# Capítulo XII

# O MÉTODO DUAL SIMPLEX

**1. QUANDO APLICAR**

**2. SOLUÇÃO OTIMISTA**

**3. PARALELO COM O PRIMAL SIMPLEX**

**4. COMO APLICAR**

**5 COMENTÁRIOS**

**6. EXEMPLO**

**7.DIAGRAMA DE BLOCOS**

# 1. Quando Aplicar

**Em algumas situações nos deparamos com problemas de PL:**

$$(P)\quad \begin{cases} \text{MAX} \quad f = \underline{c}\ \underline{x} \\ \text{s.a} \quad A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geq \underline{0} \end{cases}$$

**para os quais dispomos de uma solução básica <u>DUAL-FACTÍVEL</u>. Aí, então, se aplica o <u>MÉTODO DUAL SIMPLEX</u>**

# 2. Caracterização de Solução Otimista

$$\begin{array}{cc|c} \underline{c}^I & \underline{c}^j & \\ \hline A^I & A^J & \underline{c} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc|c} \underline{0} & \underline{\hat{c}}^J \underline{<} \underline{0} & \\ \hline 1 & \hat{A}^J & \underline{\hat{b}} \end{array}$$

**Quadro do Prob.Original** | **Forma Preparada**

$$\underline{x}_J = \underline{0} \quad \text{e} \quad \underline{x}_I = \hat{b} \quad \text{com} \begin{cases} \underline{\hat{c}}^J \underline{\leq} \underline{0} \\ \underline{\hat{b}} \ \text{ não necessáriamente} \ \underline{\geq} \ \underline{0} \end{cases}$$

**é uma <u>SOLUÇÃO BÁSICA OTIMISTA</u> ( $\underline{x}^+$)**

A ela <u>corresponde</u> uma solução (básica) factível do problema dual (D):

$$(D)\quad \begin{cases} \text{MIN } \varnothing = \underline{w}\ \underline{b} \\ \text{s.a}\quad \underline{w}A \geq \underline{c} \\ \qquad \underline{w} \text{ irrestrito} \end{cases}$$

Dado por $\boxed{\underline{w}_x = \underline{c}^I (A^I)^{-1}}$

É claro que

$$f(\underline{x}^+)\ \underline{c}\ \underline{x}^+ = \underline{c}^I\ \underline{x}^+_I = \underline{c}^I (A^I)^{-1}\ \underline{b} = \varnothing(\underline{w}_*)$$

$$\boxed{f(\underline{x}^+) = \varnothing(\underline{w}_*)}$$

O que justifica o nome OTIMISTA: para qualquer x* factível de (P):

$$f(\underline{x}^+) = \varnothing(\underline{w}_*) \geq F(\underline{x}^*)$$

## 3. PARALELO COM O MÉTODO PRIMAL SIMPLEX

**No método Primal Simplex (clássico):**

**Solução Básica Factível** $\longrightarrow$ **Outra Solução Básica Factível**

**<u>melhorando</u> a função objetivo (busca da otimalidade)**

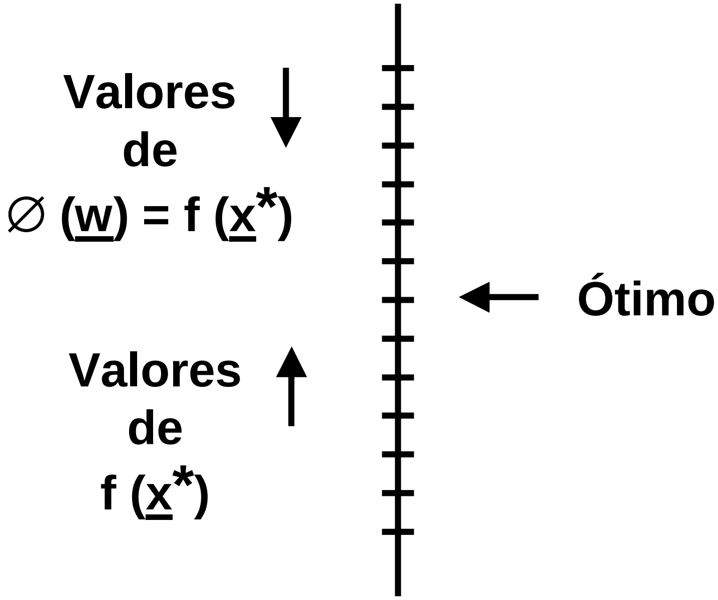
### NO MÉTODO DUAL SIMPLEX

**Solução Básica Otimista** $\longrightarrow$ **Outra Solução Básica Otimista**

**<u>piorando</u> a função objetivo (busca da factibilidade)**

**Primal Simplex**
- garantia da factibilidade: $\underline{\hat{b}} \geq \underline{0}$
- garantia da otimalidade: $\underline{\hat{c}}^J \leq \underline{0}$ ?

