Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DT-FEEC-UNICAMP

Decomposição Dantzig-Wolfe

1 Introdução

Métodos de decomposição são utilizados para abordar problemas de grande porte com estruturas particulares ou de natureza complexa. Existem na literatura, vários métodos de decomposição propostos para serem aplicados em problemas lineares. Vamos estudar nesta seção, particularmente o método de decomposição chamado de Dantzig-Wolfe. São técnicas voltadas para abordar problemas com estruturas bloco-angulares do tipo:

$$(P)\left\{\begin{array}{ll} max & f = \left[\begin{array}{cccc} c_1^t & c_2^t & ... & c_p^t \end{array}\right] x \\ sa & \left[\begin{array}{cccc} A_o^1 & A_o^2 & ... & A_o^p \\ B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & ... & \\ & & & B_p \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \\ \\ x \\ \\ \\ \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_p \end{array}\right] \\ & x \geq 0 \end{array}\right.$$

Neste método, o problema original (P) é decomposto em um problema **mestre** e tantos **sub-problemas** quantos forem os blocos B_k. O problema mestre e os sub-problemas são resolvidos separadamente e iterativamente, utilizando simplex revisado. A figura 1 sintetiza a metodologia.

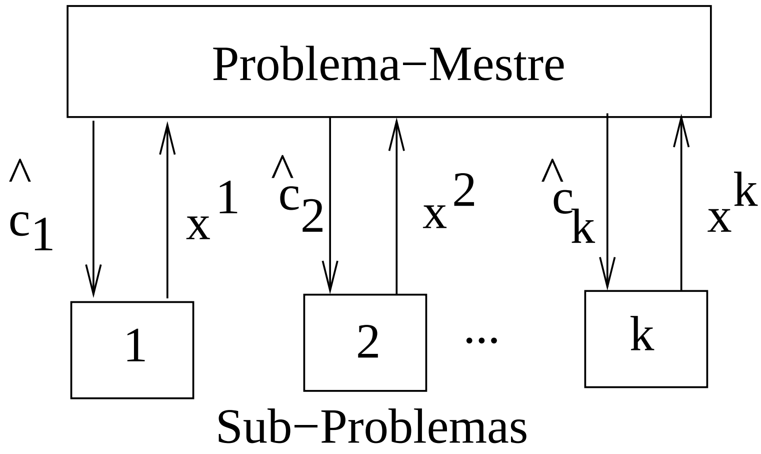

Figure 1: Interação mestre-subproblema.

O método é baseado nos teoremas de combinação convexa que seguem.

Teorema 1: Seja X um conjunto convexo compacto em R^n, $E(X)$ o conjunto de seus pontos extremos e $C\{E(X)\}$ o menor conjunto convexo contendo $E(X)$. Então $C\{E(X)\} = X$.

Teorema 2: Seja $X = \{x \ | \ Ax = b, x \geq 0\}$ um conjunto não vazio e sejam $x^i, i = 1, 2, ..., r$ seus pontos extremos e raios extremos. Então todo $x \in X$ pode ser escrito como:

$$\begin{cases} x = \Sigma_{i=1}^{r} \lambda_i x^i, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, ..., r \\ \Sigma_{i=1}^{r} \lambda_i \delta_i = 1 \end{cases}$$

onde:

$$\delta_i = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\} \quad se \quad x^i \quad \left\{ \begin{array}{c} ponto \ \ extremo \\ raio \ \ extremo \end{array} \right\} \quad de \quad X$$

Teorema 3: Seja $X = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ um conjunto não vazio. Então $x \in X$ se e sòmente se pode ser escrito como combinação convexa dos pontos extremos de X mais combinação linear não negativa dos raios extremos de X:

$$\begin{cases} x = \Sigma_{i=1}^{r} \lambda_i x^i, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, ..., r \\ \Sigma_{i=1}^{r} \lambda_i \delta_i = 1 \end{cases}$$

