Capítulo VI:

DUALIDADE

DUALIDADE

A cada problema (primal) corresponde um outro (dual) formando o par de problemas duais:

$$\left\{\begin{array}{c}\textbf{Problema}\\ \textbf{primal}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\textbf{Problema}\\ \textbf{dual}\end{array}\right\}$$

Considere um problema de produção cujas matérias primas são couro e pano

Primal: Problema de produção

Dual: Problema do açambarcador

DUALIDADE

O açambarcador propõe comprar a matéria prima de fábrica, interrompendo sua produção:

φ **A unidade de couro valerá** $w^1 \geq 0$
A unidade de pano valerá $w^2 \geq 0$

κ **Os valores de compra** w^1 **e** w^2 **serão fixados arbitrariamente pelo açambarcador. Entretanto eles deverão assegurar uma "vantagem" para o dono da fábrica.**

PROBLEMA DA PRODUÇÃO (PRIMAL)

$$\text{Maximizar } f(x) = (25\ 35\ 50\ 33\ 36)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

s.a

$$\begin{bmatrix} \bullet & 4 & 5 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \leq \begin{bmatrix} 42 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$x_i \geq 0$$

x_i = quantidade de produto i fabricada

i = 1 sapatos
i = 2 botinas
i = 3 carteiras
i = 4 chapéus
i = 5 malas

'VANTAGEM"

$3\,w^1 + 2\,w^2 \geq 25$	sapatos
$4\,w^1 + 3\,w^2 \geq 35$	botinas
$5\,w^1 + 4\,w^2 \geq 50$	carteiras
$3\,w^1 + 3\,w^2 \geq 33$	chapéus
$6\,w^1 + 3\,w^2 \geq 36$	malas

- **O desembolso do açambarcador será:**

$$\varnothing = 42\, w^1 + 24\, w^2$$

Ele poderá minimizá-lo manipulando os valores unitários das matérias primas : w^1 e w^2

DEVE-SE VENDER A FÁBRICA?

PROBLEMA DO AÇAMBARCADOR (DUAL)

Minimizar $\varnothing(w) = (w^1 \;\; w^2) \begin{pmatrix} 42 \\ 24 \end{pmatrix}$

s.a

$$(w^1 \;\; w^2) \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \geq (25 \quad 35 \quad 50 \quad 33 \quad 36)$$

$$w_i \geq 0$$

EM FORMA MATRICIAL

MAX $f(\underline{x}) = \underline{c}\,\underline{x}$	**MIN** $\varnothing(\underline{w}) = \underline{w}\,\underline{b}$
s.a $A\,\underline{x} \leq \underline{b}$	**s.a** $\underline{w}A \geq \underline{c}$
$\underline{x} \geq \underline{0}$	$\underline{w} \geq \underline{0}$

OBSERVAÇÕES

❶ **Os vetores b e c mudam de posição.**

❷ **No problema Primal (PP):**

*** maximiza-se a receita da fábrica, satisfazendo condições de escassez de matéria prima.**

*** as variáveis são quantidades produzidas.**

❸ **No problema Dual (PD):**

*** minimiza-se o desembolso do açambarcador, garantindo que a compra da matéria prima é vantajosa sobre a fabricação de qualquer produto.**

