Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DT-FEEC-UNICAMP

EA513 I - Circuitos Elétricos I

Cap. II - Circuitos Resistivos Simples

- Circuitos só com resistores: para estudar as propriedades de circuitos elétricos.

- Baseadas nas equações dos bipolos, LKC e LKT.

- Idéia: simplificar os circuitos para diminuir a quantidade de variáveis.

1 Resistores em Série, em Paralelo, Propriedades

1.1 Em série

- Dois ou mais resistores em série são percorridos pela mesma corrente.

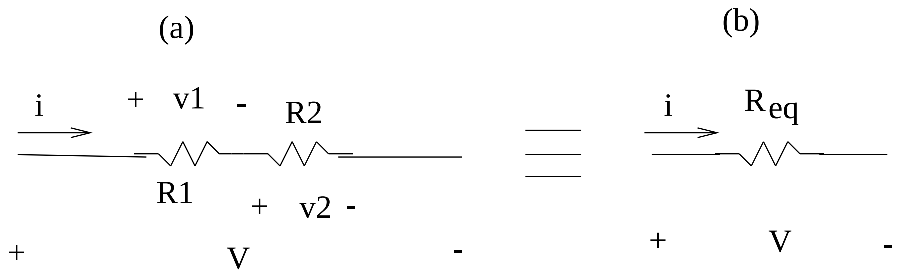

Figure 1: Resistores em série

- Na Figure1(a):

$$V = v_1 + v_2 = R1.i + R2.i = (R1 + R2).i$$

- Na Figure1(b):

$$V = R_{eq}.i$$

- Portanto: $R_{eq} = R1 + R2$

- Generalizando: $R_{eq} = \Sigma_{i=1}^{n} R_i$

1.2 Em paralelo

- Dois ou mais resistores em paralelo têm a mesma tensão.

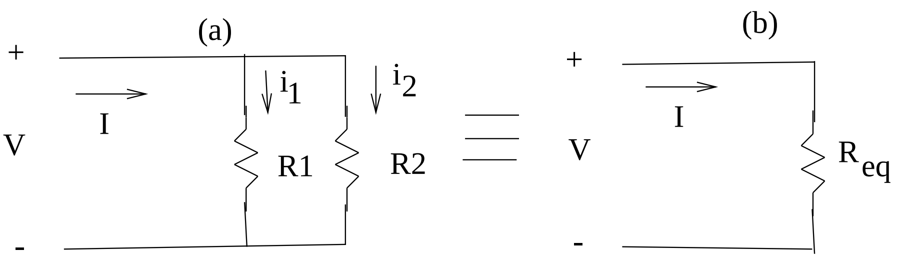

Figure 2: Resistores em paralelo

- Na Figure2(a):

$$I = i_1 + i_2 = \frac{V}{R1} + \frac{V}{R2} = (\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2})V$$

- Na Figure2(b):

$I = \frac{1}{R_{eq}}.V$

- Portanto: $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}$

- Generalizando: $\frac{1}{Req} = \Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$

- Exemplo:

Seja o circuito a seguir, com $V = 12$ V, $R1 = 1\Omega$, $R2 = 2\Omega$ e $R3 = 2\Omega$. Determine i_1 e v_2.

Solução:

A) Utilizando as leis de Kirchoff:

$b = 4$, $n = 3 \Rightarrow n - 1 = 2$ equações de cor-

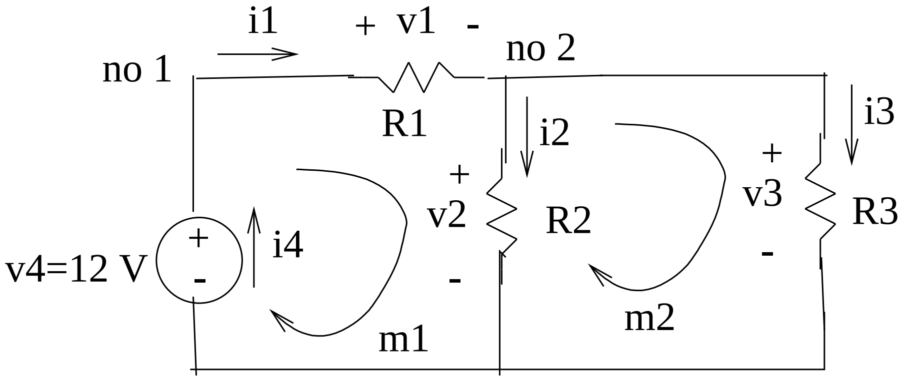

Figure 3: Exemplo de aplicação de simplificações de circuito utilizando resistores em série e paralelo

rente independentes e $b-(n-1)=2$ equações de malha independentes

- nó 1: $i_4 = i_1$
- nó 2: $i_1 = i_2 + i_3$
- malha 1: $v_1 + v_2 = v_4$
- malha 2: $v_2 = v_3$
- $v_1 = R_1 i_1$
- $v_2 = R_2 i_2$
- $v_3 = R_3 i_3$

- $v_4 = 12$ V

- 8 equações a 8 incógnitas. Resolvendo:

$i_1 = 6$ A, $v_2 = 6$ V.

B) Aplicando simplificações

- R_{eq} é equivalente a soma de R_1 com o resultado de R_2 em paralelo com R_3.

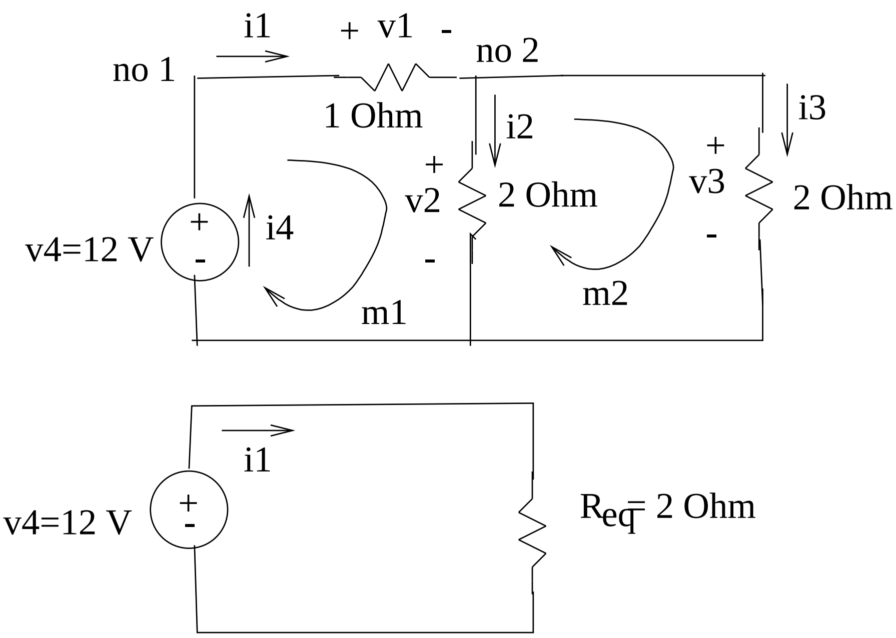

Figure 4: Simplificações de circuito utilizando resistores em série e paralelo

- $R_{eq} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1 + 1 = 2\Omega$

- Logo: $i_1 = \frac{12}{2} = 6$ A e $v_2 = \frac{1}{2}12 = 6$ V.

1.3 Propriedades de circuitos elétricos lineares

Considere o sistema mostrado na Figure 5. Se f(.) é um sistema linear, a seguinte propriedade é válida:

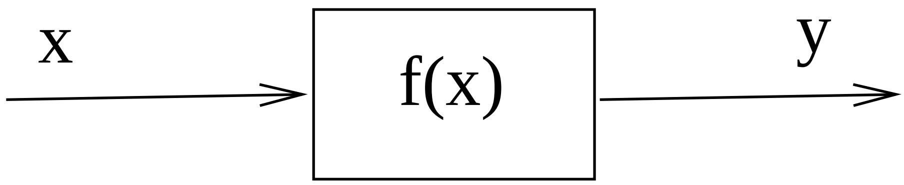

Figure 5: Sistema linear

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1) \\ y_2 = f(x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 = f(\alpha x_1 + \beta x_2).$$

- Consequentemente valem as propriedades de proporcionalidade e de superposição.

- Na proporcionalidade, pode-se escolher uma grandeza, resolver o circuito a partir dela e determinar a diferença em relação a uma grandeza conhecida, Depois faz-se a correção utilizando a proporcionalidade encontrada entre o valor calculado e o correto.

