

## **EA513 I - Circuitos Elétricos I**

### **Ementa**

1. Elementos de Circuitos (*Cap. 1, 2 e 3 do Johnson*)
  - Considerações Iniciais
  - Tensão, Corrente, Potência e Energia, Fontes Independentes e Vinculadas
  - Leis de Kirchhoff
  - Resistores, Capacitores e Indutores
  - Amplificadores Operacionais
  - Teorema de Tellegen e de Substituição
2. Circuitos Resistivos Simples (*Cap. 2, 4 e 5 do Johnson*)
  - Resistores em Série, em Paralelo, Propriedades
  - Equivalência Estrela-Triângulo
  - Circuitos Equivalentes de Thévenin e de Norton, Transferência Máxima de Potência
  - Método dos Nós e Método das Malhas, Sistematização
3. Indutores e Capacitores (*Cap. 7 do Johnson*)
  - Associação de Capacitores
  - Associação de Indutores
  - Indução Mútua
  - Transformadores
4. Circuitos de Primeira Ordem (*Cap. 8 do Johnson*)
  - Circuitos Autônomos de Primeira Ordem
  - Circuitos Não-Autônomos de Primeira Ordem
5. Circuitos de Segunda Ordem (*Cap. 9 do Johnson*)

- Circuito de Segunda Ordem Autônomo
  - Circuito de Segunda Ordem Não-Autônomo
6. Representação por Equações de Estado (*Cap. 9 do Yaro*)
- Equações de Estado
  - Resolução de Equações de Estado
7. Excitação Senoidal e Fasores (*Cap. 10 e 11 do Johnson*)
- Propriedade de Senóides
  - Excitações Complexas
  - Fasores
  - Impedância e Admitância, Associação de Impedâncias e Leis de Kirchhoff
  - Análise Nodal e Análise de Malha
  - Teoremas de Rede, Diagramas Fasoriais
8. Potência em Regime Permanente (*Cap. 12 do Johnson*)
- Potência Média
  - Valor Eficaz
  - Fator de Potência
  - Potência Complexa
9. Bibliografia
- Johnson, D.E.; Hilburn, J.L.; Johnson, J.R. - Fundamentos de Análise de Circuitos Elétricos, PHB, Quarta Edição, 1994.
  - Burian Jr., Yaro; Lyra, Ana Cristina C. - Circuitos Elétricos, Pearson Prentice Hall, 2006.
  - Alexander, C.K.; Sadiku, M.N.O. Fundamentos de Circuitos Elétricos, Bookman.

## Cap. I - Elementos de Circuitos

### 1 Considerações Iniciais

- Porque estudar circuitos elétricos?
- Onde são encontradas as energias elétricas?
- Quais são os meios de produção?
- Qual é a matriz energética no Brasil?

## 2 Tensão, Corrente, Potência, Energia, Fontes Independentes, Fontes Vinculadas

- Tensão

- Medida de quanto um corpo está mais carregado que outro.

- Definição: energia necessária para mover uma carga elétrica de 1 Coulomb de um ponto a outro

- Tensão =  $v = \frac{dw}{dq}$

onde:  $v$  = tensão,  $w$  = energia,  $q$  = carga em Coulomb (1 C é carga de  $1.602 \times 10^{19}$  elétrons)

- Unidade: **Volts = V**

- Representação gráfica:

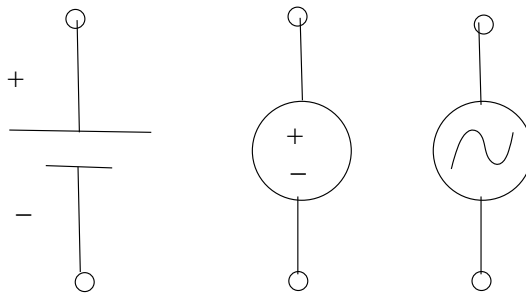


Figure 1: Fontes de tensão

## ● Corrente Elétrica

- Medida de quantidade de carga elétrica em movimento num meio condutor por unidade de tempo