*** as variáveis são os preços unitários de venda dos recursos (matérias primas).**

❹ **Há correspondência, uma a uma, entre**

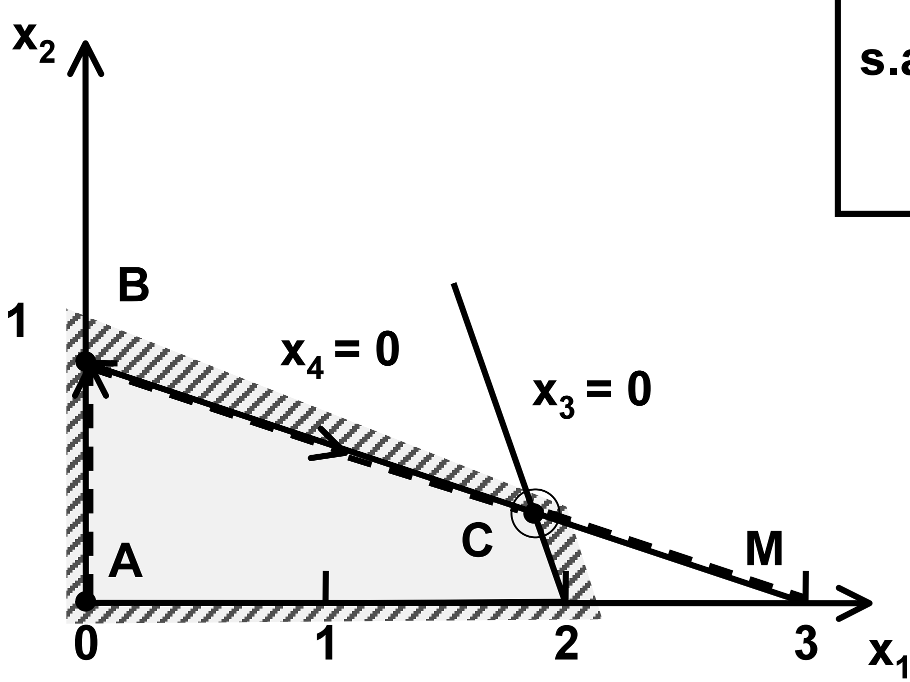
VARIÁVEL DO PRIMAL	⟷	**RESTRIÇÃO DO DUAL**	**PRODUTOS**
RESTRIÇÃO DO PRIMAL	⟷	**VARIÁVEL DO DUAL**	**MATÉRIA PRIMA**

Ou seja: PRODUTO $\begin{cases} \text{É uma variável do PRIMAL} \\ \text{fornece uma restrição no DUAL} \end{cases}$

MATÉRIA PRIMA → vice-versa

Departamento de Engenharia de Sistemas - (DENSIS) FEEC/UNICAMP

EXEMPLO



$$
\begin{array}{llrcl}
\text{MAX} & f = 16\,x_1 + 18\,x_2 & & & \\
\text{s.a} & & 2\,x_1 + \quad x_2 & \leq & 4 \\
 & & x_1 + 3\,x_2 & \leq & 3 \\
 & & x_1,\, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

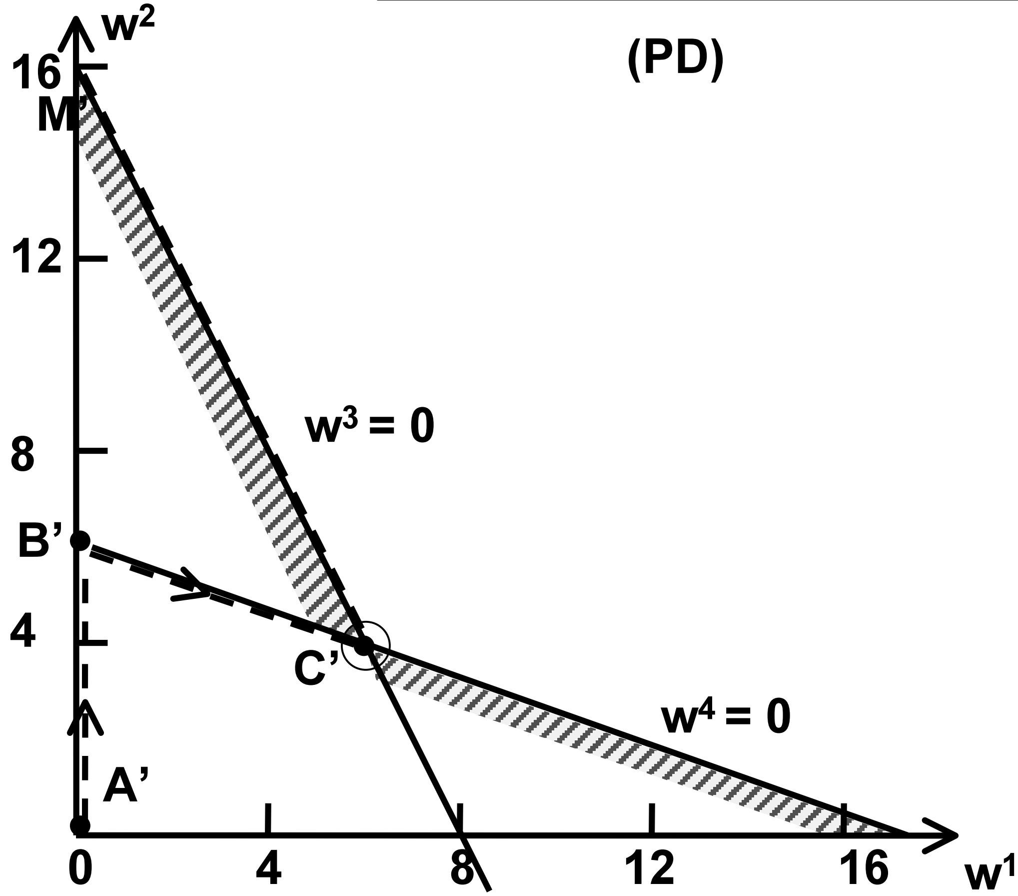
(PP)