- A superposição é utilizada quando se tem mais de uma fonte num mesmo circuito. Se tem 2 fontes, considera-se uma delas e resolve-se o circuito anulando a outra e depois anula-se a primeira e considera-se a segunda. Após, soma-se os resultados.

- Observação: anular uma fonte de tensão é fazer tensão zero, ou seja, um **curto** e anular uma fonte de corrente é fazer corrente zero, ou seja **circuito aberto**.

A) Exemplo de proporcionalidade:

Achar o valor de v_4 do circuito da Figure 6.

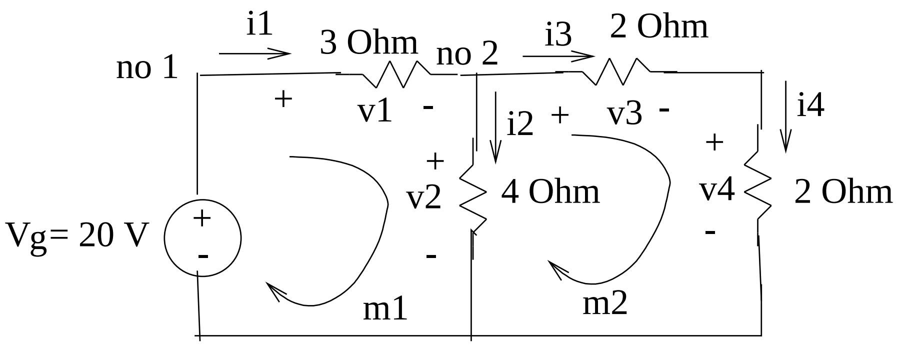

Figure 6: Circuito linear

Suponha que $v_4 = 1$ V. A partir disso, é possível calcular as correntes e tensões até chegar a V_g:

- $i_4 = \frac{v_4}{2} = \frac{1}{2}$ A
- $\Rightarrow i_3 = \frac{1}{2}$ A $\Rightarrow v_3 = 1$ V

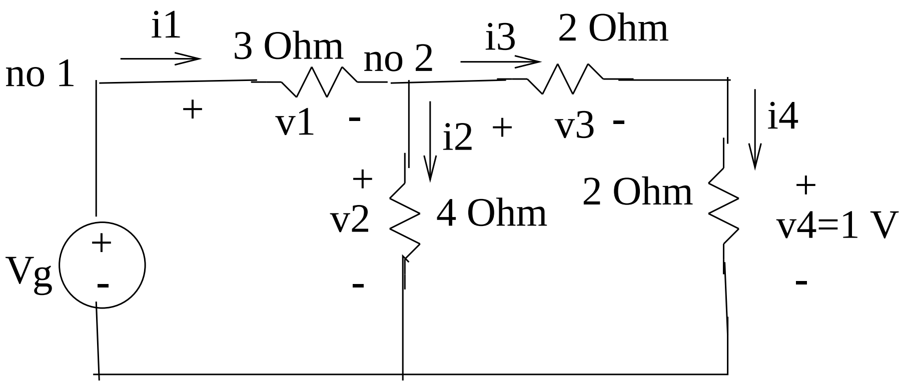

Figure 7: Proporcionalidade

- $\Rightarrow v_2 = v_3 + v_4 = 2$ V $\Rightarrow i_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ A
- $i_1 = i_2 + i_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ A $\Rightarrow v_1 = 3.1 = 3$ V
- $\Rightarrow V_g = v_1 + v_2 = 3 + 2 = 5$ V

A diferença é de $k.5 = 20 \Rightarrow k = 4$.
Logo, $v_4 = k.1 = 4.1 = 4$ V.
Esta proporcionalidade vale para todas as grandezas calculadas.

B) Exemplo de superposição

Seja o circuito da Figure 8, com $R_1 = 10\Omega$,

$R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 5\Omega$, $R_4 = 10\Omega$, $R_5 = 5\Omega$, $V_g = 80$ V, $I_g = 20$ A.

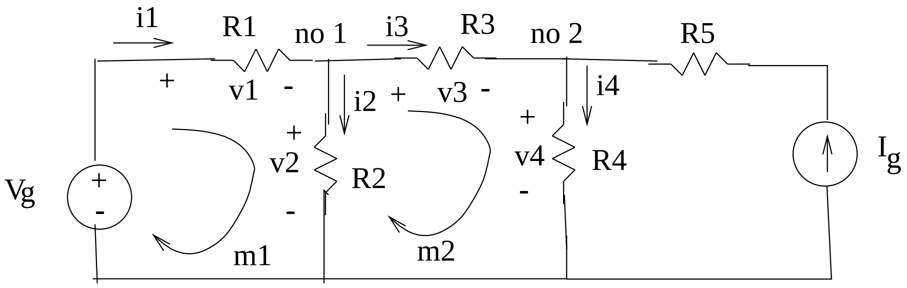

Figure 8: Superposição

Ache os valores de i_1, i_2, i_3, i_4.

- Anulando a fonte de corrente:

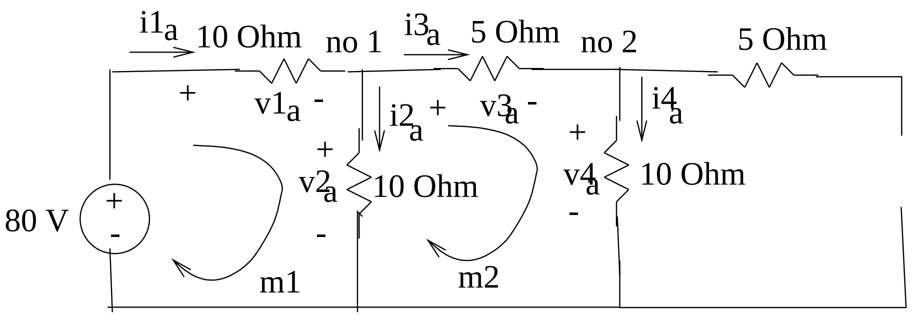

Figure 9: Anulando a fonte de corrente

Como R_{eq} é resistência de 10Ω somado com de 10Ω em paralelo com resistência de 5Ω em séria com de 10Ω, tem-se:

- $R_{eq} = 10 + 10$ em paralelo com 15
- $R_{eq} = 10 + 6 = 16\Omega$
- $\Rightarrow i_{1a} = \frac{80}{16} = 5$ A $\Rightarrow v_{1a} = 10.5 = 50$ V
- m1: $80 = v_{1a} + v_{2a} = 50 + v_{2a}$
- $\Rightarrow v_{2a} = 30$ V $\Rightarrow i_{2a} = \frac{30}{10} = 3$ A
- nó 1: $i_{1a} = i_{2a} + i_{3a}$
- $5 = 3 + i_{3a} \Rightarrow i_{3a} = 2$ A
- nó 2: $i_{3a} = i_{4a} \Rightarrow i_{4a} = 2$ A

- Anulando a fonte de tensão:

Neste caso, tem-se R_{eq1} igual a resistência de 10Ω em paralelo com de 10Ω em série com de 5Ω:

- $R_{eq1} = (5) + 5 = 10\Omega$

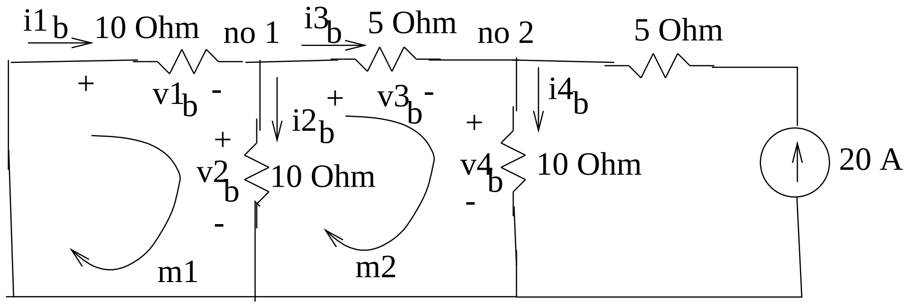

Figure 10: Anulando a fonte de tensão

- nó 2: $20 = i_{4b} + (-i_{3b})$

Como $R_4 = R_{eq1} = 10\Omega$:

- $i_{4b} = (-i_{3b}) = \frac{20}{2} = 10$ A
- $\Rightarrow i_{4b} = 10$ A, $i_{3b} = -10$ A
- nó 1: $i_{1b} = i_{2b} + i_{3b} = i_{2b} - 10$
- $i_{1b} + 10 = i_{2b} \Rightarrow 10 = -i_{1b} + i_{2b}$
- m1: $10.i_{1b} + 10.i_{2b} = 0$
- $-i_{1b} = i_{2b} \Rightarrow -i_{1b} = i_{2b} = 5$ A

- Somando as partes:

$$\begin{cases} i_1 = i_{1a} + i_{1b} = 5 + (-5) = 0 \\ i_2 = i_{2a} + i_{2b} = 3 + 5 = 8 \\ i_3 = i_{3a} + i_{3b} = 2 + (-10) = -8 \\ i_4 = i_{4a} + i_{4b} = 2 + 10 = 12 \end{cases}$$

C) Divisor de Tensão e Divisor de Corrente

- **Divisor de tensão** divide a tensão de forma diretamente proporcional aos seus valores:

- Seja a Figure 11:

Como $V = v_1 + v_2$, $v_1 = R_1.i$, $v_2 = R_2.i$
$\Rightarrow V = (R_1 + R_2)i$
$i = \frac{1}{R_1+R_2}V$
portanto:
$v_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2}V$

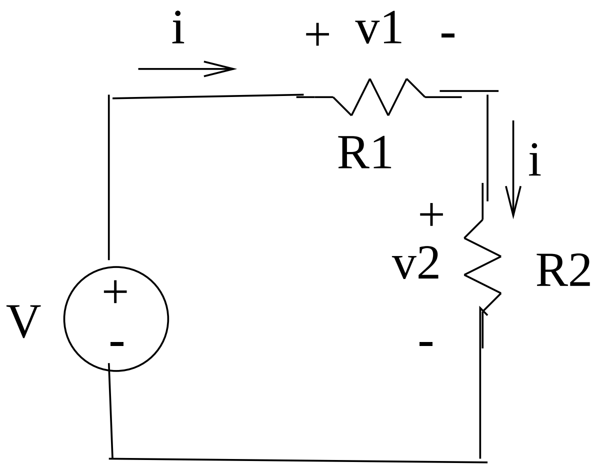

Figure 11: Divisor de tensão

$v_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2} V$

ou seja, R_1 e R_2 dividem a tensão V proporcionalmente aos seus valores.

- **Divisor de corrente** divide a corrente de forma inversamente proporcional aos seus valores:

- Seja a Figure 12:

$I = i_1 + i_2$

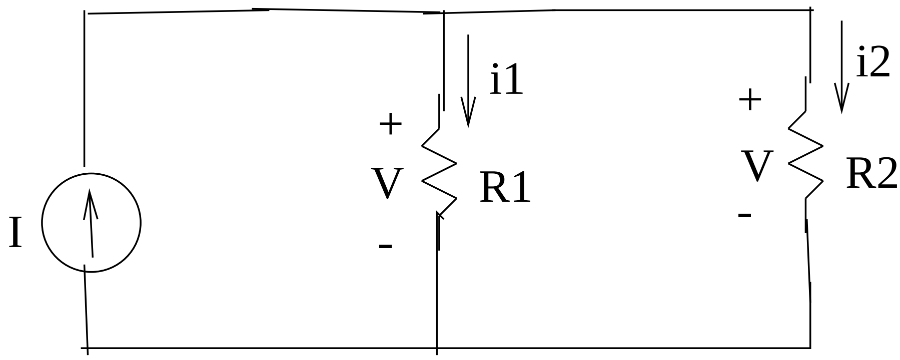

Figure 12: Divisor de corrente

mas $i_1 = \frac{V}{R_1}$ e $i_2 = \frac{V}{R_2} \Rightarrow I = (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})V$
ou seja: $I = \frac{R_1+R_2}{R_1R_2}V \Rightarrow V = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}I$
portanto:
$i_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2}I$
$i_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2}I$

ou seja, divisor de corrente divide a corrente de forma inversamente proporcional aos seus valores.

2 Equivalência Estrela-Triângulo

É possível fazer transformações de estruturas de circuitos que estejam numa configuração estrela para triângulo e vice-versa.

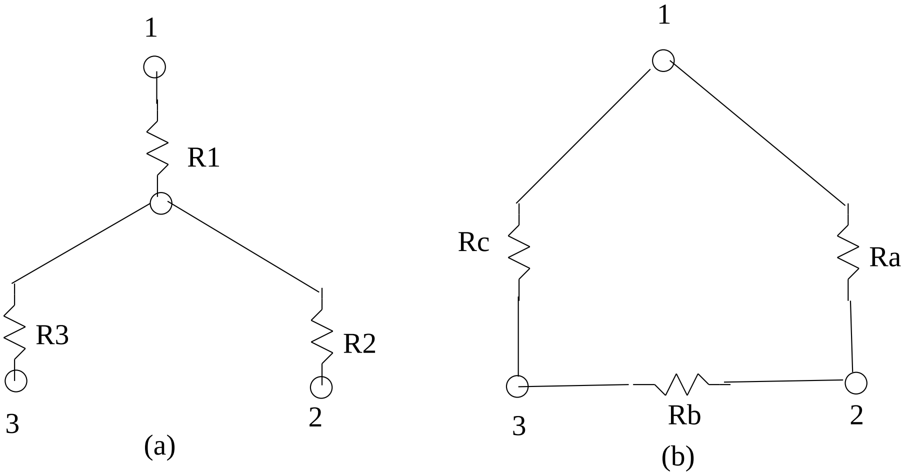

Figure 13: a) estrela b) triângulo

Para deduzir as configurações equivalentes, procura-se adotar as igualdades:

$$\begin{cases} R_1 + R_3 = R_c \; em \; paralelo \; com \; (R_a + R_b) \\ R_1 + R_2 = R_a \; em \; paralelo \; com \; (R_b + R_c) \\ R_2 + R_3 = R_b \; em \; paralelo \; com \; (R_a + R_c) \end{cases}$$

Resolvendo sistema de 3 equações a 3 incógnitas em R_a, R_b, R_c:

$$\begin{cases} R_a = \frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_3} \\ R_b = \frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_1} \\ R_c = \frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_2}) \end{cases}$$

Resolvendo sistema de 3 equações a 3 incógnitas em R_1, R_2, R_3:

$$\begin{cases} R_1 = \frac{R_aR_c}{R_a+R_b+R_c} \\ R_2 = \frac{R_aR_b}{R_a+R_b+R_c} \\ R_3 = \frac{R_bR_c}{R_a+R_b+R_c} \end{cases}$$

Exemplo: Seja o circuito da Figure 14 com $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 40\Omega$, $R_3 = 10\Omega$, $R_4 = 50\Omega$, $R_5 = 15\Omega$, $V_g = 24$ V. Determine a corrente i.

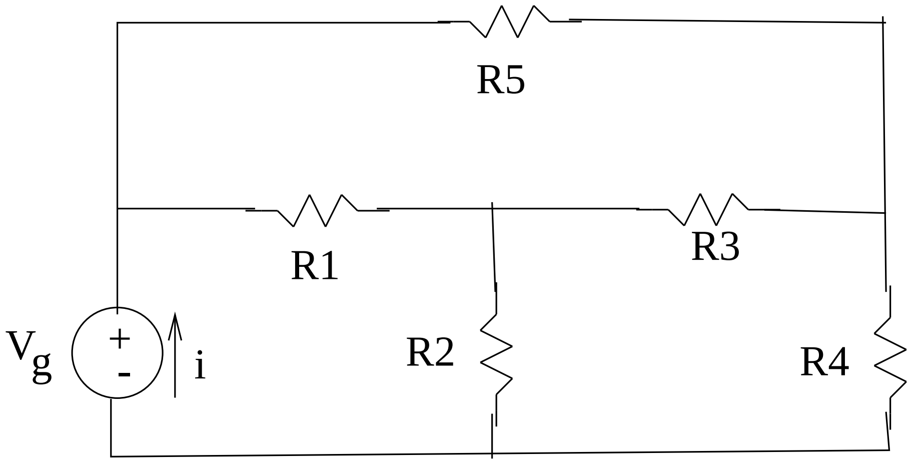

Figure 14: Exemplo

3 Circuitos Equivalentes de Thévenin e de Norton

Muitas vezes é possível simplificar parte de um circuito por uma fonte + resistor (circuitos resistivos) com utilização dos princípios de substituição e de superposição. Considere o circuito da Figure 15.