2 Princípio da Decomposição

Seja inicialmente o problema:

$$(P) \begin{cases} max & f = c^t x \\ sa & A_1 x = b_1 \\ & A_2 x = b_2 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

com $A_1 \epsilon R^{m1.n}$ e $A_2 \epsilon R^{m2.n}$ e seja o poliedro convexo: $S_2 = \{x \mid A_2 x = b_2, \ \ x \geq 0\}$ limitado. Dos teoremas 2 e 3, podemos escrever:

$$\begin{cases} x = \Sigma_{j=1}^{r} \lambda_j x^j, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, ..., r \\ \Sigma_{j=1}^{r} \lambda_j \delta_j = 1 \end{cases}$$

onde x^j são os pontos ou raios extremos do poliedro S_2. Temos portanto:

$$\begin{cases} max & z = c^t \sum_j \lambda_j x^j \\ sa & A_1 \sum_j \lambda_j x^j = b_1 \\ & \sum_j \lambda_j \delta_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0 \end{cases}$$

Chamando $A_1 x^j = p_j$ e $c^t x^j = f_j$, obtemos:

$$(PM) \begin{cases} max & z = \sum_j f_j \lambda_j \\ sa & \sum_j p_j \lambda_j = b_1 \\ & \sum_j \lambda_j \delta_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0 \end{cases}$$

que tem $(m1 + 1)$ restrições, quando o problema original tinha $(m1 + m2)$.

Para escolher a coluna a entrar na base, é preciso achar:

$$\hat{f}_j = f_j - \pi \begin{bmatrix} p_j \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde $\pi = [\pi_1 \quad \pi_o]$, sendo π_1 referente às restrições $\sum_j p_j \lambda_j = b_1$ e π_o a $\sum_j \lambda_j \delta_j = 1$. Portanto:

$$\hat{f}_j = f_j - [\pi_1 \quad \pi_o] \begin{bmatrix} A_1 x^j \\ 1 \end{bmatrix} = (c^t - \pi_1 A_1) x^j - \pi_o$$

considerando que $f_j = c^t x^j$. A coluna a entrar na base pode ser escolhida fazendo:

$$(P1) \;\; \hat{f}_s = \;\; max_j \;\; \hat{f}_j = \hat{f}_s = (c^t - \pi_1 A_1)x^j - \pi_o$$

Como x^j são pontos ou raios extremos de S_2 e x^s é um deles (ótimo de S_2):

$$(SP)\begin{cases} max & (c^t - \pi_1 A_1)x \\ sa & A_2 x = b_2 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

que é um problema equivalente a (P_1). Assim, a coluna a entrar na base é:

$$p_s = \begin{bmatrix} A_1 x^s \\ 1 \end{bmatrix}$$

com $f_s = c^t x^s$.

3 Algoritmo

De uma maneira geral, seja o problema da forma:

$$(P)\begin{cases} max & f = \begin{bmatrix} c_1^t & c_2^t & ... & c_p^t \end{bmatrix} x \\ sa & \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & ... & A_p \\ B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & ... & \\ & & & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ x \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_p \end{bmatrix} \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

com $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_p \end{bmatrix}$.

Cada sub-problema (SP_i) é da forma (aditivamente separáveis):

$$(SP_i)\begin{cases} max & (c_i^t - \pi_1 A_i)x_i \\ sa & B_i x_i = b_i \\ & x_i \geq 0 \end{cases}$$

e o problema mestre é da forma:

$$(PM)\begin{cases} max & z = \Sigma_k \Sigma_j f_j^k \lambda_j^k \\ sa & \Sigma_k \Sigma_j p_j^k \lambda_j^k = b_o \\ & \Sigma_j \lambda_j^k \delta_j^k = 1, \quad k = 1, 2, ..., p \\ & \lambda_j^k \geq 0 \end{cases}$$

onde $p_j^k = A_k x_k^j$ e $f_j^k = c_k^t x_k^j$.

Simplificadamente o algoritmo pode ser colocado como segue, supondo solução básica inicial de (PM) conhecida, com base A^I e multiplicador $[\pi_1 \quad \pi_o]$.

Passo 1: Utilizando π_1 resolver os sub-problemas (SP_i), obtendo:
$x^t = [x_1^t \;\; x_2^t \;\; ... \;\; x_p^t]$ e z_i^o para cada (SP_i).

