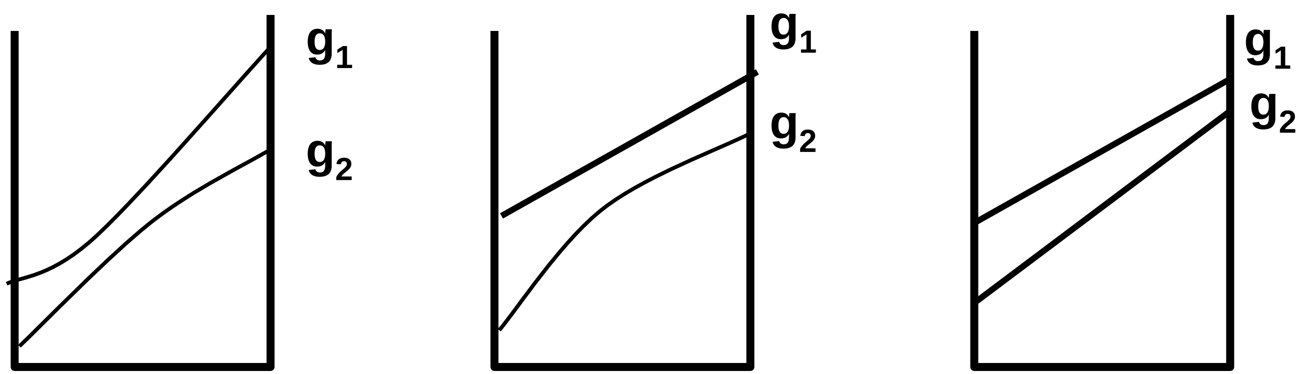
Capítulo VII

O MÉTODO SIMPLEX COM VARIÁVEIS CANALIZADAS

O problema canalizado da PL

IDÉIA INICIAL:

$$\text{Minimizar } g(x) = g_1(x) - g_2(x) \qquad x \in R^1$$



IDÉIA: deslocar uma curva (função contra a outra)

NO CASO DE DUAS RETAS: O mínimo ocorrerá num ponto extremo, a menos que as duas retas tenham a mesma inclinação.

PL CANALIZADO: especialização do método SIMPLEX

EXTENSÕES DE:
- **Solução básica**
- **degenerescência**

O PROBLEMA CANALIZADO DA PL

Num PL clássico:

$$\begin{cases} \text{Min. } z = \underline{c}\ \underline{x} \\ \text{s.a} \quad A\,\underline{x} = \underline{b} \\ \qquad \underline{x} \underline{\geq} \underline{0} \end{cases}$$

Uma Solução Básica é caracterizada com as variáveis não básicas assumindo o valor zero.

Num PL canalizado:

$$\begin{cases} \text{Min. } z = \underline{c}\ \underline{x} \\ \text{s.a} \quad A\,\underline{x} = \underline{b} \\ \qquad \underline{\alpha} \underline{\leq} \underline{x} \underline{\leq} \underline{\beta} \qquad \underline{\alpha}, \underline{\beta} \text{ qualquer} \end{cases}$$

a caracterização de Solução Básica não poderá ser a mesma do PL clássico.

⇨ **•Especialização do Simplex**
•Extensão do conceito de Solução Básica

⇨ **Variável não básica pode assumir um dos limites, α ou β (para cada variável xj)**

PL clássico:

$$
(P)\begin{cases} \text{Minimizar } f = c\,x \\ \text{s.a} \qquad A\,x = b \\ \qquad\quad x \geq 0 \end{cases}
$$

DEFINIMOS:

I - Conjunto de índices de variáveis básicas

J - Conjunto de índices de variáveis não básicas

$$I \oplus J = \{ 1, 2, 3, \ldots n\}$$

Podemos reescrever (P) como:

$$
\begin{cases} \text{Minimizar } f = c^I x_I + c^J x_J \\ \text{s.a} \qquad A^I x_I + A^J x_J = b \\ \qquad\quad x_I \geq 0 \quad x_J \geq 0 \end{cases}
$$

Sendo A^I inversível (forma uma base) podemos definir como solução Básica

$x_j = 0 \quad j \in J$

$x_I = (A^I)^{-1}[\, b - A^J x_J \,]$

Se, além disso $x_I \geq 0$ temos uma Solução Básica Factível.