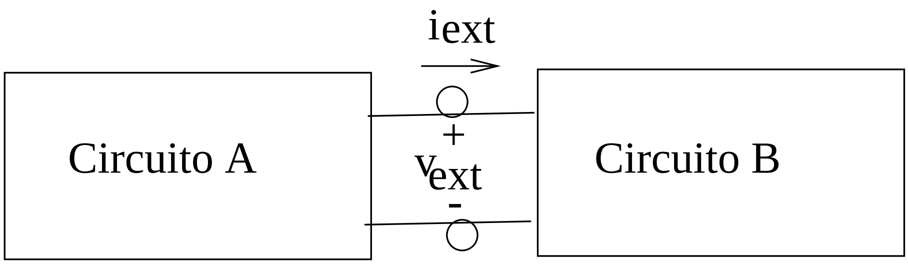

Figure 15: Um circuito elétrico

3.1 Equivalente Thévenin

Aplicando o princípio de substituição ao circuito B da Figure 15, obtém-se o circuito da Figure 16:

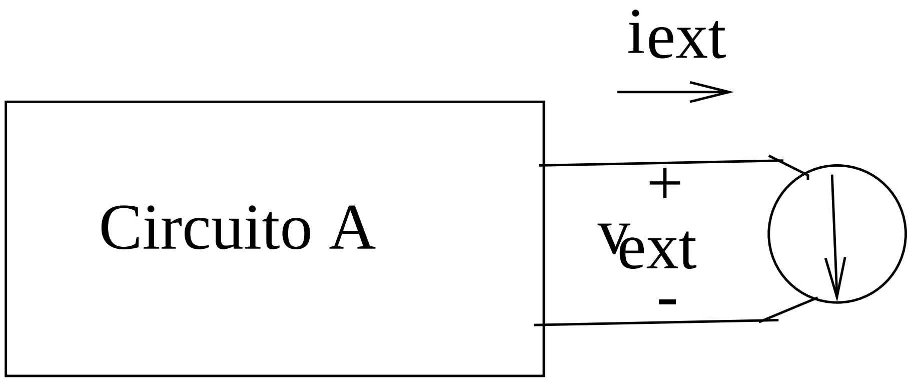

Figure 16: Aplicando princípio de substituição

A seguir, aplica-se o princípio de superposição e obtém-se os circuitos a) e b) da Figure 17.

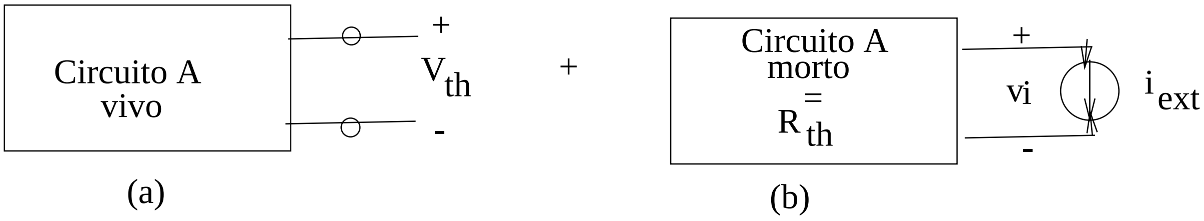

Figure 17: Aplicando princípio de superposição

A Figure 17 (b) permite escrever:

$v_i = -R_{th} i_{ext}$ e de (a) e (b), tem-se:

$v_{ext} = V_{th} + v_i = V_{th} - R_{th} i_{ext}$

ou seja: $V_{th} = v_{ext} + R_{th} i_{ext}$

que equivale ao circuito da Figure 18, que é chamado de **Circuito Equivalente de Thévenin**.

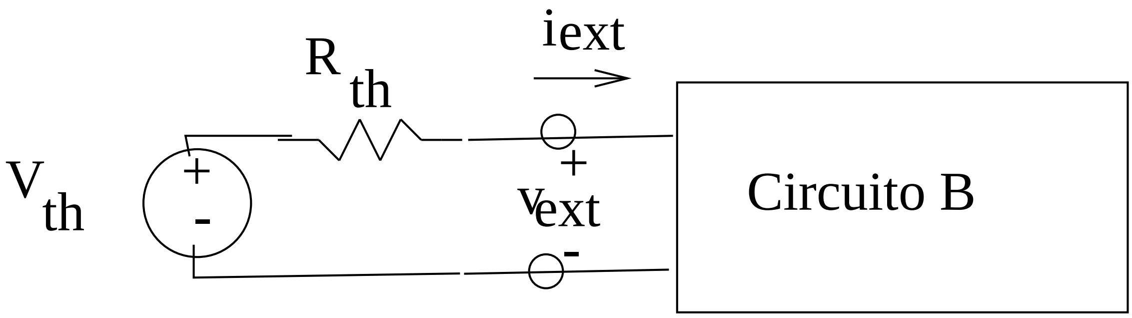

Figure 18: Equivalente de Thévenin

3.2 Equivalente Norton

Analogamente, aplicando o princípio de substituição ao circuito B da Figure 15, obtém-se o circuito da Figure 19:

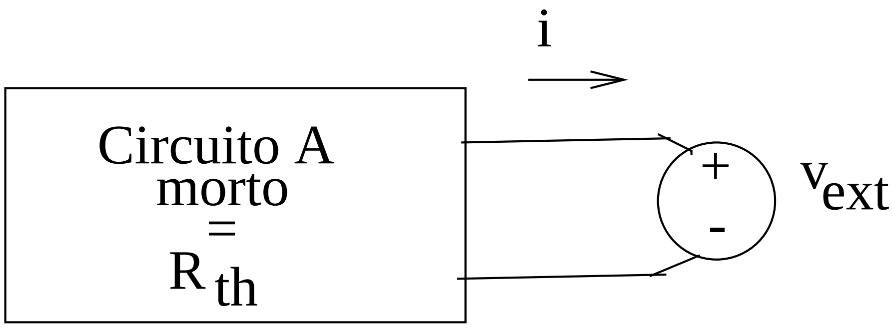

Figure 19: Aplicando princípio de substituição

A seguir, aplica-se o princípio de superposição e obtém-se os circuitos a) e b) da Figure 20.

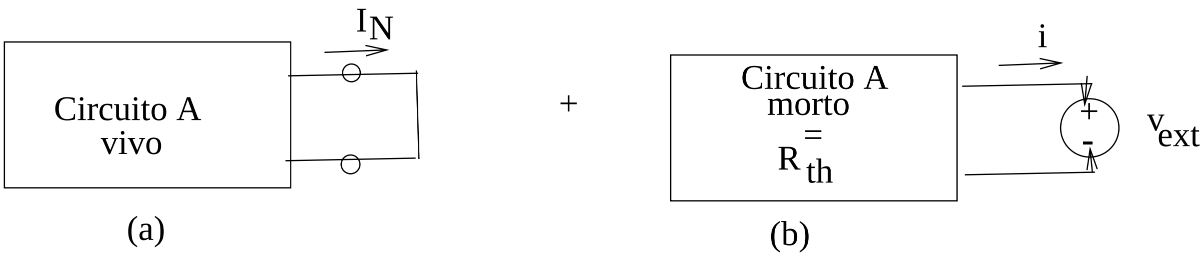

Figure 20: Aplicando princípio de superposição

A Figure 20 (b) permite escrever:

$i = \frac{-v_{ext}}{R_{th}}$ e de (a) e (b), tem-se:

$i_{ext} = I_N + i = I_N - \frac{v_{ext}}{R_{th}}$

ou seja: $I_N = i_{ext} + \frac{v_{ext}}{R_{th}}$

que equivale ao circuito da Figure 21, que é chamado de **Circuito Equivalente de Norton**.