Passo 2: Calcular $\hat{f}_j = max_i(z_i^o - \pi_o)$ e fazer teste de otimalidade:

- Se $\hat{f}_j \leq 0$, a solução é ótima, $x^* = \Sigma_k \, \Sigma_{i \in I} \, \lambda_i^k x_k^i$
- Caso contrário, ir para Passo 3

Passo 3: Formar a coluna:

$$p = \begin{bmatrix} A_k x_k^j \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplicar simplex revisado, obter novo $(A^I)^{-1}$, π e voltar ao Passo 1. A seguir, vamos apresentar um exemplo.

4 Exemplo

Seja o problema:

$$(P)\begin{cases} min \quad f = & x_1 - x_2 - 2x_3 & \\ sa & x_1 + x_2 + x_3 & = 3 \\ & 0 \leq x_1 \leq 2 & \\ & 0 \leq x_2 & \\ & 0 \leq x_3 \leq 2 & \end{cases}$$

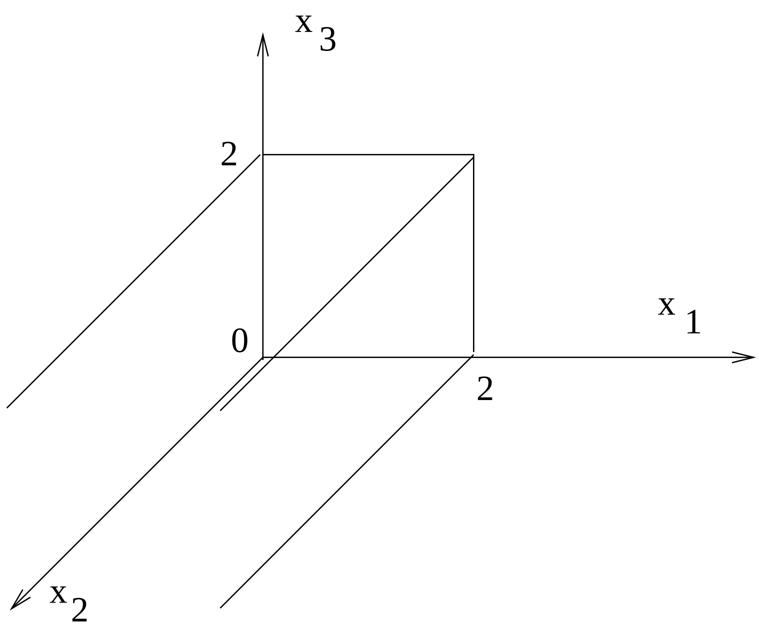

Figure 2: Interpretação gráfica do problema.

Assim: $c^t = [1 \quad -1 \quad -2]$, $A = [1 \;\; 1 \;\; 1]$ e $b = 3$. Inicializando com os pontos extremos $x^1 = [2 \;\; 0 \;\; 0]^t$, $x^2 = [2 \;\; 0 \;\; 2]^t$, o problema mestre fica:

$$(PM)\begin{cases} min \quad z = & 2\lambda_1 - 2\lambda_2 & \\ sa & 2\lambda_1 + 4\lambda_2 & = 3 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 & = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 & \end{cases}$$

Primeira iteração:

Base inicial:

$$A^I = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

cuja inversa é:

$$(A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 2 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix}$$

Logo, a solução inicial é:

$$\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \bar{\lambda}_2 \end{bmatrix} = (A^I)^{-1} b = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

que corresponde à solução dual:

$$[\pi \quad \pi_o] = (\hat{c}^I)^t (A^I)^{-1} = [-2 \quad 6]$$

A solução inicial fica: $\bar{x} = \bar{\lambda}_1 x^1 + \bar{\lambda}_2 x^2 = [2 \quad 0 \quad 1]^t$

e o sub-problema fica:

$$(SP)\begin{cases} min \quad z = & [c^t - \pi A]x = \; 3x_1 + x_2 \\ sa & x \in X \end{cases}$$

onde:

$$X = \begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 2 \\ 0 \leq x_2 \\ 0 \leq x_3 \leq 2 \end{cases}$$

e $c^t = [1 \quad -1 \quad -2]$, $\pi = -2$ e $A = [1 \;\; 1 \;\; 1]$.