- Definição: movimento da carga  $q$  (Coulomb) em meio condutor

- Corrente =  $i = \frac{dq}{dt}$

onde:  $i$  = corrente elétrica,  $t$  = tempo,  $q$  = carga em Coulomb

- Unidade: **Ampéres = A**

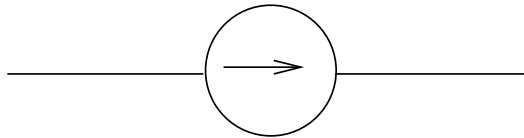


Figure 2: Fonte de corrente

- Potência

- Definição: taxa de variação da energia por unidade de tempo

- Potência =  $p = \frac{dw}{dt}$

onde:  $p$  = potência,  $t$  = tempo,  $w$  = energia

-  $p = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = v \cdot i$

- Unidade: **Watts = W**

- Convenções:

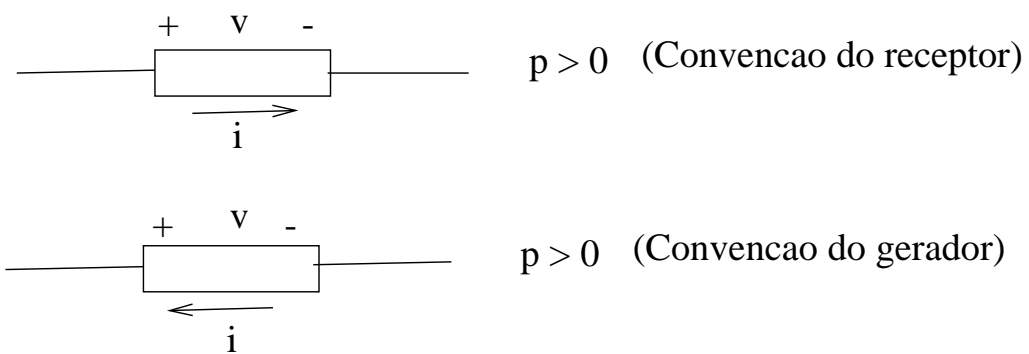


Figure 3: Convenções de sinais de potência

## ● Energia

- Integral da potência no tempo

- Energia

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p dt \quad (1)$$

- Unidade: **Joules = J**

- Fontes independentes

Fonte de tensão independente: tensão fica constante independente da corrente

Fonte de corrente independente: corrente fica constante independente da tensão

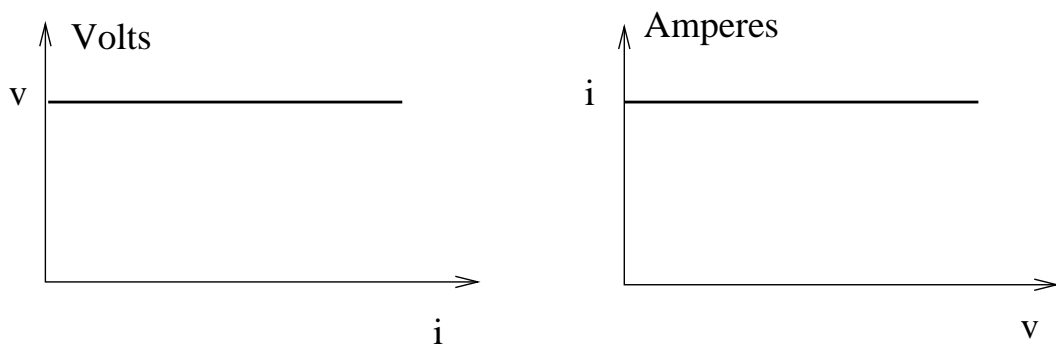


Figure 4: Fontes independentes ideais

- Fontes vinculadas

Tensão ou corrente depende de tensão ou



corrente de algum ponto do circuito.

Alguns exemplos: transistores, amplificadores operacionais.

- Tipos de fontes vinculadas:

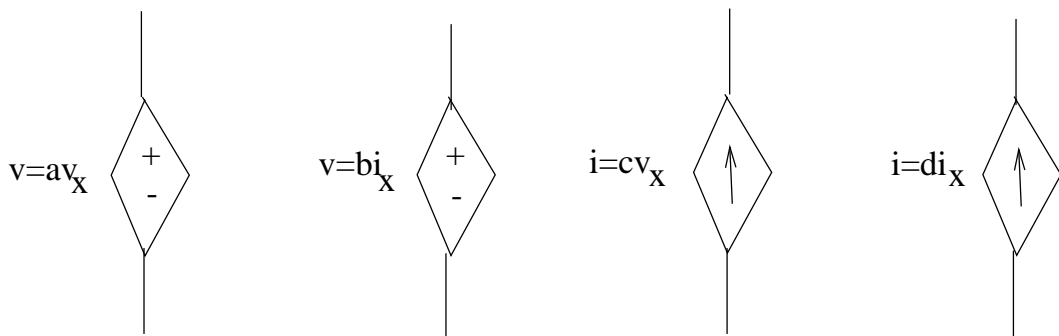


Figure 5: Tipos de fontes vinculadas

### 3 Leis de Kirchhoff

- Bipolo: duas incógnitas, tensão  $v$  e corrente  $i$ 
  - $b$  bipolos implica  $2b$  incógnitas, com  $b$  equações que relacionam tensão  $v$  e corrente  $i$ 
    - Faltam  $b$  equações para achar as  $2b$  incógnitas (sistema de  $2b$  equações a  $2b$  incógnitas)
      - As 2 leis de **Kirchoff** (das correntes e das tensões) fornecem as outras  $b$  equações faltantes
- **Lei de Kirchoff das correntes (LKC)**
  - Definição: nó é um ponto de ligação de 2 ou mais bipolos
  - Regra: Soma algébrica das correntes em

um nó é zero

- Convenção: corrente que chega em nó leva sinal negativo (-) e corrente que sai do nó leva sinal positivo (+)

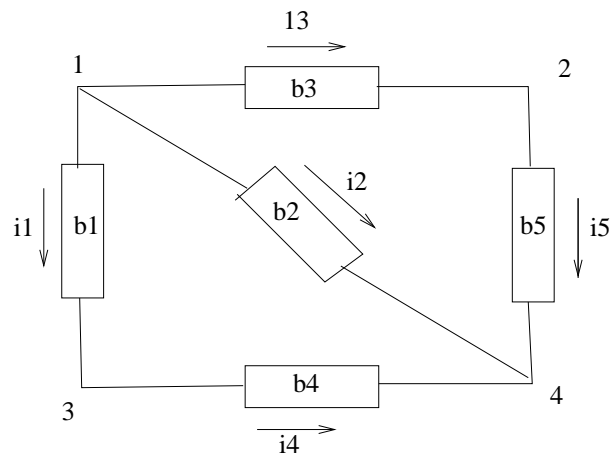


Figure 6: Exemplo de um circuito elétrico com 4 nós

- nó 1:  $i_1 + i_2 + i_3 = 0$

- nó 2:  $-i_3 + i_5 = 0$

- nó 3:  $-i_1 + i_4 = 0$

- nó 4:  $-i_2 - i_4 - i_5 = 0$

- Equação 4 é linearmente dependente das outras três ( $4 = -(1 + 2 + 3)$ )

**- Circuitos com  $n$  nós tem  $(n - 1)$  equações linearmente independentes (LI)**

- Representação matricial das equações das correntes (linhas são nós e colunas são os bipolos):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- A matriz é chamada de incidência (tem  $(n-1)$  linhas e  $b$  colunas)

- Ou:  $Ai = 0$

● **Lei de Kirchoff das tensões (LKT)**

- Definição: malha ou laço é um percurso fechado formado de bipolos, cada bipolo sendo visitado apenas uma vez

- Regra: Soma algébrica das tensões em uma malha é zero

- Convenção: a tensão leva sinal (+) se o sentido da malha coincide com o sentido da tensão (ou seja, a malha entra no sinal + da tensão) e leva sinal (-) caso contrário.

- m1:  $-v_1 + v_2 - v_4 = 0$

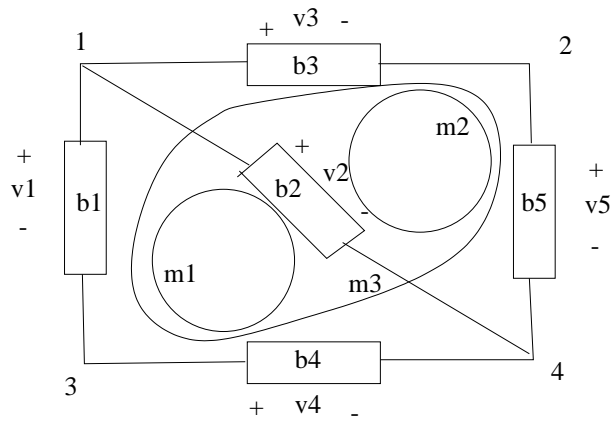


Figure 7: Exemplo de um circuito elétrico com 3 malhas

- m2:  $-v_2 + v_3 + v_5 = 0$

- m3:  $-v_1 + v_3 - v_4 + v_5 = 0$

- Equação 3 é linearmente dependente das outras duas ( $m_3 = m_1 + m_2$ )