EXEMPLO

$$\text{MIN} \quad \varnothing = 4\,w^1 + 3\,w^2$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{s.a} & 2\,w^1 + \;\; w^2 & \geq & 16 \\
 & w^1 + 3\,w^2 & \geq & 18 \\
 & w^1, w^2 & \geq & 0
\end{array}$$

(PD)



Departamento de Engenharia de Sistemas - (DENSIS) FEEC/UNICAMP

① **SOLUÇÃO DE (PP) PELO MÉTODO SIMPLEX**

$$f = (0) \rightarrow (18) \rightarrow (36)$$
$$A \rightarrow B \rightarrow C$$

② **SOLUÇÃO DE (PD) PELO MÉTODO SIMPLEX**

$$\varnothing = (48) \rightarrow (36)$$
$$M' \rightarrow C'$$

③ **AO TRAJETO M’ → C’ DE (PD) CORRESPONDE**

$$M \rightarrow C$$
$$F = (48) \rightarrow (36)$$

④ **O vértice M corresponde a uma solução <u>OTIMISTA</u>: valor melhor que o ótimo para a função objetivo, porém infactível.**

A evolução M → C é no sentido de tornar a solução <u>menos otimista</u> e <u>mais realista</u>. Corresponde a um passo do MÉTODO DUAL SIMPLEX.

PROPRIEDADES DA DUALIDADE

RESULTADO 1

O DUAL DO DUAL É O PRIMAL

RESULTADO 2

Seja $\underline{x}^*$ um valor factível de (PP), isto é:

$$A\,\underline{x}^* \leq \underline{b}$$
$$\underline{x}^* \geq \underline{0}$$

Seja $\underline{w}^*$ um valor factível de (PD), isto é:

$$\underline{w}^* A \geq \underline{c}$$
$$\underline{w}^* \geq \underline{0}$$

Então:

$$f(\underline{x}^*) \leq \text{Ø}(\underline{w}^*)$$

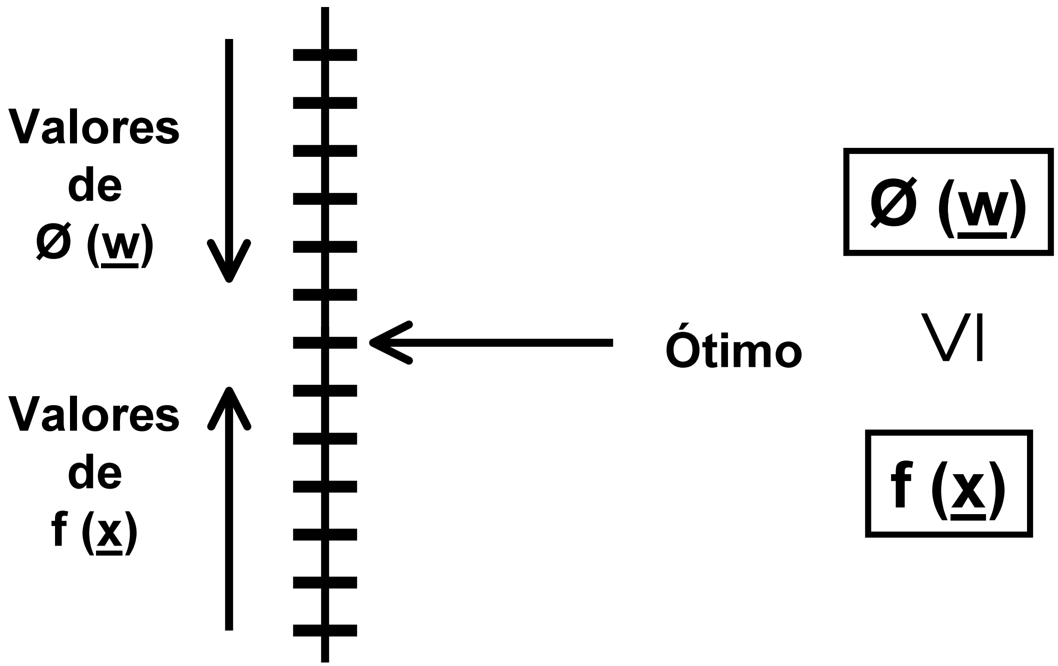
DEMOSTRAÇÃO

$$\boxed{f(\underline{x}^*) = c\,\underline{x}^* \leq (\underline{w}^* A)\,\underline{x}^* = \underline{w}^* (A\,\underline{x}^*) \leq \underline{w}^*\,\underline{b} = \text{Ø}(\underline{w}^*)}$$

COMENTÁRIOS

✳ (PP) é um problema de maximização
(PD) é um problema de minimização

✳ O método simplex aplicado a (PP) evolui de solução básica para outra solução básica sempre no sentido de aumentar a função objetivo f(x)



MÉTODO SIMPLEX APLICADO A (PD)

MÉTODO SIMPLEX APLICADO A (PP)

✳ **MÉTODO DUAL SIMPLEX**

Corresponde à aplicação do método simplex ao problema dual, trabalhando, entretanto, com o quadro do problema primal.

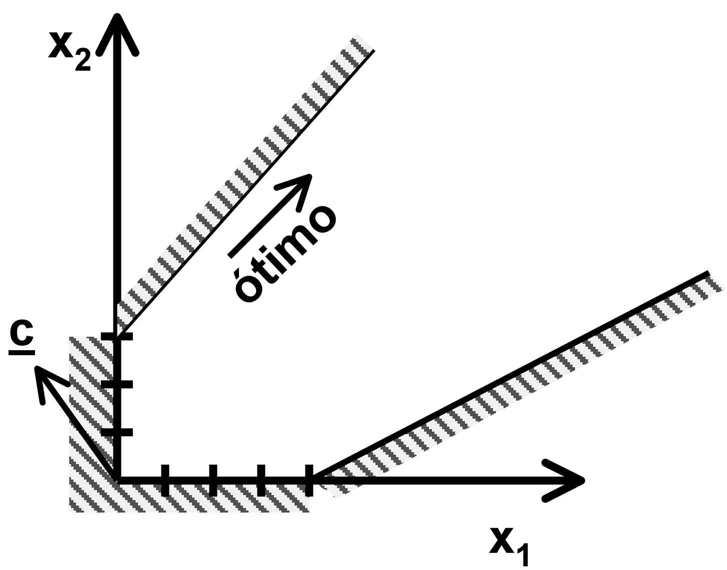
✳ **UMA DECORRÊNCIA: Se $\underline{x}^0$ e $\underline{w}^0$ são factíveis de (PP) e (PD) e**

$$\boxed{\underline{c}\ \underline{x}^0 = \underline{w}^0\ \underline{b}}$$

$\Rightarrow$ **x^0 e w^0 são soluções ótimas de (PP) e (PD).**

✳ **OUTRA DECORRÊNCIA: Se um dos problemas tem valor ilimitado, seu parceiro será infactível.**