Observação:

Como $i_{ext} = I_N - \frac{v_{ext}}{R_{th}}$
$v_{ext} = V_{th} - R_{th} i_{ext}$

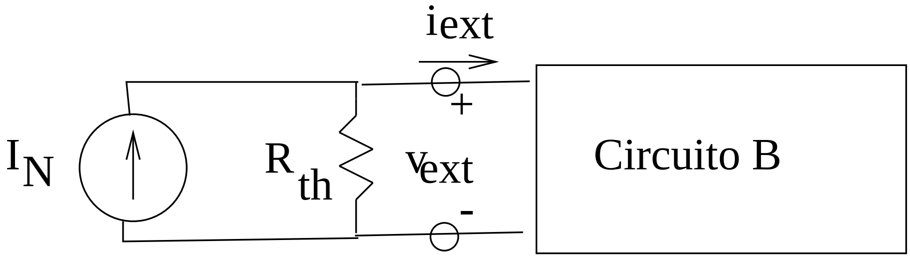

Figure 21: Equivalente Norton

$$\Rightarrow V_{th} = R_{th} I_N$$

Resumindo:

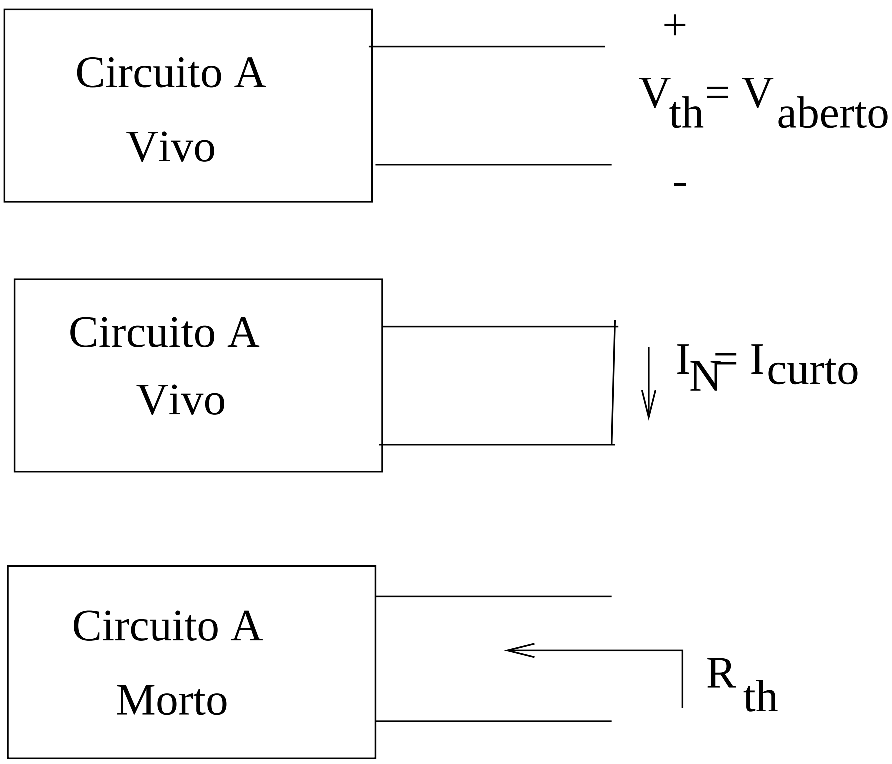

Figure 22: Equivalente Norton

Exemplo: Seja o circuito da Figure 23, com $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $I_g = 3$ A, $V_g = 25$ V. Ache o circuito equivalente Thévenin do circuito à esquerda do terminal (a,b).

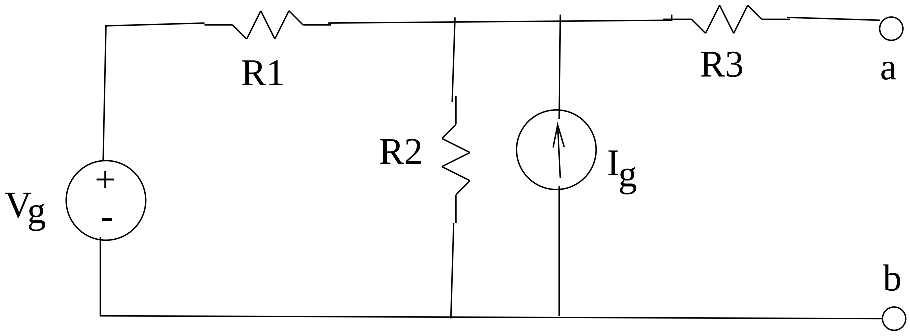

Figure 23: Equivalente Norton

Resolução:

A) V_{th} por superposição

A.1) Da Figure 24 (anulando fonte de corrente):

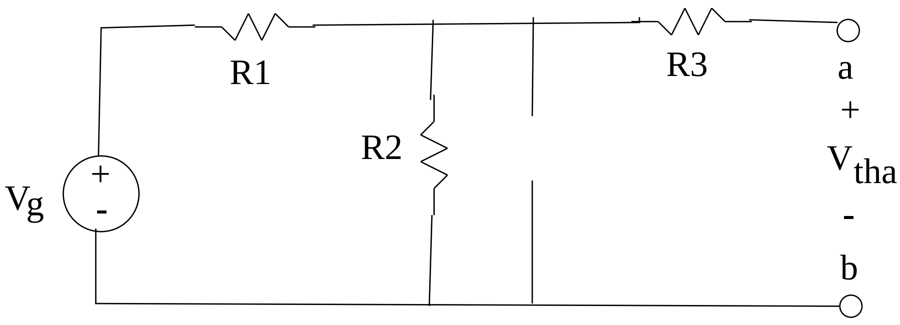

Figure 24: Equivalente Norton

$$V_{tha} = \frac{20}{20+5} = 20 \text{ V}$$

A.2) Da Figure 25 (anulando fonte de tensão):

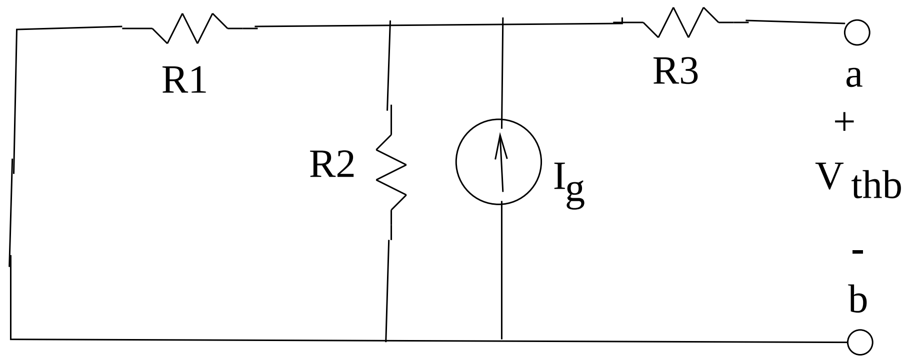

Figure 25: Equivalente Norton

$V_{thb} = \frac{20}{20+5}(3).5 = 12$ V

Logo: $V_{th} = V_{tha} + V_{thb} = 20 + 12 = 32$ V

B) R_{th} (anulando as duas fontes)

Da Figure 26:

$R_{th} = 4 + (20\ em\ paralelo\ com\ 5) = 4 + 4 = 8\Omega$

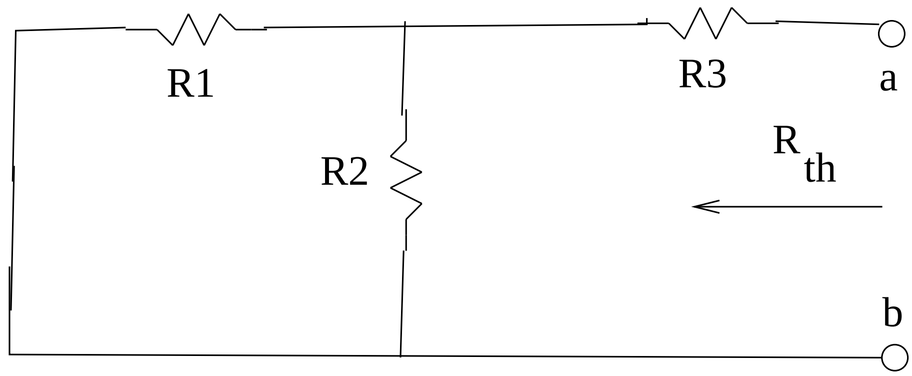

Figure 26: Equivalente Norton

Logo, equivalente Thévenin na Figure 27:

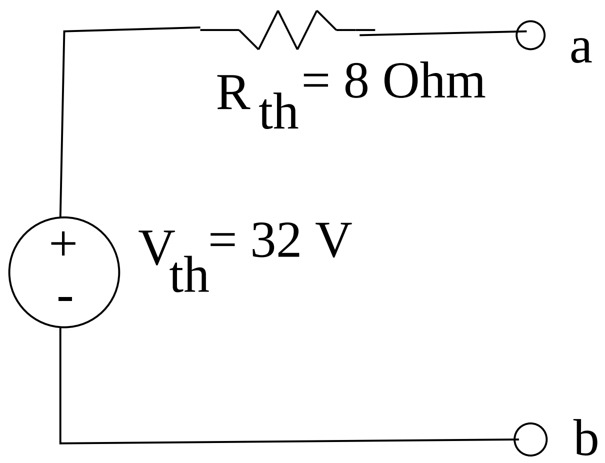

Figure 27: Equivalente Norton

3.3 Equivalente Thévenin e Norton com presença de fonte vinculada

Vale quando não tem fonte vinculada ao A em B e vice-versa (ver Figure 15).