Da figura 2, podemos ver que a solução ótima de (SP) é $x^3 = [0 \;\; 0 \;\; 0]^t$ que fornece $z^* = 0 < \pi_o = 6$. Portanto, não está no ótimo.

Segunda iteração:

Note que x^3 é um ponto extremo do problema (vide figura 1). Gerando a coluna para x^3:

$$A^3 = \begin{bmatrix} Ax^3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$(\hat{A}^3) = (A^I)^{-1}A^3 = \begin{bmatrix} -0.5 & 2 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Lembrando que:

$$\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \bar{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

sai λ_1, entra λ_3 e obtemos:

$$A^I = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

cuja inversa é:

$$(A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} -0.25 & 1 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

o que fornece:

$$\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_3 \\ \bar{\lambda}_2 \end{bmatrix} = (A^I)^{-1} b = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

e

$$[\pi \quad \pi_o] = (\hat{c}^I)^t (A^I)^{-1} = [0 \quad -2] \begin{bmatrix} -0.25 & 1 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix} = [-0.5 \quad 0]$$

A solução fica: $\bar{x} = \bar{\lambda}_3 x^3 + \bar{\lambda}_2 x^2 = [1.5 \quad 0 \quad 1.5]^t$

e o sub-problema fica:

$$(SP)\begin{cases} min \quad z = & [c^t - \pi A]x = \; 1.5x_1 - 0.5x_2 - 1.5x_3 \\ sa & x \in X \end{cases}$$

Este sub-problema tem solução ilimitada devido x_2, o que implica $-\infty = z < \pi_o = 0$, ou seja, não está no ótimo.

Terceira iteração:

Introduzindo um raio extremo para x_2:

$$d^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

temos:

$$A^4 = \begin{bmatrix} Ad^1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\hat{A}^4) = (A^I)^{-1}A^4 = \begin{bmatrix} -0.25 & 1 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

Como

$$\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_3 \\ \bar{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

$r = 2$, ou seja, segunda linha sai, entrando λ_4 no lugar.

Como agora:

$$A^I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

que fornece:

$$\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_3 \\ \bar{\lambda}_4 \end{bmatrix} = (A^I)^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

e

$$[\pi \quad \pi_o] = (\hat{c}^I)^t (A^I)^{-1} = [0 \quad -1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [-1 \quad 0]$$

A solução fica: $\bar{x} = \bar{\lambda}_3 x^3 + \bar{\lambda}_4 x^4 = [0 \;\; 3 \;\; 0]^t$

Sub-problema fica:

$$(SP) \begin{cases} min \quad z = & [c^t - \pi A]x = \; 2x_1 - x_3 \\ sa & x \in X \end{cases}$$

cuja solução ótima é $x^5 = [0 \;\; 0 \;\; 2]^t$ que fornece $z = -2 < \pi_o = 0$. Portanto, não está no ótimo.

Quarta iteração:

Vamos gerar a coluna para λ_5.

$$A^5 = \begin{bmatrix} Ax^5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\hat{A}^5) = (A^I)^{-1}A^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Como:

$$\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_3 \\ \bar{\lambda}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$r = 1$ e λ_5 entra no lugar de λ_3.

$$A^I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_5 \\ \bar{\lambda}_4 \end{bmatrix} = (A^I)^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$[\pi \;\; \pi_o] = (\hat{c}^I)^t (A^I)^{-1} = [-4 \quad -1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = [-1 \quad -2]$$

A solução fica: $\bar{x} = \bar{\lambda}_4 x^4 + \bar{\lambda}_5 x_5 = [0 \;\; 1 \;\; 2]^t$

Sub-problema fica:

$$(SP) \begin{cases} min \;\; z = & [c^t - \pi A]x = \; 2x_1 - x_3 \\ sa & x \in X \end{cases}$$

cuja solução ótima é $x^6 = [0 \;\; 0 \;\; 2]^t$ que fornece $z = -2 = \pi_o = -2$. Portanto, está no ótimo. Assim, a solução do problema (P) é dada por:

$$\bar{x} = \bar{\lambda}_4 x^4 + \bar{\lambda}_5 x^5 = [0 \;\; 1 \;\; 2]^t$$

Akebo Yamakami
DT-FEEC-UNICAMP
1s/2011