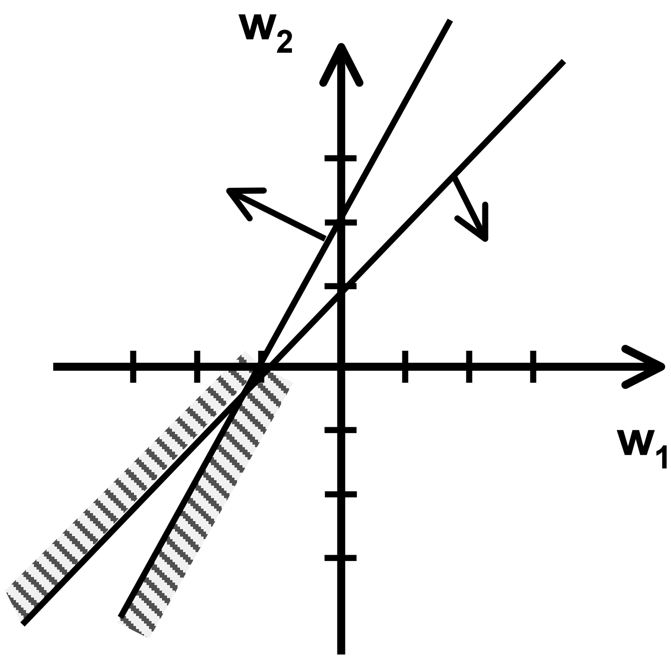
EXEMPLO



(PP)

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & f = -x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & x_1 - 2x_2 \le 4 \\ & x_1 + x_2 \le 3 \\ & x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{array}$$

EXEMPLO



(PD)

$$\text{Min} \quad \varnothing = 4\,w^1 + 3\,w^2$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} w^1 - \quad w^2 &\geq -1 \\ -2w^1 + \quad w^2 &\geq \ \ 2 \end{aligned}$$

$$w^1 \geq 0 \quad w^2 \geq 0$$

RESULTADO 3

Se um dos problemas do par dual tem solução ótima finita, o outro também terá.

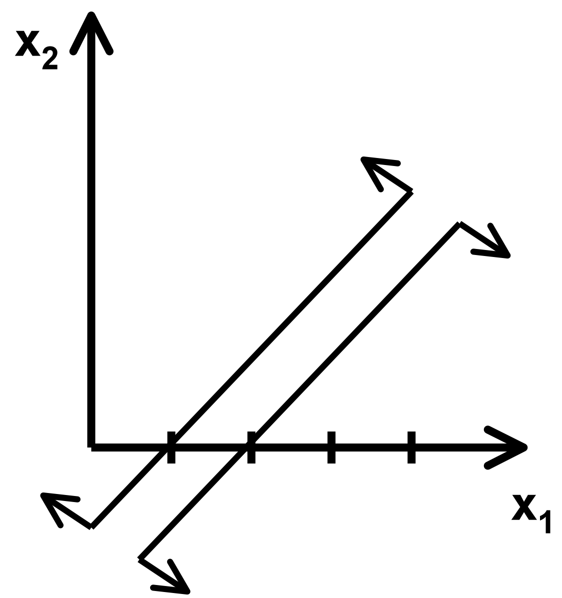
TEOREMA FUNDAMENTAL DA DUALIDADE

Em relação ao par de problemas duais, uma e somente uma das alternativas é verdadeira:

- **Ambos os problemas tem solução tipo α.**
- **Um tem solução tipo β e o outro é infactível.**
- **Ambos são infactíveis.**

