Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DT-FEEC-UNICAMP

EA513 I - Circuitos Elétricos I

Cap. III - Indutores e Capacitores

1 Associação de Capacitores

Considere a Figure 9 visto no Capítulo I. Foi visto que:

$$q = Cv \Rightarrow i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt}$$

1.1 Associação em série

Seja a associação de 2 capacitores em série mostrada na Figure 1:

Na figura (a), tem-se:

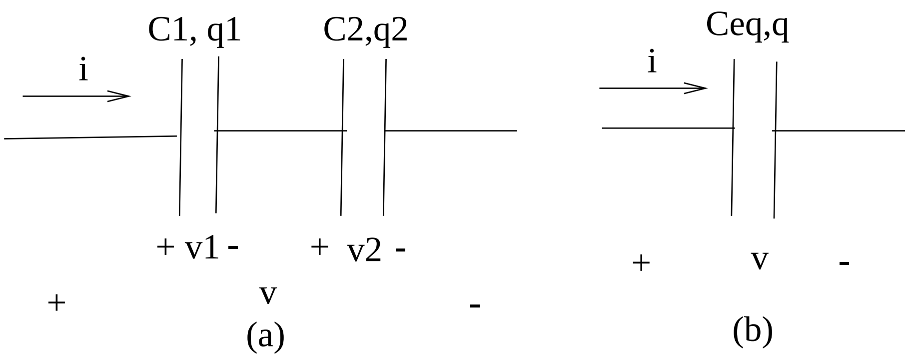

Figure 1: Associação série de 2 capacitores

- $q_1 = C_1 v_1$
- $q_2 = C_2 v_2$
- $v = v_1 + v_2 = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2}$

e na figura (b):

$$q = C_{eq} v \Rightarrow v = \frac{q}{C_{eq}}$$

Pode-se escrever que $q_1 = q_2 = q$ pois a corrente i passa em ambos capacitores C_1 e C_2 e é a mesma que passa no capacitor C_{eq}.

Logo:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Generalizando:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

1.2 Associação em paralelo

Seja a associação de 2 capacitores em paralelo mostrada na Figure 2:

Na figura (a), tem-se:

$q_1 = C_1 v$ e $q_2 = C_2 v$. A carga total na Figure 3(a), portanto é:

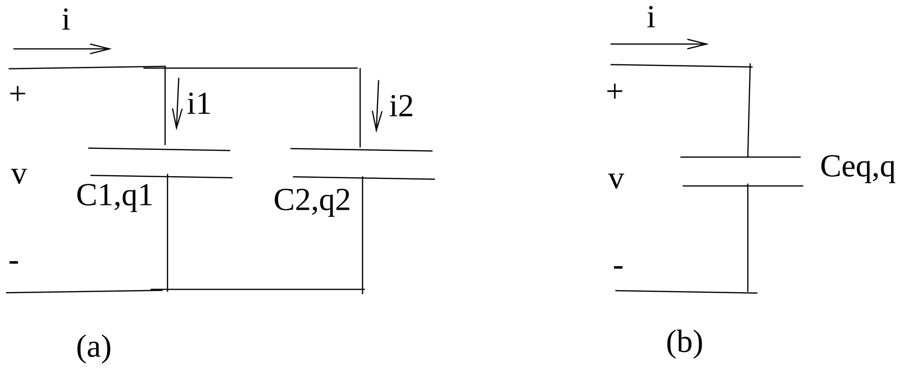

Figure 2: Associação paralela de 2 capacitores

$$q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)v$$

e na figura (b):

$$q = C_{eq}v$$

Portanto:

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

Generalizando:

$$C_{eq} = \Sigma_{i=1}^{n} C_i$$

1.3 Observação

Considere a configuração mostrada na Figure 3:

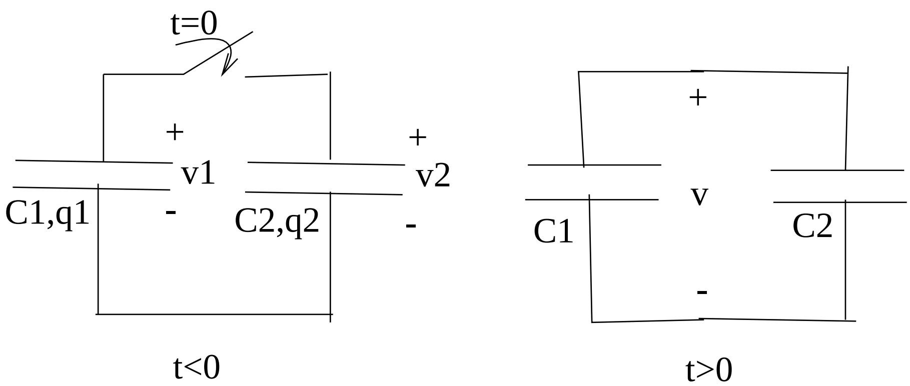

Figure 3: Exemplo

Para $t < 0$:

$$q = q_1 + q_2 = C_1 v_1 + C_2 v_2$$

e para $t > 0$:

$q = C_1 v + C_2 v = (C_1 + C_2)v$

Portanto: $v = \frac{C_1 v_1 + C_2 v_2}{C_1 + C_2}$

Se $v_2 = 0$ (ou seja, $q_2 = 0$) e $C_1 = C_2 = C$, obtém-se:

$v = \frac{v_1}{2}$

Energia total para $t < 0$: $\varepsilon_a = \frac{1}{2}C(v_1)^2$

Energia total para $t > 0$:

$\varepsilon_b = 2\frac{1}{2}C(\frac{v_1}{2})^2 = \frac{1}{4}C(v_1)^2$

Houve conservação de carga mas não de energia (caso semelhante ao de choque inelástico de corpos, com conservação de quantidade de movimento mas não de energia cinética).

2 Associação de Indutores

Considere a Figure 10 visto no Capítulo I. Foi visto que:

$$\lambda = Li \Rightarrow v = \frac{d\lambda}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

2.1 Associação em série

Seja a associação de 2 indutores em série mostrada na Figure 4:

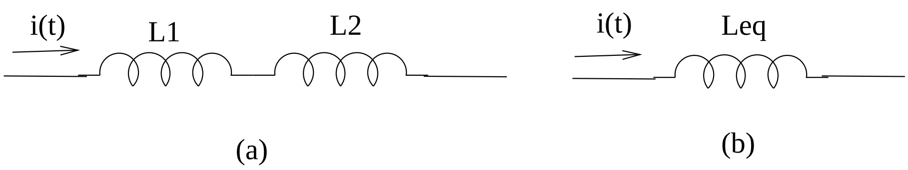

Figure 4: Associação série de 2 indutores

Na figura (a), tem-se:

- $\lambda_1 = L_1 i$

- $\lambda_2 = L_2 i$

- $\lambda_a = \lambda_1 + \lambda_2 = (L_1 + L_2)i$

e na figura (b):

$\lambda_b = L_{eq} i$

Como o fluxo magnético total λ_a da figura (a) deve ser o mesmo do indutor L_{eq}:

$L_{eq} = L_1 + L_2$

Generalizando:

$\lambda_{eq} = \Sigma_{i=1}^{n} L_i$

2.2 Associação em paralelo

Seja a associação de 2 indutores em paralelo mostrada na Figure 5:

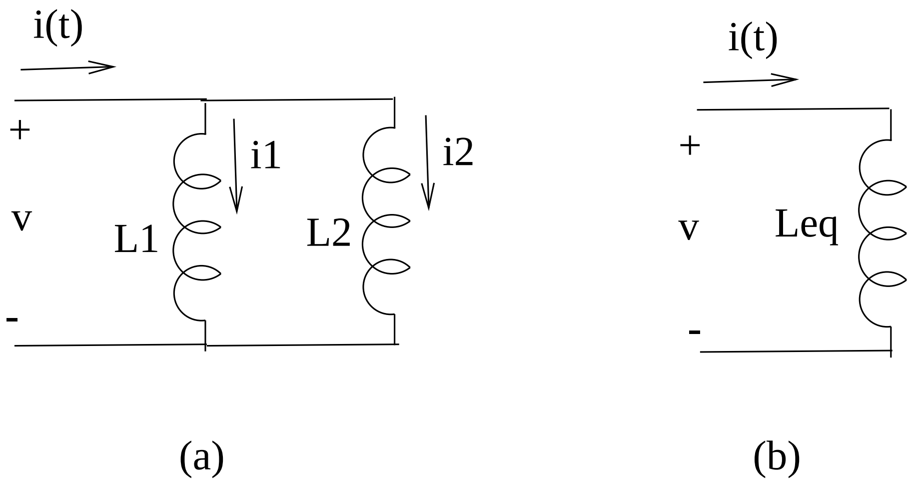

Figure 5: Associação paralela de 2 indutores

Na figura (a), como a tensão sobre L_1 e L_2 são iguais (significa λ iguais), tem-se:

$$i_1 = \frac{\lambda}{L_1} \text{ e } i_2 = \frac{\lambda}{L_2}$$

Como: $i = i_1 + i_2$

$i = (\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2})\lambda$

e na figura (b) (tensão sobre L_{eq} é a mesma da figura (a)):

$i = \frac{\lambda}{L_{eq}}$

Portanto:

$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$

Generalizando:

$\frac{1}{L_{eq}} = \Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i}$

3 Indutância Mútua

Quando 2 ou mais indutores estão próximos, o fluxo magnético em um pode influenciar no de outros, criando fluxo concatenado, como mostrado na Figure 6.

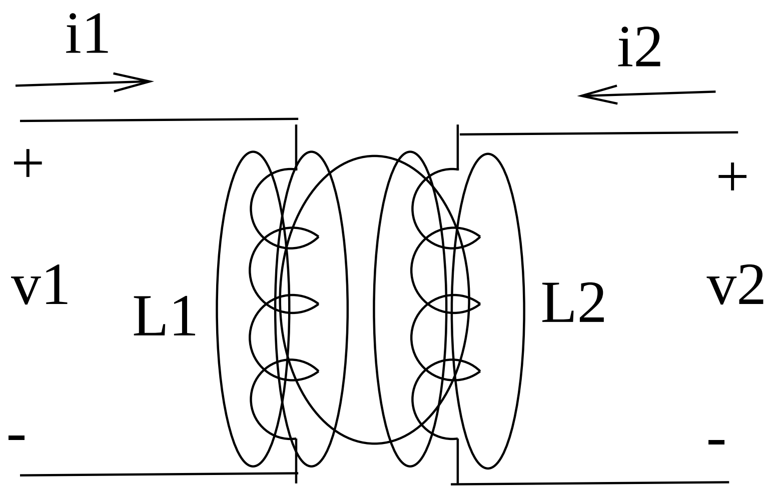

Figure 6: 2 indutores próximos um do outro

Os fluxos magnéticos λ_1 de L_1 e λ_2 de L_2 ficam:

- $\lambda_1 = L_1 i_1 \pm M i_2$
- $\lambda_2 = L_2 i_2 \pm M i_1$

M é chamado de coeficiente de indutância mútua e recebe sinal $+$ se os fuxos magnéticos de L_1 e de L_2 têm os mesmos sentidos nos núcleos de cada indutor, e recebe sinal $-$ caso contrário.

Pode ser representado como:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & \pm M \\ \pm M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Ou seja: $v = \mathbf{L}i$

A convenção mostrada na Figure 7 é adotada.

Pode-se determinar a indutância equivalente de associação em série de indutores, que vai depender da estrutura.

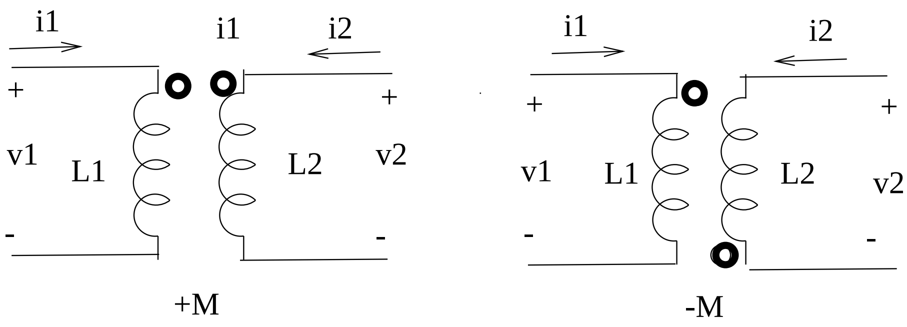

Figure 7: Convenção para M

A configuração da Figure 8(a) está na Figure 8(b).