Exemplo: Seja o circuito da Figure 28. Determine o equivalente Thévenin e Norton correspondente do circuito à esqueda do terminal (a,b).

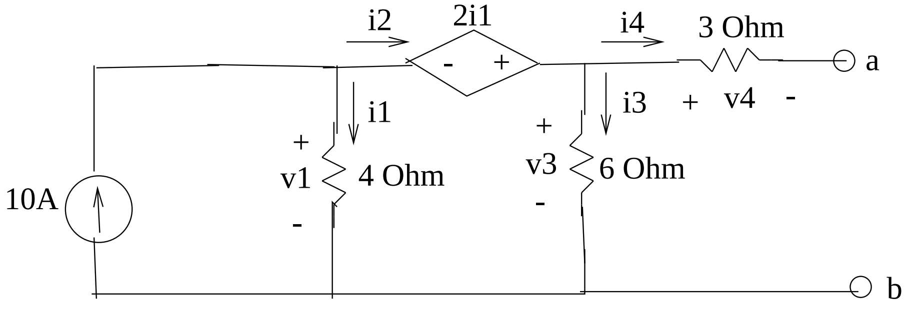

Figure 28: Circuito com fonte vinculada

A) I_N (poderia ser V_{th})

Da Figure 29, tem-se:

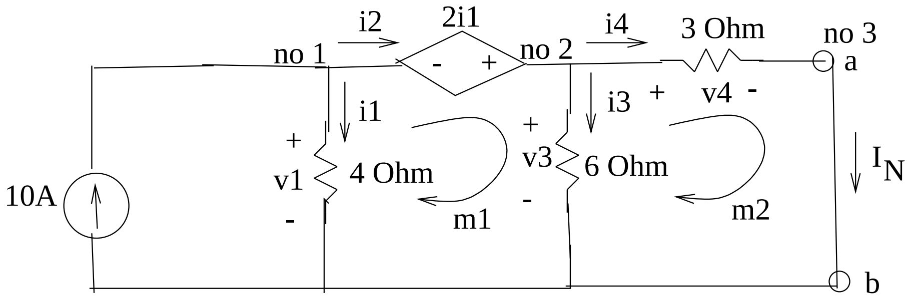

Figure 29: I_N

- no 1: $10 = i_1 + i_2$
- no 2: $i_2 = i_3 + i_4$
- no 3: $i_4 = I_N$
- m1: $-2i_1 + 6i_3 - 4i_1 = 0$
- m2: $3i_4 - 6i_3 = 0$

5 equações a 5 incógnitas. Resolvendo:

$I_N = 5$ A

B) R_{th}

Fonte vinculada não pode ser anulada. Portanto, pode-se achar V_{th} e depois fazer $R_{th} =$

$\frac{V_{th}}{I_N}$ ou anular as fontes não vinculadas, colocar uma fonte V_x entre os terminais (a,b), resolver, obtendo corrente I_x na fonte V_x colocada e calcular $R_{th} = \frac{V_x}{I_x}$.

Resolvendo via primeira opção (ver Figure 30):

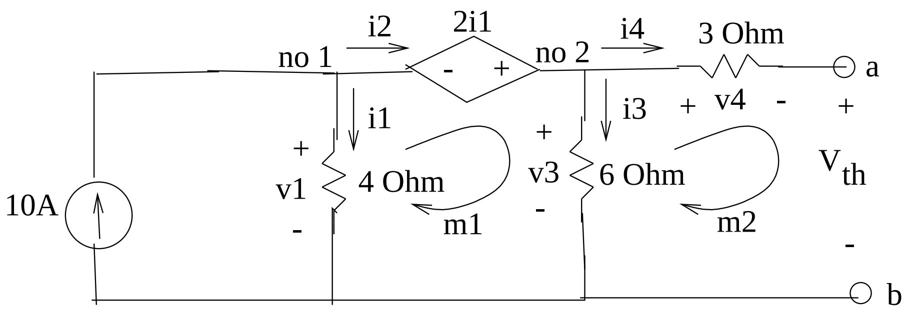

Figure 30: V_{yh}

- no 1: $10 = i_1 + i_2$
- no 2: $i_2 = i_3$ pois $i_4 = 0$
- m1: $-2i_1 + 6i_3 - 4i_1 = 0$
- m2: $3i_4 + V_{th} - 6i_3 = 0 \Rightarrow V_{th} = 6i_3$

4 equações a 4 incógnitas. Resolvendo:

$V_{th} = 30$ V

Consequentemente: $R_{th} = \frac{V_{th}}{I_N} = \frac{30}{5} = 6\Omega$

Resposta na Figure 31.

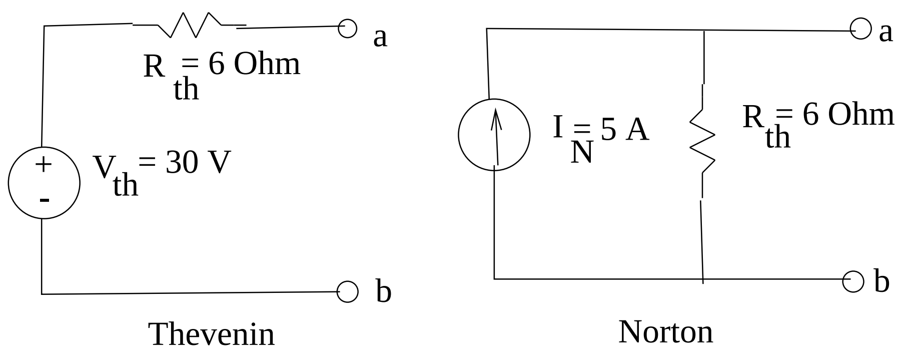

Figure 31: Equivalentes Thévenin e Norton do circuito da Figure 28

3.4 Transferência máxima de potência para carga

Na prática, as fontes não são ideais
Tensão (em fontes de tensão) ou corrente (em fontes de corrente) não são constantes com a

carga.
Para representar esta situação, coloca-se como nas Figure 32 (fonte de tensão) e 33 (fonte de corrente).

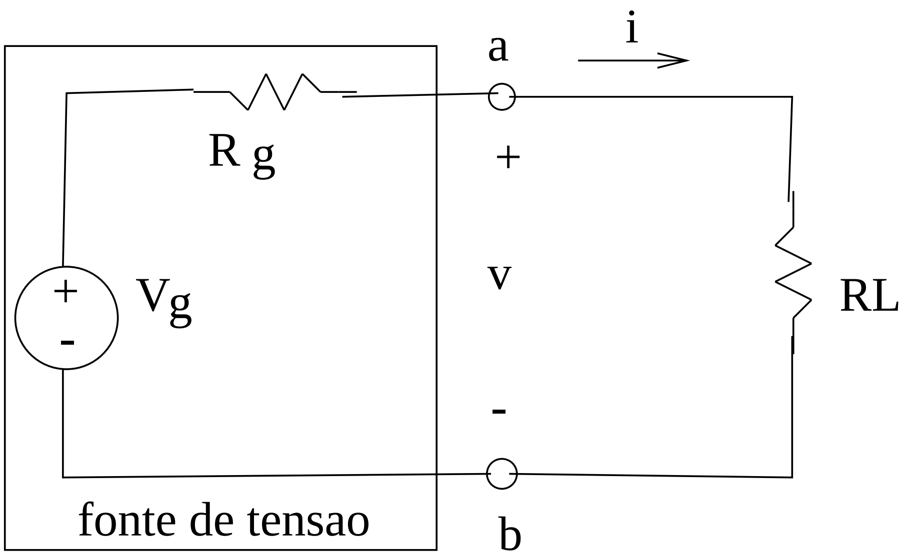

Figure 32: Fonte de tensão

onde:

- V_g = fonte de tensão ideal
- I_g = fonte de corrente ideal
- R_g = resistência interna da fonte