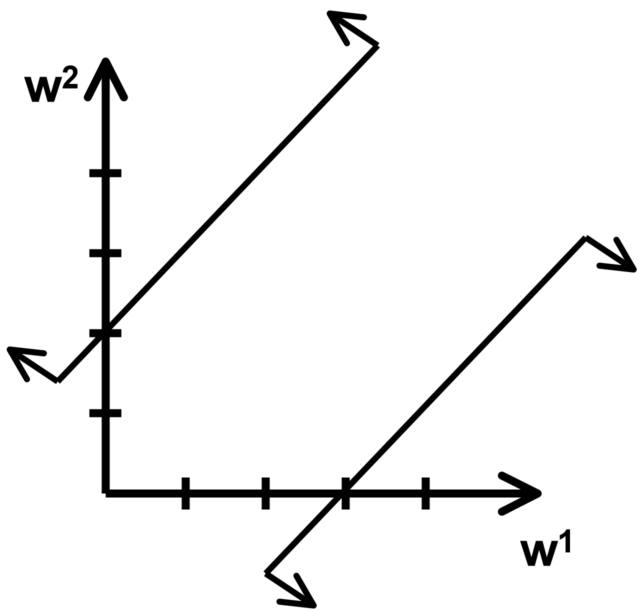
EXEMPLO: Para aclarar a alternativa 3

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & f = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & -x_1 + x_2 \leq -2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Departamento de Engenharia de Sistemas - (DENSIS) FEEC/UNICAMP

<u>EXEMPLO:</u> Para aclarar a alternativa 3



$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & \emptyset = w^1 - 2\,w^2 \\
\text{s.a} & w^1 - w^2 \geq 3 \\
 & -w^1 + w^2 \geq 2 \\
 & w^1, w^2 \geq 0
\end{array}
$$

RESUMINDO

(PP) ÓTIMO FINITO $\Longleftrightarrow$ (PD) ÓTIMO FINITO

(PP) ILIMITADO $\Longrightarrow$ (PD) INFACTÍVEL

(PD) ILIMITADO $\Longrightarrow$ (PP) INFACTÍVEL

(PP) INFACTÍVEL $\Longrightarrow$ (PD) INFACTÍVEL/ILIMITADO

(PD) INFACTÍVEL $\Longrightarrow$ (PP) INFACTÍVEL/ILIMITADO

TEOREMA DAS FOLGAS COMPLEMENTARES

$\underline{x}^*$ e $\underline{w}^*$ FACTÍVEIS $\longrightarrow$ $\underline{c}\underline{x}^* \;\leq\; \underline{w}^* A\, \underline{x}^* \;\leq\; \underline{w}^*\, \underline{b}$

$\underline{x}^0$ e $\underline{w}^0$ ÓTIMOS $\longrightarrow$ $\underline{c}\underline{x}^0 \;\leq\; \underline{w}^0 A\, \underline{x}^0 \;\leq\; \underline{w}^0\, \underline{b}$

PORTANTO:

$$(\,\underline{w}^0 A - \underline{c}\,)\,\underline{x}^0 = 0$$

$$\underline{w}^0\,(\,\underline{b} - A\,\underline{x}^0\,) = 0$$

CONCLUSÕES

$x_j^0 > 0 \longrightarrow c^j = \underline{w}^0 A^j$

produção ativada $\longrightarrow$ situação ajustada produto concorre com açambarcador

$c^j < \underline{w}^0 \underline{A}^j \longrightarrow \underline{x}_j^0 = 0$

produto não resiste à concorrência do açambarcador $\longrightarrow$ produto estava fora do plano de produção

$w_0^i > 0 \longrightarrow \underline{A}_i \underline{x}^0 = b_i$

açambarcador deu preço para uma matéria prima $\longrightarrow$ ela estava sendo usada sem folga

$\underline{A}_i \underline{x}^0 < b_i \longrightarrow w_0^i = 0$

há excedente de matéria prima $\longrightarrow$ esta matéria recebe preço nulo

GENERALIZAÇÕES

O (PP) que apresentamos tem apenas restrições de desigualdade. Há outras formas de apresentação do par dual, por exemplo, com (PP) exibindo restrições de igualdade:

(PP)

$$\begin{array}{ll} \text{MAX} & f(x) = \underline{c}\,\underline{x} \\ \text{s.a} & A\,\underline{x} = \underline{b} \\ & \underline{x} \,\underline{\geq}\, \underline{0} \end{array}$$

(PD)

$$\begin{array}{ll} \text{MIN } \varnothing = \underline{w}\,\underline{b} & \\ \text{s.a} & \underline{w}A \geq \underline{c} \\ & \underline{w} \text{ irrestrito} \end{array}$$

TABELA GERAL	PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO	PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO	
Variável	≥ 0 ≤ 0 irrestrita	$\leq$ $\geq$ $=$	restrição
restrição	$\geq$ $\leq$ $=$	≥ 0 ≤ 0 irrestrita	Variável