- **Circuitos com  $b$  bipolos e  $n$  nós tem  $[b - (n - 1)]$  equações de malha linearmente independentes (LI)**

- Representação matricial das equações das

tensões (linhas são malhas e colunas são os bipolos):

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- A matriz acima é chamada das malhas (tem  $[b-(n-1)]$  linhas e  $b$  colunas)

- Ou:  $Mv = 0$

## ● Resumo

- Num circuito elétrico com  $b$  bipolos e  $n$  nós tem  $(n - 1)$  equações LKC linearmente independentes e  $[b - (n - 1)]$  equações LKT linearmente independentes, totalizando  $2b$  equações a  $2b$  incógnitas.

## 4 Resistores, Capacitores e Indutores

### ● Resistores - Lei de Ohm

- Definição: Resistores são componentes elétricos que apresentam oposição ou resistência ao movimento das cargas elétricas nos meios condutores.

- Utilização: aquecedor, chuveiro, forno elétrico, etc.

- De carbono, silício, SMT.

- Elemento: Resistor ou  $R$  ( $R = \frac{\rho l}{A}$  onde  $\rho$  = resistividade,  $l$  = comprimento,  $A$  = área)

- Unidade: **Ohm** =  $\Omega$



- Símbolo:

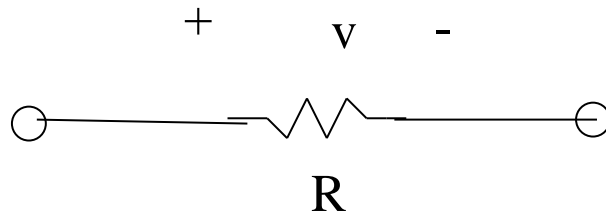


Figure 8: Representação de um resistor

- Lei de Ohm:  $v = R.i$  (caso linear)

- Potência nos resistores:  $p = v.i = R.i^2$

- Circuito aberto: resistência infinita, não passa corrente ( $i = 0$ )

- Curto Circuito: resistência nula, tensão nula ( $v = 0$ )

- Medidor: ohmímetro ou multímetro

- Tipos: fixa, potenciômetro, varistor, fotosensível,

etc.

## ● Capacitores

- Definição: São armazenadores de energia na forma de campo elétrico. São placas condutoras (armadura) separadas por um dielétrico (isolante).

- Utilização: baterias, fontes, filtros, etc.

- De cerâmica, poliestireno, eletrolítico, etc..

- Elemento: Capacitor ou  $C$  ( $C = \epsilon \cdot \frac{A}{d}$  onde  $\epsilon$  = permissividade,  $A$  = área,  $d$  = distância)

- Unidade: **Faraday** =  $F$

- Símbolo:

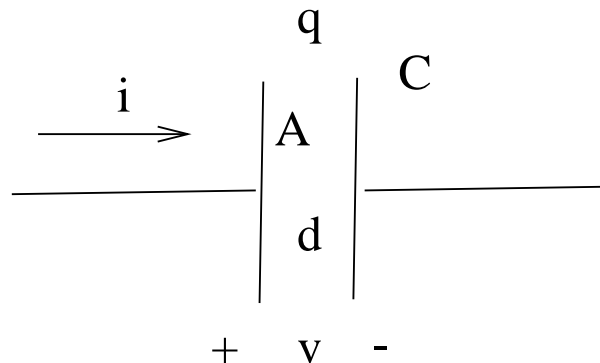


Figure 9: Representação de um capacitor

- Carga elétrica num capacitor:  $q = Cv$
- Relação  $v$  x  $i$ :  $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt}$  (caso linear)
- Energia em capacitores:  $\varepsilon = \frac{1}{2}Cv^2$
- Se  $v$  é constante,  $i = 0$ , não passa corrente
- $v$  não pode variar instantaneamente (ter saltos) pois neste caso,  $i \rightarrow \infty$
- Medidor: capacímetro

- Tipos: fixa, variável, supercapacitores.
- Exercício: Seja um capacitor de  $C = 0.5 \mu\text{F}$ , submetido a uma tensão dada por  $v(t) = 0$  se  $t < 0$ ,  $v(t) = 4t$  se  $0 \leq t \leq 1$ ,  $v(t) = 0$  se  $t > 1$ . Determinar: a)  $i(t)$ , b)  $p(t)$ , c)  $\varepsilon(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