**Dual Simplex**
- garantia da otimalidade: $\underline{\hat{c}}^J \leq \underline{0}$
- busca da factibilidade : $\underline{\hat{b}} \geq \underline{0}$ ?




$\boxed{\varnothing(\underline{w}) = f(\underline{x}^*)}$ MÉTODO DUAL SIMPLEX

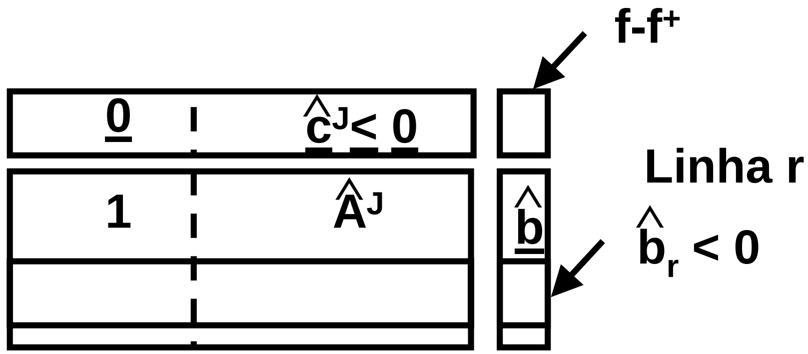
$\geq$

$\boxed{f(\underline{x}^*)}$ MÉTODO PRIMAL SIMPLEX

## <u>MÉTODO DUAL SIMPLEX</u>

- ☞ **trabalha com o quadro do problema primal.**
- ☞ **corresponde a aplicar o método simplex clássico ao problema dual.**

## 4. COMO APLICAR




**Multiplica linha r por p > 0 e subtrai da linha da função objetivo:**

$$f = (f+ + p\,\hat{b}_r) - p\,x_r + (\hat{\underline{c}}^J - p\,\hat{A}_r^J)\,\underline{x}_J$$

**QUAL DEVE SER O VALOR DE p?**

**O maior possível, proporcionando piorar a função objetivo (solução menos otimista).**

**O QUE BLOQUEIA SEU CRESCIMENTO?**

**A garantia da otimalidade:**

$$\hat{\underline{c}}^J - p\,\hat{A}_r^J \quad \text{deve continuar} \leq 0$$

$$\frac{\hat{c}^S}{\hat{A}_r^S} = \min_{\hat{A}_r^J \leq 0} \left\{ \frac{\hat{c}^J}{\hat{A}_r^J} \right\}$$

A variável $x_r$ sai da base e $x_s$ entra:

PIVOT: $\hat{A}_r^S < 0$

A atualização da base requer uma operação de PIVOTEAMENTO.

## 5. COMENTÁRIOS

- Se não houver bloqueio para p?
- (p) ilimitado: é possível?

  Não conhecemos uma solução otimista que é "melhor que a ótima"!!
- Variáveis entrando e saindo da base.

  Métodos primal e dual: inversão de ordem
- Fase I para o método DUAL SIMPLEX?

## 6. EXEMPLO : Dual Simplex

MINIMIZAR $3x_1 + 4x_2 + 5x_3$

s.a

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 | 0 | 0 | f |
| 1 | 2 | 3 | -1 | 0 | 5 |
| 2 | 2 | 1 | 0 | -1 | 6 |

I= {4, 5 }

FORMA PREPARADA

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 | 0 | 0 | f |
| -1 | -2 | -3 | 1 | 0 | -5 |
| -2 | -2 | -1 | 0 | 1 | -6 ← $A_r = A_2$ |

## Escollha da coluna bloqueio -s :

$$p = - \frac{\hat{c}^s}{\hat{A}_r^s} = \text{MIN} \{ -3/-2; -4/-2; -5/-1\} = 3/2 \Rightarrow s=1$$

S = 2

| $X_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 7/2 | 0 | 3/2 | f-9 |
| 0 | -1 | -5/2 | 1 | -1/2 | -2 |
| 1 | 1 | 1/2 | 0 | -1/2 | 3 |