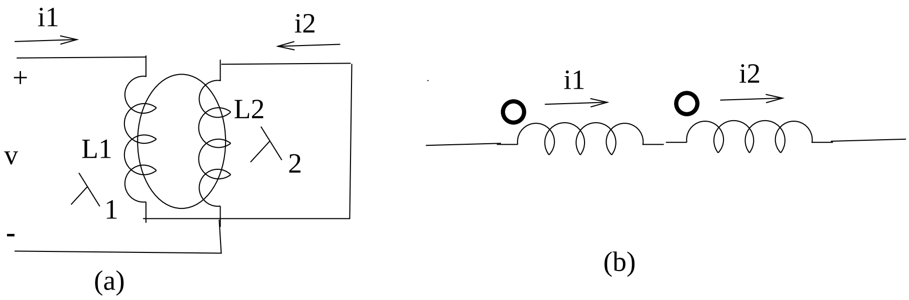

Figure 8: Associação em série com +M

Chamando de $i = i_1 = i_2$, tem-se, neste caso:

- $\lambda_1 = L_1 i + Mi$
- $\lambda_2 = L_2 i + Mi$

- $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

e obtém-se: $\lambda = (L_1 + L_2 + 2M)i$

Consequentemente: $L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$

Na Figure 9, tem-se a situação (a) cuja representação está em (b).

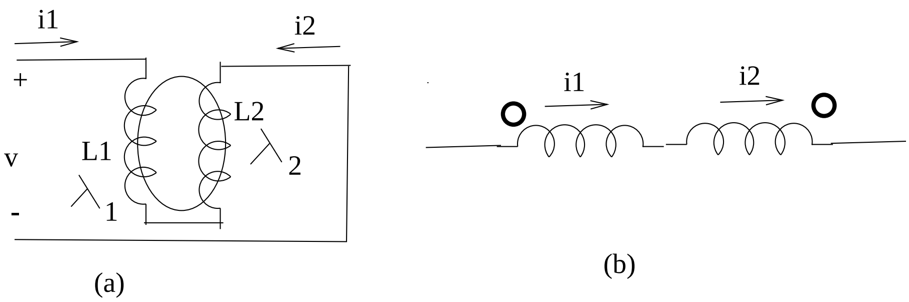

Figure 9: Associação em série com -M

Com $i = i_1 = -i_2$, tem-se, neste caso:

- $\lambda_1 = L_1 i - Mi$
- $\lambda_2 = L_2 i - Mi$
- $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

e obtém-se: $\lambda = (L_1 + L_2 - 2M)i$

Consequentemente: $L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$

Os casos de associação paralela de indutores estão mostrados na Figure 10 (a) e (b).

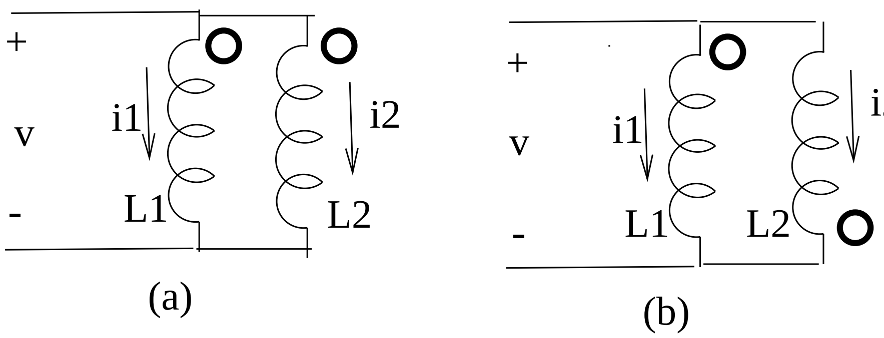

Figure 10: Associação em paralelo

No caso da Figure 10 (a), $i = i_1 + i_2$ e tem-se:

- $\lambda_1 = L_1 i_1 + M i_2$
- $\lambda_2 = L_2 i_2 + M i_1$
- $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$

e obtém-se: $\lambda = \frac{L_1+L_2-M^2}{L_1+L_2-2M} i$

Consequentemente: $L_{eq} = \frac{L_1+L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}$

No caso da Figure 10 (b) tem-se:

- $\lambda_1 = L_1 i_1 - M i_2$
- $\lambda_2 = L_2 i_2 - M i_1$
- $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

e obtém-se: $\lambda = \frac{L_1+L_2-M^2}{L_1+L_2+2M} i$

Consequentemente: $L_{eq} = \frac{L_1+L_2-M^2}{L_1+L_2+2M}$

4 Transformadores

São dispositivos que apresentam 2 ou mais indutores enrolados num mesmo núcleo e, portanto, têm indutâncias mútuas.

Normalmente são representados como na Figure 11:

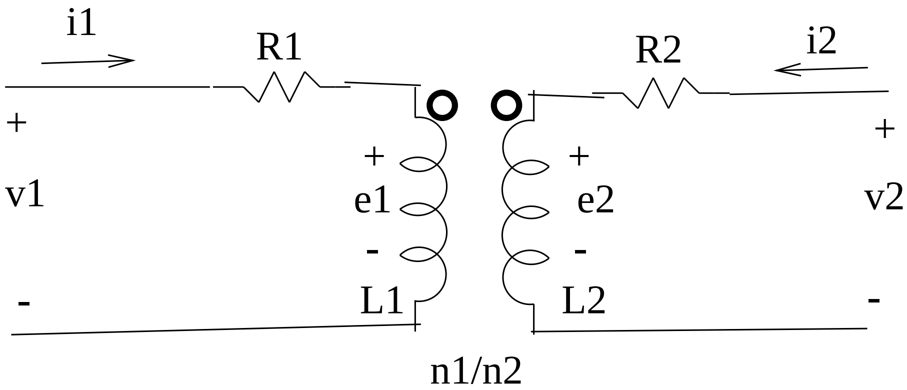

Figure 11: Representação de um transformador

Nesta figura:

- $n1$ = número de espiras do indutor L1
- $n2$ = número de espiras do indutor L2
- $e1$ = tensão sobre o indutor L1
- $e2$ = tensão sobre o indutor L2

Define-se coeficiente de acoplamento de 2 indutores através da expressão:

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad k \in [0, 1]$$

Assim, $M^2 \leq L_1 L_2$. Se $k = 1$, diz-se que o acoplamento é perfeito e neste caso:

$$M^2 = L_1 L_2$$

Por outro lado:

- $L1 = \frac{n_1^2}{\Re}$
- $L2 = \frac{n_2^2}{\Re}$
- $M = \frac{n_1 n_2}{\Re}$

onde $\Re$ é a relutância do indutor, que depende do material, das dimensões do núcleo, da geometria. Quanto menor a relutância, melhor é o transformador. No caso ideal, $\Re \to 0$ e, consequentemente L_1, L_2, M tendem para infinito, mantendo fixos os valores das relações entre elas.

Um transformadores ideal é definido fazendo $R_1 = R_2 = 0$ e $k = 1$.

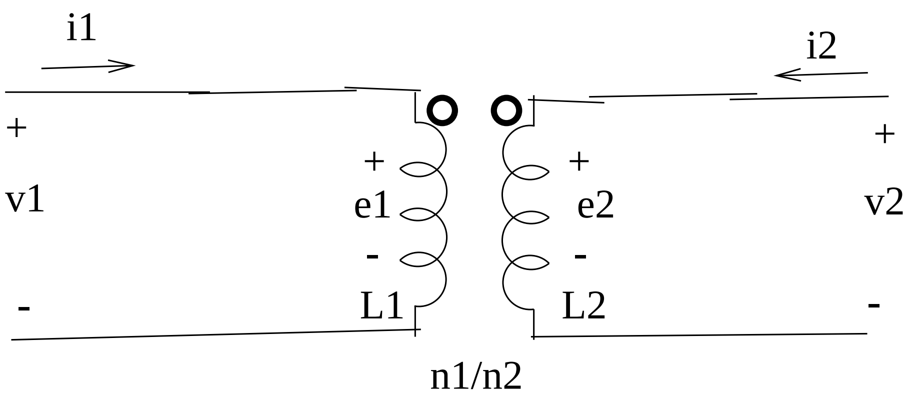

Figure 12: Representação de um transformador ideal

Como:

$$\lambda_1 = L_1 i_1 + M i_2$$
$$\Rightarrow \frac{\lambda_1}{L_1} = i_1 + \frac{M}{L_1} i_2$$