## ● Indutores

- Definição: São armazenadores de energia na forma de campo magnético. São um número de espiras de fios condutores enrolados juntos em torno de um núcleo, em geral ferro magnético.
- Utilização: transformadores, motores, filtros, equipamentos eletromagnéticos.
- De cobre ou alumínio

- Elemento: Indutor ou  $L$  ( $L = \frac{n^2}{\mathfrak{R}}$  onde  $n$  = número de espiras,  $\mathfrak{R}$  = relutância)

- Unidade: **Henry** =  $H$

- Símbolo:

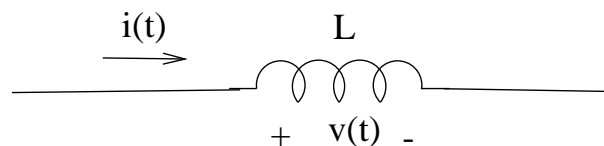


Figure 10: Representação de um indutor

- Fluxo magnético  $\lambda$  em Webers (W) =  $Li$

- Relação  $v$  x  $i$ :  $v = \frac{d\lambda}{dt} = L \frac{di}{dt}$  (caso linear)

- Energia em indutores:  $\varepsilon = \frac{1}{2}Li^2$

- Se  $i$  é constante,  $v = 0$ , curto circuito

- $i$  não pode variar instantaneamente (ter saltos) pois neste caso,  $v \rightarrow \infty$
- Medidor: normalmente, medidor de LCR
- Tipos: bobina, toroidal, etc..
- Indutores geralmente têm resistências pois funcionam em correntes alternadas (sensíveis às variações de fluxo magnético). Costuma-se representar através da configuração como na Figure 11.

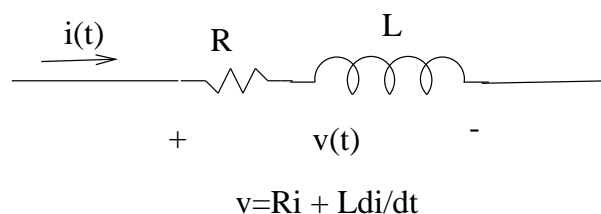


Figure 11: Representação de um indutor

- Com núcleo ferro magnético, apresenta histerese.

- 2 ou mais indutores próximos apresentam indutâncias mútuas.

- Exercício: Seja o circuito da Figure 12. Supondo condições iniciais nulas e de que a chave é fechada no instante  $t = 0$ , determinar a equação cuja solução fornece a corrente  $i(t)$  no indutor.

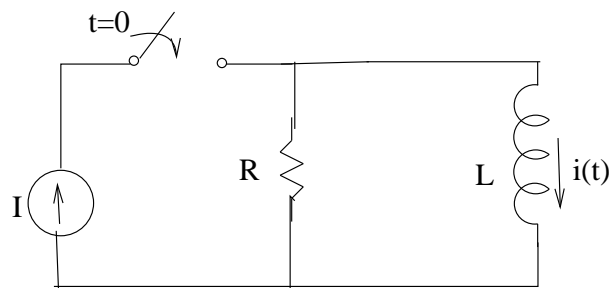


Figure 12: Representação de um indutor

## 5 Amplificadores Operacionais

Trata-se de um circuito eletrônico, normalmente representado como na Figure 13.

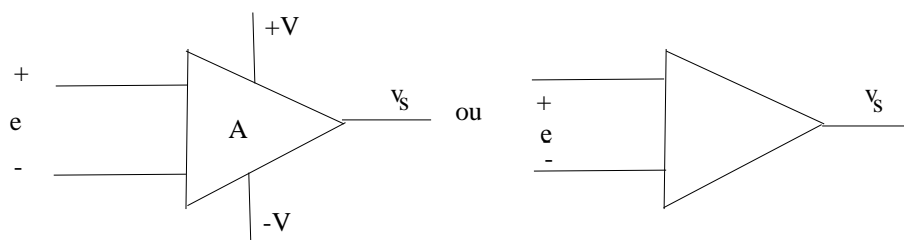


Figure 13: Representação de um Amplificador Operacional

$$-V \leq v_s \leq +V$$

Além disso:  $v_s = A \cdot e$

Normalmente  $A$  grande  $\Rightarrow e$  pequeno (para evitar saturação)

Impedância de entrada grande  $\Rightarrow$  corrente de entrada do amplificador bem pequena

Algumas configurações:



- Inversor

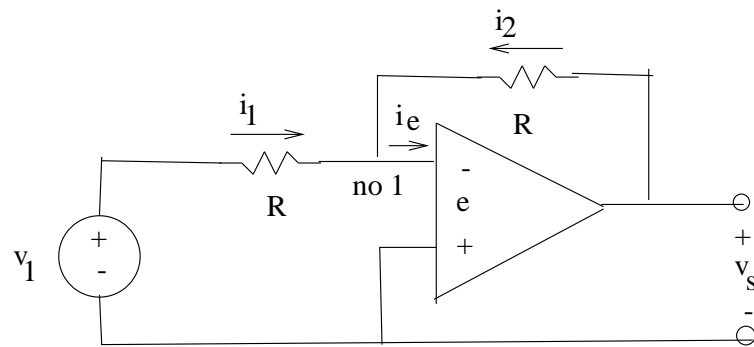


Figure 14: Representação de um Amplificador Operacional Inversor

$e$  bem pequeno  $\Rightarrow e \cong 0$

$i_e$  bem pequeno  $\Rightarrow i_e \cong 0$

LKC no nó 1  $\Rightarrow i_1 + i_2 = i_e = 0$

Portanto:  $i_1 = \frac{v_1}{R}$  e  $i_2 = \frac{v_s}{R}$ ,  $\Rightarrow v_s = -v_1$

- Somador

$e \cong 0$  e  $i_e \cong 0$ , LKC no nó 1  $\Rightarrow i_1 + i_2 + i_3 + i_r = i_e = 0$

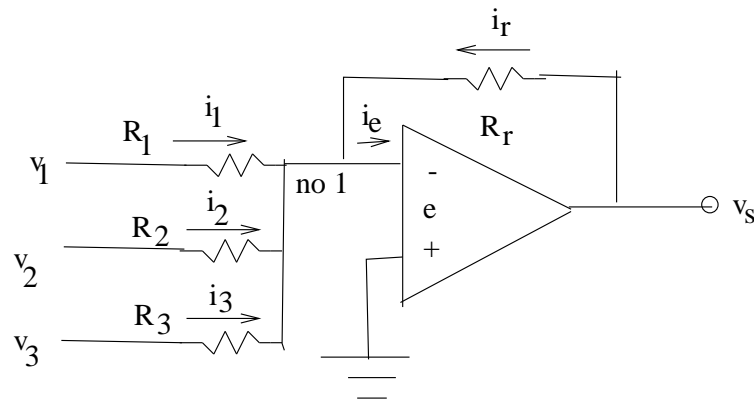


Figure 15: Representação de um Amplificador Operacional Somador

$$\text{Ainda: } i_1 = \frac{v_1}{R_1}, i_2 = \frac{v_2}{R_2}, i_3 = \frac{v_3}{R_3} \text{ e } i_r = \frac{v_s}{R_r}$$

$$\Rightarrow v_s = -\frac{R_r}{R_1}v_1 - \frac{R_r}{R_2}v_2 - \frac{R_r}{R_3}v_3$$

## ● Integrador

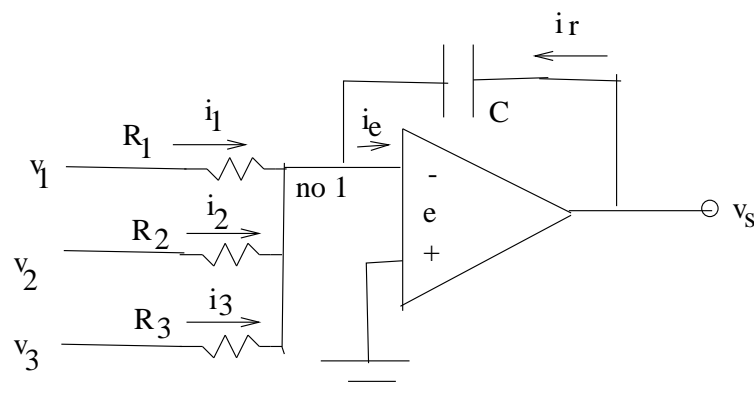


Figure 16: Representação de um Amplificador Operacional Integrador

$$e \cong 0 \text{ e } i_e \cong 0, \text{ LKC no nó 1 } \Rightarrow i_1 + i_2 +$$

$$i_3 + i_r = i_e = 0$$

Ainda:

$$i_1 = \frac{v_1}{R_1}, i_2 = \frac{v_2}{R_2}, i_3 = \frac{v_3}{R_3} \text{ e } i_r = C \frac{dv_s}{dt}$$