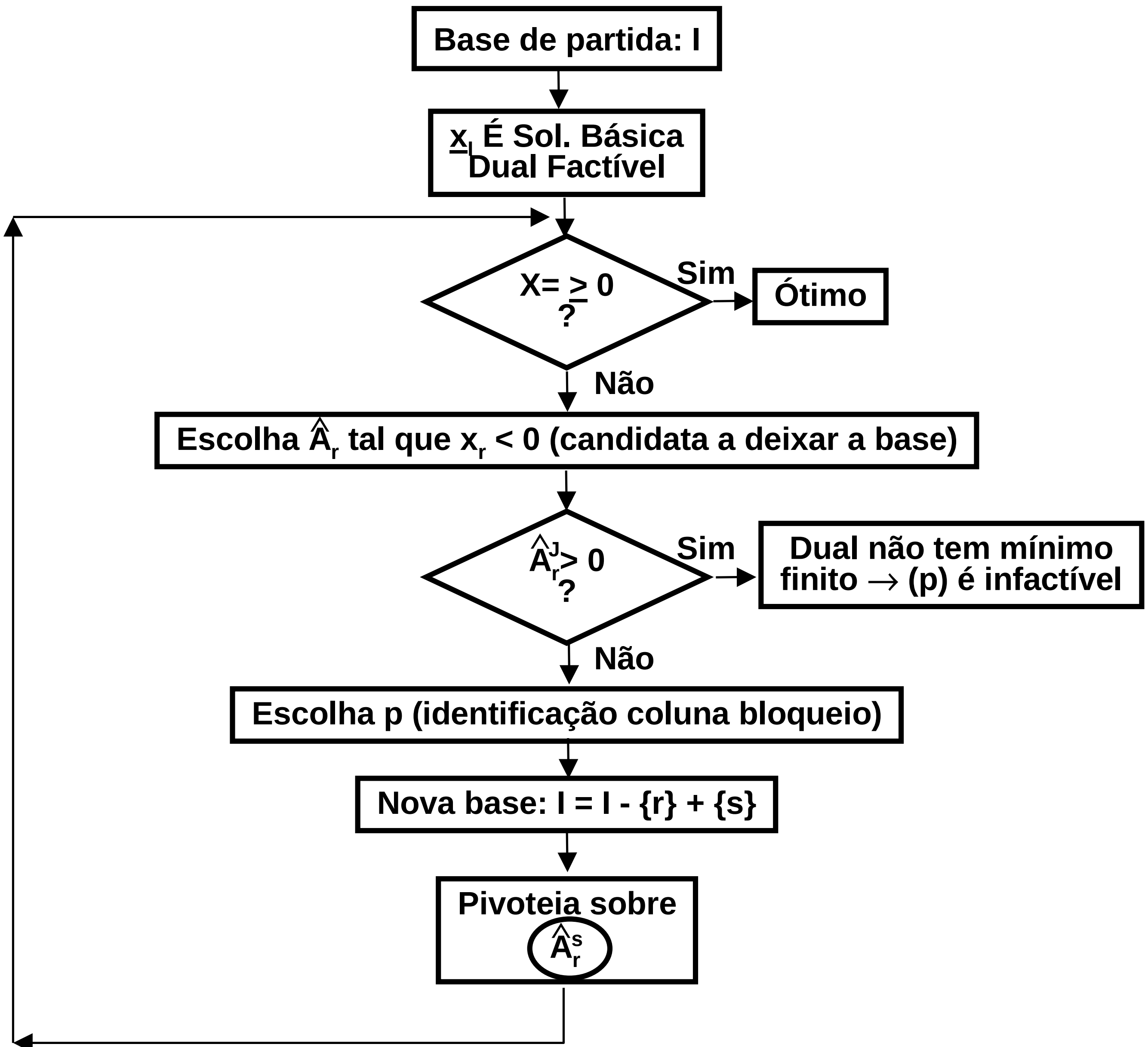
$A_r = \hat{A}_1$ (r=1)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | f-11 |
| 0 | 1 | 5/2 | -1 | 1/2 | 2 |
| 1 | 0 | -4/2 | 1 | -1 | 1 |

**Solução Ótima:**

x*= [1 2 0 0 0]
f* = 11

# 7. DIAGRAMA DE BLOCOS



## ED.6

### Resolver pelo método Dual - Simplex

$$\text{MIN} \quad f = x_1 + x_2$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 8 \\ 3x_1 + 7x_2 &\geq 21 \\ \underline{x} &\geq \underline{0} \end{aligned}$$

### Reescrevendo

$$\text{MIN} \quad f = x_1 + x_2$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} -2x_1 - x_2 + x_3 \quad &= -8 \\ -3x_1 - 7x_2 \quad + x_4 &= -21 \\ \underline{x} &\geq \underline{0} \end{aligned}$$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | f |
| -2 | -1 | 1 | 0 | - 8 |
| -3 | -7 | 0 | 1 | -21 |

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |
|---|---|---|---|---|
| 4/7 | 0 | 0 | 1/7 | f |
| -11/7 | 0 | 1 | -1/7 | - 5 |
| 3/7 | 1 | 0 | -1/7 | - 3 |

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 4/11 | 1/11 | f |
| 1 | 0 | 7/11 | 1/11 | 35/11 |
| 0 | 1 | 3/11 | -2/11 | 18/11 |

**SOLUÇÃO ÓTIMA:**

$f = 53/11$

$x_1 = 35/11$

$x_2 = 18/11$

$x_3 = x_4 = 0$