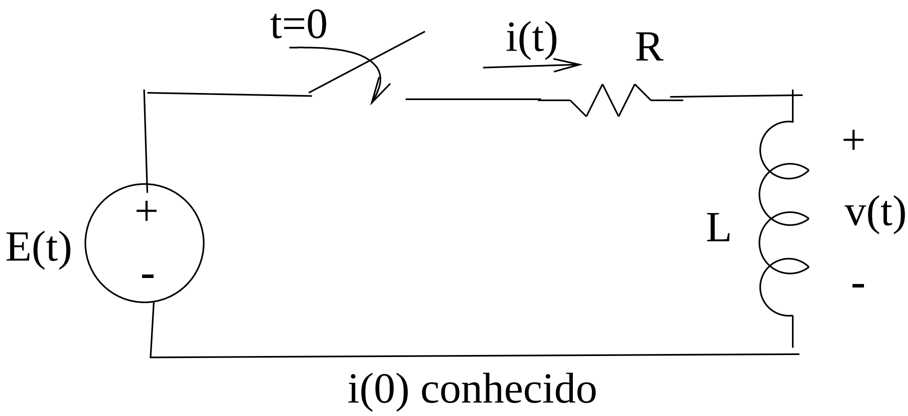

Figure 6: Circuito RL não autônomo

Sol. homogênea: $i_h(t) = K_h e^{-\frac{R}{L}t}$

Sol. particular: $i_p(t) = \frac{E}{R}$

e a solução completa:

$$i(t) = \frac{E}{R} + (i(0) - \frac{E}{R})e^{-\frac{R}{L}t}$$

Como $v(t) = L\frac{di}{dt}$

$$v(t) = R(\frac{E}{R} - i(0))e^{-\frac{R}{L}t}$$

o que fornece, quando $i(0) = 0$ (ver Figure 6):

- $t = 0 : v(t) = E \Rightarrow L$ é aberto
- $t \to \infty : v(t) = 0 \Rightarrow$ é curto

Resumindo:

- $t = 0$: **um capacitor se comporta como curto**
- $t \to \infty$: **um capacitor se comporta como aberto**
- $t = 0$: **um indutor se comporta como aberto**
- $t \to \infty$: **um indutor se comporta como curto**

Observação 2: Para circuitos de primeira ordem com entrada constante, pode-se determinar uma solução utilizando a expressão:

$$x(t) = x(\infty) + (x(0) - x(\infty))e^{-\lambda t}$$

onde:

- $x(0) =$ condição inicial
- $x(\infty) =$ condição final
- $\lambda =$ inverso da constante de tempo

Exemplo 2: $E(t) = Ee^{-at}$

a) Solução homogênea $v_h(t)$:

$\frac{dv_h(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_h(t) = 0$
Como visto em circuitos autônomos:

$$v_h(t) = K_h e^{-\frac{1}{RC}t}$$

b) Solução particular

$$\frac{dv_p(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_p(t) = Ee^{-at}$$

Da tabela:

$$v_p(t) = K_p e^{-at}$$

Substituindo na equação diferencial:

$$-aK_p e^{-at} + \frac{1}{RC}K_p e^{-at} = \frac{E}{RC}e^{-at}$$

$$\Rightarrow K_p = \frac{E}{1-aRC}$$

Logo: $v_p(t) = \frac{E}{1-aRC}e^{-at}$

c) Solução completa:

$$v(t) = K_h e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{E}{1-aRC}e^{-at}$$

Logo, para $t = 0$:

$K_h = v(0) - \frac{E}{1-aRC}$

$v(t) = (v(0) - \frac{E}{1-aRC})e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{E}{1-aRC}e^{-at}$

que pode ser reescrita como:

$v(t) = v(0)e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{E}{1-aRC}(e^{-at} - e^{\frac{1}{RC}t})$

Esta expressão é válida para $a \neq \frac{1}{RC}$

Quando $a \rightarrow \frac{1}{RC}$ tem-se a situação de **ressonância**. Para obter a nova solução, determina-se limite para $a \rightarrow \frac{1}{RC}$

$v(t) = v(0)e^{-\frac{t}{RC}} + lim_{a \rightarrow \frac{1}{RC}} \frac{E(e^{-at} - e^{\frac{t}{RC}})}{1-aRC}$

Aplicando a regra de L'Hopital:

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{t}{RC}} + Elim_{a \to \frac{1}{RC}} \frac{-te^{-at}}{-RC}$$

Ou seja:

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{E}{RC}te^{-\frac{t}{RC}}$$

Se $R = 1k\Omega$, $C = 1mF$, $v(0) = 0.5$ V, $E(t) = e^{-t}$, obtém-se:

$$v(t) = 0.5e^{-t} + te^{-t}$$

cuja resposta está mostrada na Figure 7.