Se $x_i = 0$ para algum $i \in I$, a Solução Básica será Degenerada.

CUJA FORMA PREPARADA É:

$$
\begin{cases}
\text{Min } f - \pi b = (c^I - \pi A^I)\, x_J + (c^J\ \pi A^J)\, x_J \\
x_I = \hat{b} - \hat{A}^J x_J \\
x \geq 0
\end{cases}
$$

que dá o seguinte critério de otimalidade

$\underline{c^I - \pi A^I = 0} \Rightarrow \pi = c^I (A^I)^{-1}$

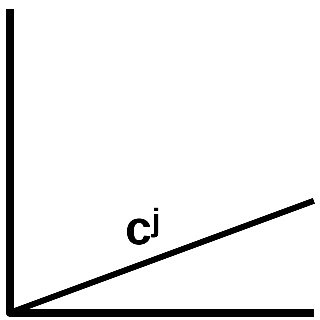
$\underline{c^J - \pi A^J > 0}$

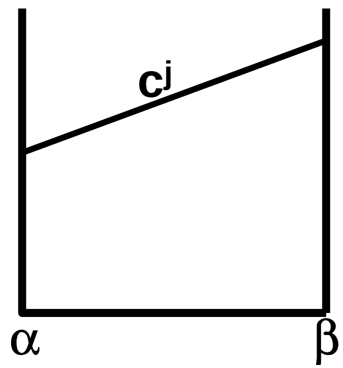
PL CANALIZADO

$$\begin{cases} \text{Min } f = c\,x \\ \text{s.a} \quad A\,x = b \\ \qquad \alpha \leq x \leq \beta \end{cases}$$

ALTERNATIVA: Especializar o método SIMPLEX para tratar as restrições de canalização

IDÉIA BÁSICA: Extensão do conceito de Solução Básica





Tomaremos, inicialmente, os mesmos conjuntos I e J utilizados no PL clássico. Entretanto, o conjunto J será dividido em dois outros da forma:

J_1: conjunto de índices das variáveis não básicas no limite inferior

$$J_1 = \{ j : x_j = \alpha_j, \; j \in J \}$$

J_2: conjunto de índices das variáveis não básicas no limite superior

$$J_2 = \{ j : x_j = \beta_j, \; j \in J \}$$

Propriedade: $I \oplus J_1 \oplus J_2 = \{ 1, 2, 3, ...n \}$

Podemos, então, reescrever (P) da forma:

$$\begin{cases} \text{Min} & f = c^I x_I + c^{J_1} x_{J_1} + c^{J_2} x_{J_2} \\ \text{s.a} & A^I x_I + A^{J_1} x_{J_1} + A^{J_2} x_{J_2} = b \\ & \alpha_I \leq x_I \leq \beta_i \\ & x_{J_1} = \alpha_{J_1} \qquad x_{J_2} = \beta_{J_2} \end{cases}$$

de uma forma mais geral teríamos:

$$\alpha_{J_1} \leq x_{J_1} \leq \beta_{J_1} \qquad \alpha_{J_2} \leq x_{J_2} \leq \beta_{J_2}$$

Com isso podemos definir:

Solução Básica:

$$\begin{cases} x_{J_1} = \alpha_{J_1} \\ x_{J_2} = \beta_{J_2} \\ x_I = (A^I)^{-1}[\, b - A^{J_1} \underset{\alpha_{J_1}}{x_{J_1}} - A^{J_2} \underset{\beta_{J_2}}{x_{J_2}}] \end{cases}$$

Se:

$\alpha_I \leq x_I \leq \beta_I$ **a solução Básica é FACTÍVEL**

$x_i = \alpha_i$ **ou** $x_i = \beta_i$ **para algum** $i \in I$**, a solução Básica é DEGENERADA.**