Portanto: $i_1 \cong -\frac{M}{L_1} i_2$
Ou seja: $\frac{i_1}{i_2} = -\frac{M}{L_1} = -\frac{n_2}{n_1}$

$$\Rightarrow n_1 i_1 + n_2 i_2 = 0$$

Por outro lado, como $M^2 = L_1 L_2$:

$$\lambda_2 = L_2 i_2 + M i_1 = \frac{M^2}{L_1} i_2 + M i_1$$
$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{M}{L_1}(L_1 i_1 + M i_2) = \frac{M}{L_1}\lambda_1$$
e obtém-se:
$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{M}{L_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

Como v_i é proporcional a λ_i, tem-se:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{n_2}{n_1} = -\frac{i_1}{i_2}$$

indicando que toda potência fornecida pelo primário do transformador ideal é consumida pelo secundário:

$$v_1 i_1 = -v_2 i_2$$

4.1 Resistência Refletida em Transformadores Ideais

Dado o circuito da Figure 13:

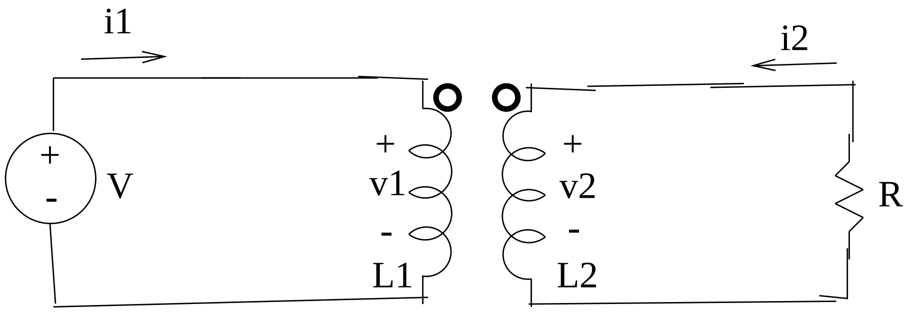

Figure 13: Transformador ideal com carga

Foi visto que:

$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1}$ e $\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}$ em transformadores ideais.

Ainda: $v_2 = -Ri_2$

Ou seja: $\frac{n_2}{n_1}v_1 = -R(-\frac{n_1}{n_2})i_1$

$\Rightarrow v_1 = (\frac{n_1}{n_2})^2 R i_1$

$\Rightarrow R_{eq} = (\frac{n_1}{n_2})^2 R$

que pode ser representado como na Figure 14.

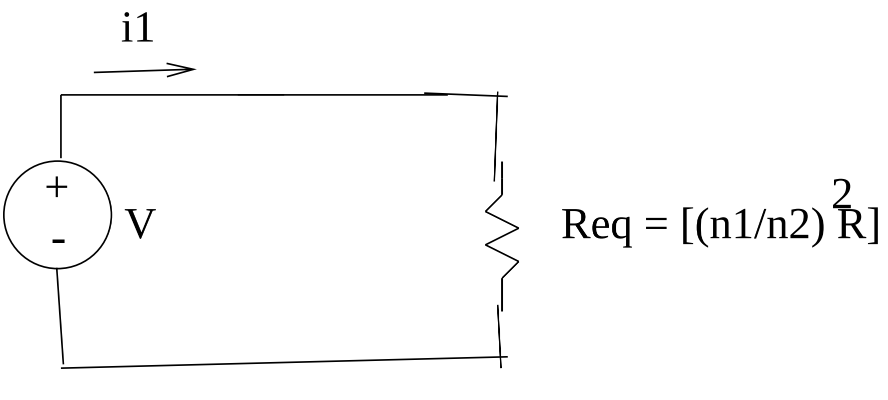

Figure 14: resistência refletida

A. Y.
DSE-FEEC-UNICAMP
1s/2020