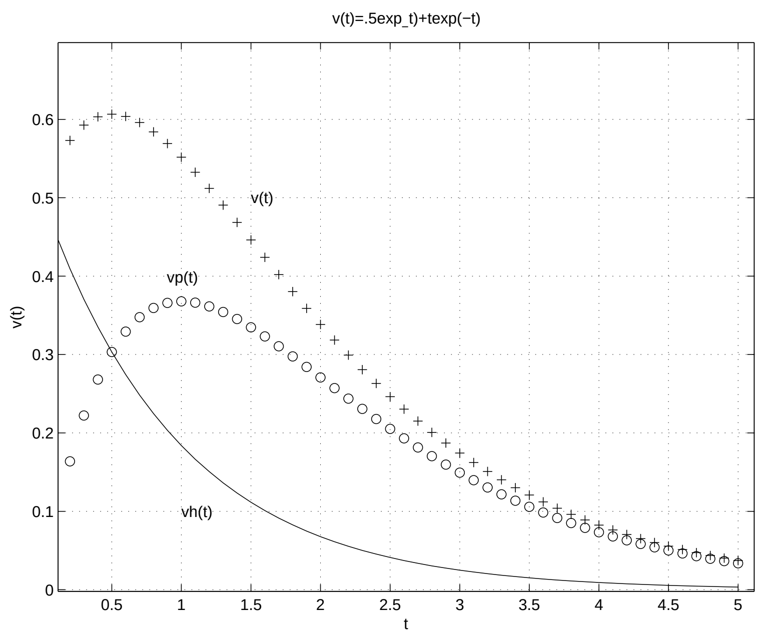

Figure 7: Resposta do circuito com ressonância

Exemplo 3: Seja o circuito mostrado na Figure 8, com: $I(t) = 15$ mA, $R1 = 60k\Omega$, $R2 = 10k\Omega$, $R = 20k\Omega$. A chave ficou fechada por um longo período e é aberta em $t = 0$. Determine:

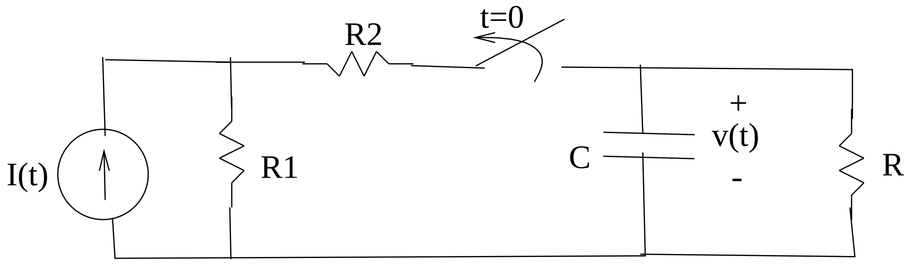

Figure 8: Circuito do exemplo 3

1. $v(0^+)$
2. Constante de tempo em $t > 0$
3. $v(t), \ t \geq 0$
4. Energia no capacitor em $t = 0^-$
5. Tempo necessário para dissipar 75% da energia armazenada no capacitor em $t = 0^-$

Exemplo 4: Seja o circuito mostrado na Figure 9, com: $E(t) = 100$ V, $R1 = 20\Omega$, $R2 = 5\Omega$, $R = 4\Omega$. A chave ficou fechada por um longo período e é aberta em $t = 0$. Determine:

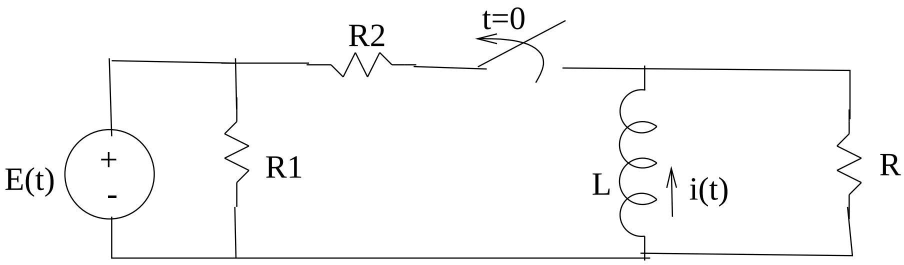

Figure 9: Circuito do exemplo 4

1. $i(0^+)$
2. Constante de tempo em $t > 0$
3. $i(t),\ t \geq 0$
4. Energia no indutor em $t = 0^-$
5. Porcentagem da energia armazenada no indutor em $t = 0^-$ dissipada no resistor de 4Ω até o instante $t = 5$ mseg.

Solução de equação diferencial por fator integrante

Considere a equação:

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{T}x(t) = \frac{1}{T}f(t)$$

Multiplicando esta equação por uma função $h(t)$ que recebe o nome de fator integrante:

$$h(t)\frac{dx(t)}{dt} + \frac{h(t)}{T}x(t) = \frac{h(t)}{T}f(t)$$

Como: $\frac{d}{dt}(h(t)x(t)) = h(t)\frac{dx(t)}{dt} + \frac{dh(t)}{dt}x(t)$

escolhendo $h(t)$ tal que $\frac{dh(t)}{dt} = \frac{h(t)}{T}$, obtém-se:

$$\frac{d}{dt}(h(t)x(t)) = \frac{h(t)}{T}f(t)$$

Escolhendo $h(t) = e^{\frac{t}{T}}$

(que satisfaz $\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{T}e^{\frac{t}{T}} = \frac{h(t)}{T}$)

$\frac{d}{dt}(e^{\frac{t}{T}}x(t)) = \frac{e^{\frac{t}{T}}}{T}f(t)$

Integrando:

$$e^{\frac{t}{T}}x(t) - x(0) = \int_o^t \frac{1}{T}e^{\frac{\tau}{T}}f(\tau)d\tau \qquad (1)$$

Consequentemente:

$$x(t) = x(0)e^{-\frac{t}{T}} + \int_o^t \frac{1}{T}e^{-\frac{t-\tau}{T}}f(\tau)d\tau \qquad (2)$$

A segunda parcela da soma recebe o nome de integral de convolução.

A. Y.
DSE-FEEC-UNICAMP
1s/2020