PORTANTO A FORMA PREPARADA FICA DA SEGUINTE FORMA:

$$\begin{cases} \text{Min} & f - \pi b = (c^I - \pi A^I)x_I + (c^{J_1} - \pi A^{J_1})x_{J_1} + (c^{J_2} - \pi A^{J_2})\, x_{J_2} \\ \text{s.a} & x_I = (A^I)^{-1}[\, b - A^{J_1} x_{J_1} - A^{J_2} x_{J_2}] \\ & \alpha_I \leq x_I \leq \beta_I \qquad c^I - \pi A^I = 0 \\ & x_{J_1} = \alpha_{J_1} \qquad x_{J_2} = \beta_{J_2} \end{cases}$$

Definindo:

$$z^j = \pi A^j \quad \text{(Inclinação de Referência)}$$

temos:

$$f - \pi b = (c^{J_1} - z^{J_1})\, x_{J_1} + (c^{J_2} - z^{J_2})\, X_{J_2}$$

 # VARIÁVEL CANDIDATA A ENTRAR NA BASE

Numa dada solução básica factível, tem-se:

- **Variáveis não básicas no limite inferior:**

$$x_j = \alpha_j \qquad j \in J_1$$

- **Variáveis não básicas no limite superior:**

$$x_j = \beta_j \qquad j \in J_2$$

- **Variáveis básicas:**

$$\alpha_i < x_i < \beta_i \quad \text{[hipótese de não degenerescência]}$$

Definindo:

$$\hat{c}^{j_1} = c^{J_1} - z^{J_1}$$

$$\hat{c}^{j_2} = c^{J_2} - z^{J_2}$$

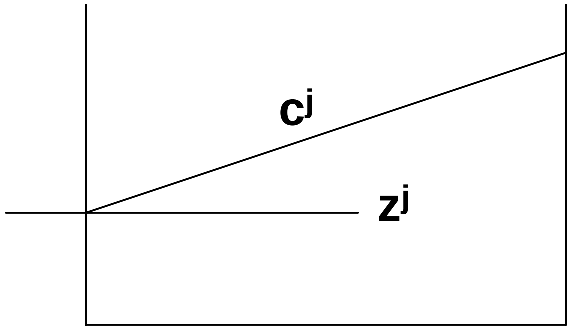
Para saber quais as variáveis não básicas que melhoram a função objetivo (caso entrem na base) devemos ter:

- $\hat{c}^j < 0$ **para** $j \in J_1$

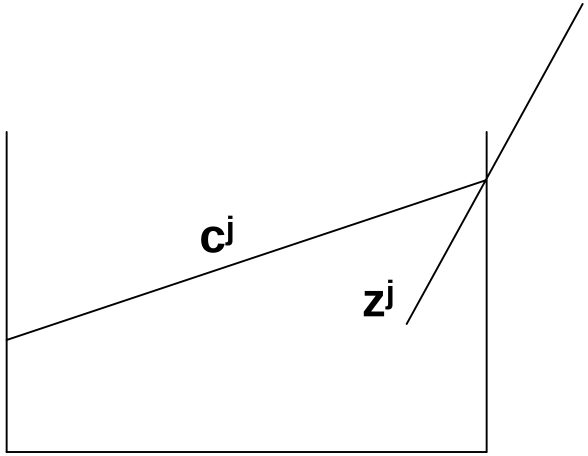
$\Rightarrow c^j - z^j < 0 \Rightarrow c^j < z^j$

- $\hat{c}^j > 0$ **para** $j \in J_2$

$\Rightarrow c^j - z^j > 0 \Rightarrow c^j > z^j$



α_j **Fig.1** β_j



α_j **Fig. 2** β_j

 # IDENTIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO ÓTIMA

- $c^j > z^j \quad j \in J_1 \Rightarrow \hat{c}^j > 0 \quad j \in J_1$ **(FIG.1)**

- $c^j < z^j \quad j \in J_2 \Rightarrow \hat{c}^j < 0 \quad j \in J_2$ **(FIG.2)**

DETERMINAÇÃO DA VARIÁVEL A SAIR DA BASE

Quando uma variável j não básica "entra"na base (aumento de x_j , $j \in J_1$ ou diminuição de x_j , $j \in J_2$), 3 casos podem ocorrer:

- **uma variável básica atinge seu limite inferior**

$$x_i = \alpha_i \qquad i \in I \rightarrow x_i \text{ “sai” da base}$$

- **uma variável básica atinge seu limite superior**

$$x_i = \beta_i \qquad i \in I \rightarrow x_i \text{ “sai” da base}$$

- **a variável <u>não-básica</u> chega ao seu outro limite**

$$\left.\begin{array}{ll} x_j = \beta_j & j \in J_1 \\ x_j = \alpha_i & j \in J_2 \end{array}\right\} \text{Não entra na base}$$

$$x_i^+ = \hat{b} - \hat{A}^J x_i^+$$

$$x_i^+ \longrightarrow \text{Solução presente}$$

ESTUDO DA LINHA BLOQUEIO: ε MÍNIMO

I- $\boxed{x_j = x_j^+ + \varepsilon_j}$ $\quad j \in J$

$$x_I = \hat{b} - \hat{A}^J (x_J^+ + \varepsilon_J)$$

$$x_I = \underbrace{\hat{b} - \hat{A}^J x_J^+}_{x_I^+} - \hat{A}^J \varepsilon_J$$

II- $\boxed{x_I = x_I^+ - \hat{A}^J \varepsilon_J}$ $\quad i \in I \qquad x_i = x_i^+ - \hat{A}_i^j \varepsilon_j$

Seja: $\varepsilon_j > 0$. Assim, considerando $\oplus$ **em (I):**

- **Se $\hat{A}_i^j > 0 \rightarrow x_i$ tende para α_i**
- **Se $\hat{A}_i^j < 0 \Rightarrow x_i$ tende para β_i**

I_1

PL - CANALIZADO

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	1	3	-2	10	f
1	0	1	-1	2	5
0	1	2	2	1	9

$\underline{x} \geq \underline{0}$
$x_1 \leq 7$
$x_2 \leq 10$
$x_3 \leq 1$
$x_4 \leq 5$
$x_5 \leq 3$

0	0	-1	-2	5	f-19
$\boxed{1}$	0	1	-1	2	5
0	$\boxed{1}$	2	2	1	9
		−	−	−	

$\therefore$ $\boxed{s=4}$

Estudo da Linha Bloqueio: $\varepsilon > 0$ **pois** $x_s = \alpha_s$
Pertubação das variáveis:

NB: $x_4 = x_4^+ + \varepsilon$ **sendo** $x_4^+ = 0 \Rightarrow \varepsilon = 5$

B: $x_I = x_I^+ - \hat{A}^4 \varepsilon = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \varepsilon$ $\therefore$ **fica:**

$7 = 5 + \varepsilon \rightarrow \varepsilon = 2 \Rightarrow$ **ELEITO**
$0 = 9 - 2\varepsilon \rightarrow \varepsilon = 4.5$
$\therefore$ $\overline{\underline{s = 4 \text{ e } r = 1}}$

I_2

$I_1 = \{ 1, 2 \} \rightarrow I_2 = \{ 4, 2 \}$

$x = x+ = \{ 7 \ 5 \ 0 \ 2 \ 0 \}$

$f = ?$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$\boxed{-2}$	0	-3	0	1	f-29
-1	$\boxed{0}$	-1	1	-2	-5
2	1	4	0	5	19
+		$\ominus$		–	

$\therefore$ $\boxed{s=3}$

Bloqueio: $\varepsilon > 0$ **pois** $x_s = \alpha_s$

Pertubação:

NB: $x_3 = x_3^+ + \varepsilon \rightarrow 1 = 0 + \varepsilon \rightarrow \overline{\underline{\varepsilon = 1}}$

B: $x_I = x_I - \hat{A}^3 \varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \varepsilon \quad \begin{matrix} \rightarrow \varepsilon = 3 \\ \rightarrow \varepsilon = 1{,}25 \end{matrix}$

$\therefore$ **não definimos elemento PIVÔ pois a variável NB permaneceu NB!**

I_3

$I_3 = \{ 4, 2 \}$

$X = x^+ = \{ 7\ 1\ 1\ 3\ 0 \}$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-2	0	-3	0	1	f-29
-1	0	-1	$\boxed{1}$	-2	-5
2	$\boxed{1}$	4	0	5	19
+		+		-	$\Rightarrow$ ÓTIMO

$$f^* - 29 = -2X_1 - 3X_3 + X_5$$
$$= -14 - 3 + 0$$
$$f^* = 12$$