$\Rightarrow$

$$v_s = v_s(0) - \int_0^t \left( \frac{1}{CR_1} v_1 + \frac{1}{CR_2} v_2 + \frac{1}{CR_3} v_3 \right) dt \quad (2)$$

- Fonte de corrente

$$e \cong 0 \text{ e } i_e \cong 0, \text{ LKT na malha 1 } \Rightarrow \\ -v_e + e + Ri_c = -v_e + Ri_c = 0$$

$$\Rightarrow i_c = \frac{v_e}{R}$$

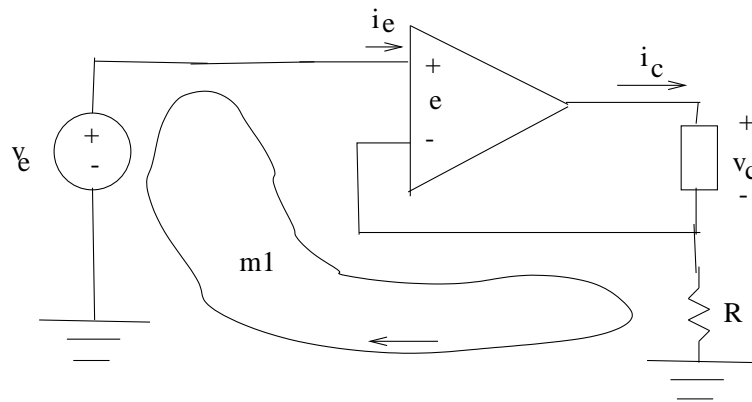


Figure 17: Representação de uma fonte de corrente utilizando Amplificador Operacional

## 6 Teorema de Tellegen e de Substituição

- Teorema de Tellegan - Estabelece que, uma vez adotada uma convenção (receptor ou gerador), a soma do produto das tensões com as respectivas correntes de todos os bipolos do circuito é nula.

- Ou seja:  $\sum_{k=1}^b v_k i_k = v^t i = 0$

- Tensão nos nós do circuito: uma vez definido um nó de referência (nó terra), pode-se as-

sociar tensões  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  aos outros ( $n-1$ ) nós em relação ao nó de referência (diferença de tensão entre o nó  $k$  e o nó de referência).

- Exemplo:

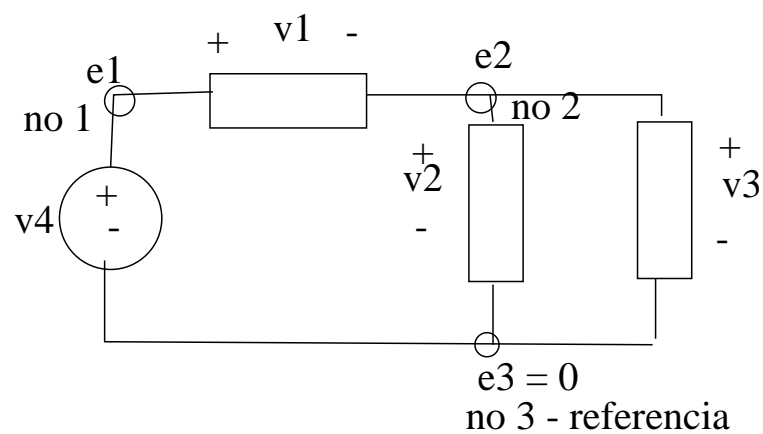


Figure 18: Exemplo de tensões nos nós de um circuito

$$\begin{cases} v_1 = e_1 - e_2 \\ v_2 = e_2 \\ v_3 = e_2 \\ v_4 = e_1 \end{cases}, v = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

- Chamando de:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

tem-se:  $v = Xe$  ou  $v^t = e^t X^t$

Mas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

que é matriz de incidência do circuito da Figure 18.

Note que  $X = A^t$ , portanto  $v^t i = e^t A i$ .

Como  $A i = 0$ ,  $\Rightarrow v^t i = 0$

QED

- Teorema de Substituição

Em um circuito elétrico, um bipolo ou um conjunto de bipolos sujeitos à uma tensão  $v_k$  e com corrente de entrada  $i_k$ , pode ser substituído por um outro bipolo que quando sujeito à tensão  $v_k$  ocasiona uma corrente  $i_k$ .