- $RL =$ carga
- $v =$ tensão sobre a carga RL
- $i =$ corrente fornecida à carga RL

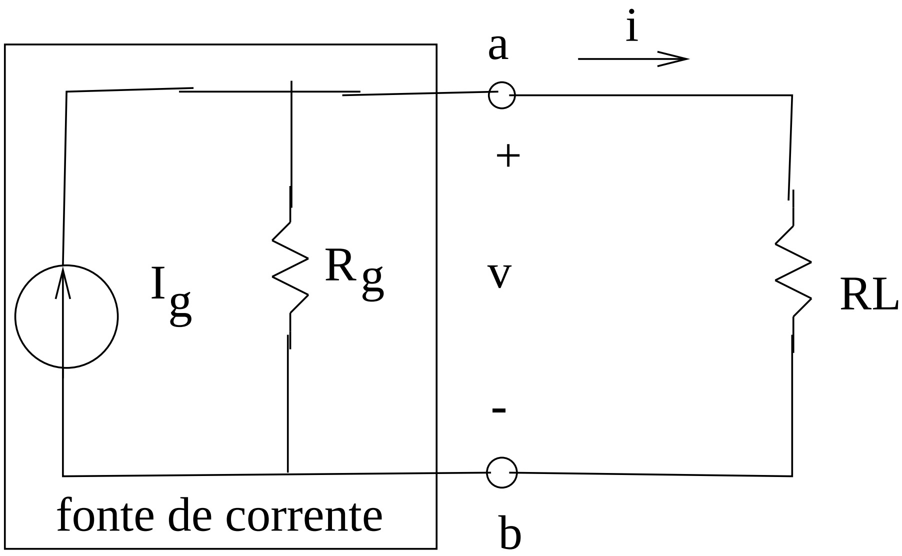

Figure 33: Fonte de corrente

Na Figure 32, como $v = RL.i$:

$v = \frac{RL}{R_g+RL}.V_g$ com $i = \frac{1}{R_g+RL}V_g$

Na Figure 33, como $i = \frac{v}{RL}$:

$i = \frac{R_g}{R_g+RL}.I_g$ com $v = \frac{R_g RL}{R_g+RL}.I_g$

Note que, na Figure 32:

$p_{RL} = v.i = \frac{RL}{(R_g+RL)^2} V_g^2$

e, portanto, é possível calcular a máxima transferência de potência para a carga RL:

$\frac{\delta p_{RL}}{\delta RL} = 0 \Rightarrow R_g = RL.$

Para provar que é máxima transferência, basta verificar que:
$\frac{\delta^2 p_{RL}}{\delta RL^2} < 0$

4 Método dos Nós e Método de Malhas, Sistematização

Os conceitos de tensão nos nós e corrente de malhas vistos em 1.3 são utilizados aqui.

4.1 Método de nós

Este método consiste em escrever as equações do circuito em termos das tensões nos nós. Como em circuitos elétricos com n nós, tem-se $(n-1)$ nós independentes, resultam em um sistema de $(n-1)$ equações a $(n-1)$ incógnitas (bem menor do que $2b$ equações a $2b$ incógnitas).

Consiste dos seguintes passos:

1. Associar tensões e_k a cada um dos n nós

do circuito e escolher um nó de referência, associando tensão nula (por exemplo, $e_0 = 0$).

2. Escrever as equações de LKC, uma para cada um dos $(n-1)$ nós, em função de e_k:

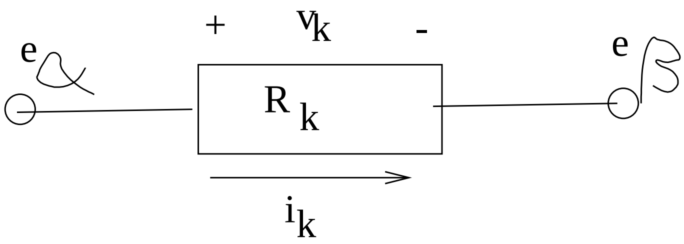

Figure 34: Corrente em função das tensões nos nós

$$i_k = \frac{v_k}{R_k} = \frac{e_\alpha - e_\beta}{R_k}$$

3. Resolver as $n-1$ equações a $n-1$ incógnitas, obtendo os valores de $e_k, k = 1, n-1$.

4. $i_k = \frac{e_\alpha - e_\beta}{R_k}$ e $v_k = R_k . i_k$.

Exemplo:

Seja o circuito da Figure 35. Determine i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 utilizando o método de tensão nos nós.

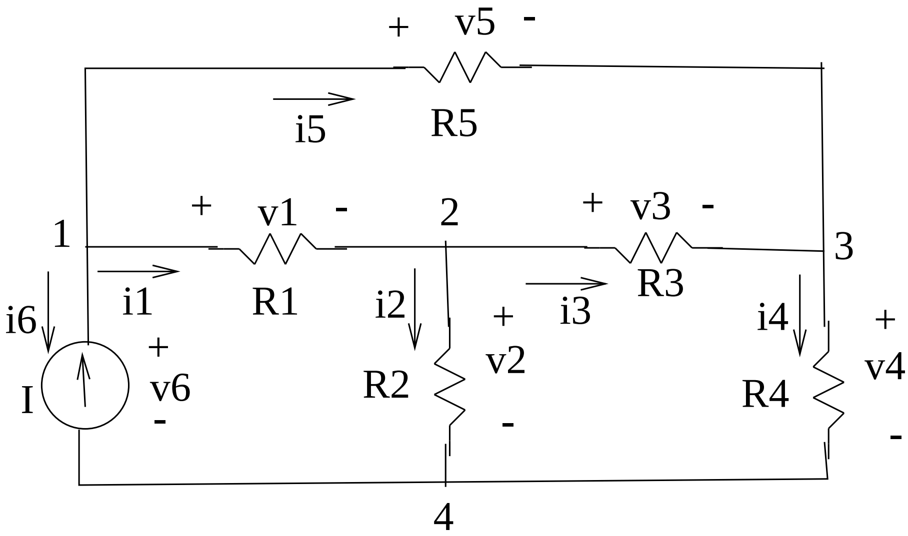

Figure 35: Exemplo - método dos nós

Solução:

- Passo 1: $E_4 = 0$

- Passo 2:

$$
\begin{cases}
no1: & i_1 + i_5 + i_6 = 0 \\
\Rightarrow & \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_5}{R_5} - I = 0 \\
\Rightarrow & \frac{e_1 - e_2}{R_1} + \frac{e_1 - e_3}{R_5} = I \\
no2: & -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\
\Rightarrow & -\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} = 0 \\
\Rightarrow & -\frac{e_1 - e_2}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_2 - e_3}{R_3} = 0 \\
no3: & -i_3 + i_4 - i_5 = 0 \\
\Rightarrow & -\frac{v_3}{R_3} + \frac{v_4}{R_4} - \frac{v_5}{R_5} = 0 \\
\Rightarrow & -\frac{e_2 - e_3}{R_3} + \frac{e_3}{R_4} - \frac{e_1 - e_3}{R_5} = 0
\end{cases}
$$

Rearrumando:

$$
\begin{cases}
(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5})e_1 - (\frac{1}{R_1})e_2 - (\frac{1}{R_5})e_3 & = I \\
-(\frac{1}{R_1})e_1 + (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3})e_2 - (\frac{1}{R_1})e_3 & = 0 \\
-(\frac{1}{R_5})e_1 - (\frac{1}{R_3})e_2 + (\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5})e_3 & = 0
\end{cases}
$$

que pode ser colocado na forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou seja: $Y.e = If, \Rightarrow e = Y^{-1}If$

onde:

Y = matriz de admitância
e = vetor das tensões nos nós
If = vetor das fontes de corrente

- Passo 3: Resolvendo, obtém-se e_1, e_2 e e_3

- Passo 4: Calcula-se $(i_k, v_k), k\epsilon 1, 5$

4.2 Método de corrente de malhas

Consiste em escrever as equações do circuito em termos das correntes das malhas. Como em circuitos elétricos com n nós, tem-se $[b-(n-1)]$ nós independentes, resultam em um sistema de $[b-(n-1)]$ equações a $[b-(n-1)]$ incógnitas (bem menor do que $2b$ equações a $2b$ incógnitas).