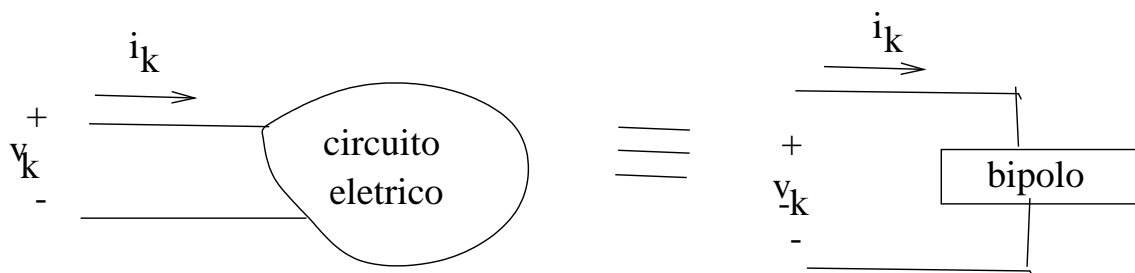


Figure 19: Teorema de substituição

Exemplo:

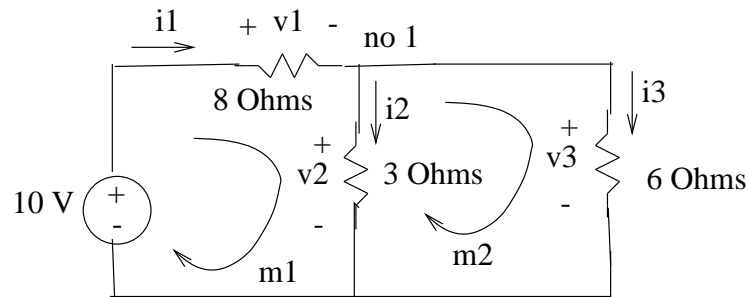


Figure 20: Exemplo

$$\text{Nó 1: } -i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$\text{m1: } v_1 + v_2 = 10$$

$$\text{m2: } -v_2 + v_3 = 0$$

$$v_1 = 8i_1, v_2 = 3i_2, v_3 = 6i_3$$

Logo, 6 equações a 6 incógnitas, que podem ser simplificados para 3 equações a 3 incógnitas:

$$\begin{cases} i_1 & = i_2 + i_3 \\ 8i_1 + 3i_2 & = 10 \\ 3i_2 & = 6i_3 \end{cases}$$

Resolvendo:

$$i_1 = 1 \text{ A}, i_2 = \frac{2}{3} \text{ A}, i_3 = \frac{1}{3} \text{ A}$$



$$v_1 = 8 \text{ V}, v_2 = 2 \text{ V}, v_3 = 2 \text{ V}$$

O circuito original pode ser representado como:

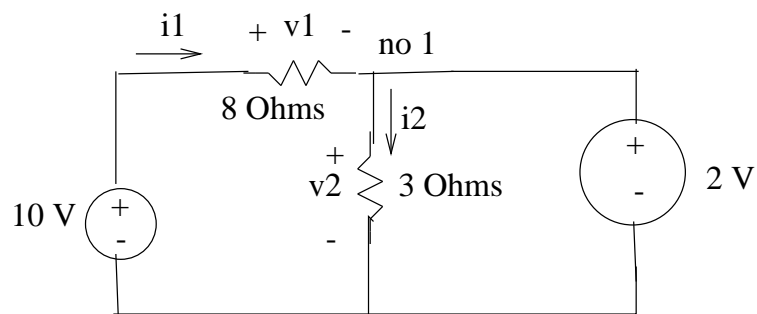


Figure 21: Exemplo

OU

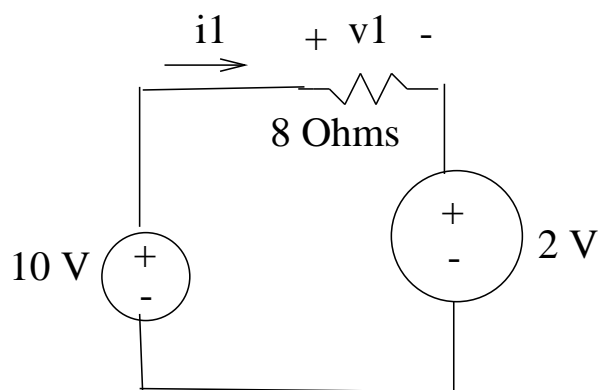


Figure 22: Exemplo

---

A. Y.  
DSE-FEEC-UNICAMP  
1s/2020