Consiste dos seguintes passos:

1. Associar correntes J_k a cada uma das $[b-(n-1)]$ malhas do circuito.
2. Escrever as equações de LKT, uma para cada uma das $[b-(n-1)]$ malhas, em função de J_k, utilizando:

   $$v_k = R_k.i_k = R_k.(J_l - J_m)$$

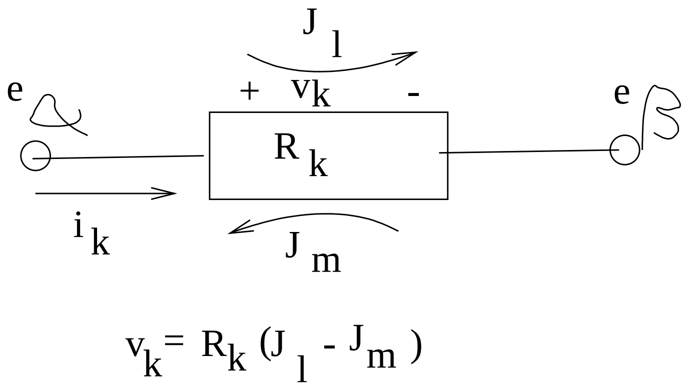

Figure 36: Tensões em função das correntes de malhas

pois: $i_k = J_l - J_m$

3. Resolver as $[b-(n-1)]$ equações a $[b-(n-1)$ incógnitas, obtendo os valores de $J_k, k = 1, b-(n-1)$.
4. $i_k = J_l - J_m$ e $v_k = R_k.i_k$.

Exemplo:

Seja o circuito da Fugure 37. Determine i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 utilizando o método das correntes de malhas.

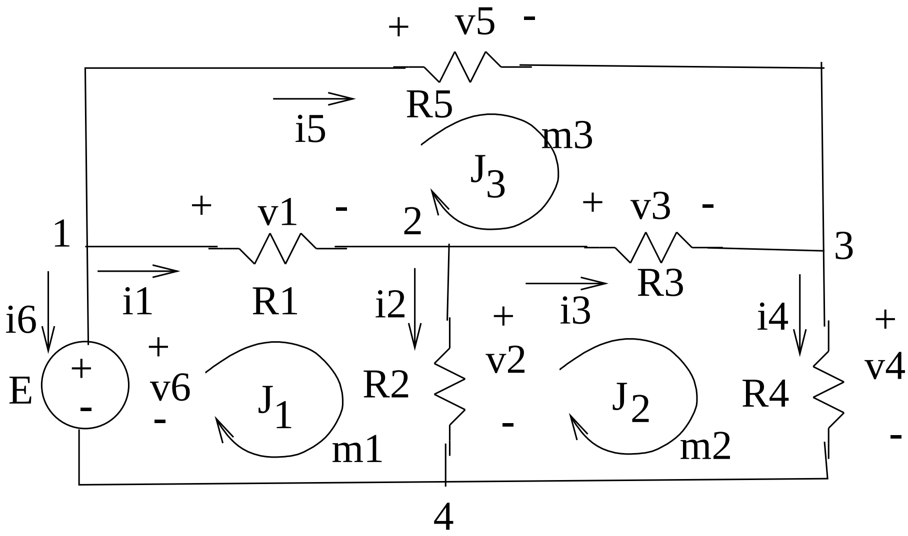

Figure 37: Exemplo - método das correntes de malhas

Solução:

- Passo 1: $J_1,\ J_2,\ J_3$
- Passo 2:

$$
\begin{cases}
m1 : v_1 + v_2 - E = 0 \\
R_1 i_1 + R_2 i_2 - E = 0 \\
R_1(J_1 - J3) + R_2(J_1 - J_2) = E \\
m2 : -v_2 + v_3 + v_4 = 0 \\
-R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 = 0 \\
-R_2(J_1 - J_2) + R_3(J_2 - J_3 + R_4 J_2 = 0 \\
m3 : -v_1 - v_3 + v_5 = 0 \\
-R_1 i_1 - R_3 i_3 + R_5 i_5 = 0 \\
-R_1(J_3 - J_1) - R_3(J_3 - J_2) + R_5 J_3 = 0
\end{cases}
$$

Rearrumando:

$$
\begin{cases}
(R_1 + R_2)J_1 - R_2 J_2 - R_1 J_3 & = E \\
-R_2 J_1 + (R_2 + R_3 + R_4)J_2 - R_3 J_3 & = 0 \\
-R_1 J_1 - R_3 J_2 + (R_1 + R_3 + R_5)J_3 & = 0
\end{cases}
$$

que pode ser colocado na forma:

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & -R_1 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4 & -R_3 \\ -R_1 & -R_3 & R_1+R_4+R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou seja: $Z.J = Ef, \Rightarrow J = Z^{-1}Ef$

onde:

Z =	matriz de impedância
J =	vetor das correntes de malhas
Ef =	vetor das fontes de tensão

- Passo 3: Resolvendo, obtém-se J_1, J_2 e J_3

- Passo 4: Calcula-se $(i_k, v_k), k\epsilon 1, 5$

As matrizes de admitância Y e de impedância Z obtidas nos métodos de tensão nos nós e de corrente de malhas podem ser deduzidas de forma sistemática como mostrados a seguir.

A) Matriz de admitância

Sejam:

$$
\begin{aligned}
A = &\text{ matriz de incidência } (\Re^{(n-1).b}) \\
i = &\text{ vetor de correntes nos bipolos } (\Re^{b}) \\
v = &\text{ vetor das tensões nos bipolos } (\Re^{b}) \\
e = &\text{ vetor das tensões nos nós } (\Re^{(n-1)}) \\
J = &\text{ vetor das correntes de malhas } (\Re^{b-(n-1)})
\end{aligned}
$$

Definindo uma matriz Y_b e um vetor I_b tal que:

$$\begin{cases} Y_b(i,j) = & \frac{1}{R_1}\ se\ i = j\ ou\ 0\ se\ fonte \\ Y_b(i,j) = 0 & se\ i \neq j \\ I_b(k) = & -I\ se\ \text{k}\ fonte\ de\ valor\ I \\ I_b(k) = 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

Pode-se escrever as seguintes equações:

1. $i = Y_b v + I_b$
2. $Ai = 0$ (de 1.3)
3. $v = A^t e$ (de 1.6)

Multiplicando a equação 1 pela esquerda por A, obtém-se:

$$Ai = AY_b v + AI_b = 0$$

$$\Rightarrow (AY_b A^t)e = (-AI_b)$$

onde:

$AY_bA^t = Y$ = matriz de admitância vista em 4.1

$-(AI_b) = If$ = vetor das fontes de corrente visto em 4.1

Exemplo:

No exemplo da Figure 35:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$Y_b = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$I_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix}.$$

e obtém-se:

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \end{bmatrix}$$

$$If = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B) Matriz de impedância

Sejam:

$$\begin{aligned}
M =& \text{ matriz de malhas } (\Re^{b-(n-1).b}) \\
i =& \text{ vetor de correntes nos bipolos } (\Re^{b}) \\
v =& \text{ vetor das tensões nos bipolos } (\Re^{b}) \\
e =& \text{ vetor das tensões nos nós } (\Re^{(n-1)}) \\
J =& \text{ vetor das correntes de malhas } (\Re^{b-(n-1)})
\end{aligned}$$

Definindo uma matriz Z_b e um vetor E_b tal que:

$$\begin{cases} Z_b(i,j) = & R_i \; se \; i = j \; ou \; 0 \; se \; fonte \\ Z_b(i,j) = 0 & se \; i \neq j \\ E_b(k) = & E \; se \; \text{k} \; fonte \; de \; valor \; E \\ E_b(k) = 0 & caso \; contrario \end{cases}$$

Pode-se escrever as seguintes equações:

1. $v = Z_b i + E_b$
2. $Mv = 0$ (de 1.3)
3. $i = M^t J$ (de forma similar ao obtido em 1.6)

Multiplicando a equação 1 pela esquerda por M, obtém-se:

$$Mv = MZ_b i + ME_b = 0$$

$$\Rightarrow (MZ_b M^t)J = (-ME_b)$$

onde:

$MZ_bM^t = Z =$ matriz de impedância vista em 4.2

$-(ME_b) = Ef =$ vetor das fontes de corrente visto em 4.2

Exemplo:

No exemplo da Figure 37:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$Z_b = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$E_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix}.$$

obtendo:

$$Z = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & -R_1 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_3 \\ -R_1 & -R_3 & R_1 + R_4 + R_5 \end{bmatrix}$$

$$Ef = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A. Y.
DSE-FEEC-UNICAMP
1s/2020