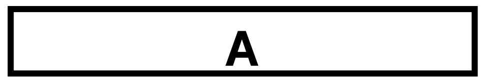
Capítulo V:

O MÉTODO SIMPLEX REVISADO

MÉTODO SIMPLEX REVISADO

☞ Normalmente n >> m, isto é , número de variáveis muito maior que o número de restrições.

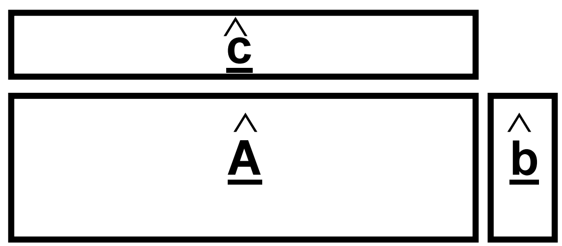


☞ A prática revela que o SIMPLEX resolve um P.L. com m a 1,5 m pivoteamentos.

☞ Conclue-se que há colunas que nunca são usadas; não distante a cada interação efetuam-se cálculos sobre seus elementos.

☞ Ocorre assim desperdício de tempo e memória.

☞ A idéia então é não guardar na memória rápida (“core”) do computador o quadro completo pivoteado.



☞Dispondo-se de $(A^{I})^{-1}$ pode-se efetuar uma programação SIMPLEX: daí nasce o **MÉTODO SIMPLEX REVISADO**

PONTOS BÁSICOS

- ⌛ Economia de memória rápida
- ⌛ Guarda-se A, $\underline{b}$, $\underline{c}$ na memória lenta (disco, fita,...)
- ⌛ Atualização de $(A^{I})^{-1}$

ATUALIZAÇÃO DA INVERSA DA MATRIZ DE BASE

Matriz de pivoteamento P (r, s)

Exemplo:

Matriz $\underline{\hat{A}}$ na iteração k

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & \hat{A}_1^6 & . & . \\ 0 & 1 & 0 & . & . & \hat{A}_2^6 & . & . \\ 0 & 0 & 1 & . & . & \hat{A}_3^6 & . & . \end{pmatrix}$$

Matriz $\underline{\hat{A}}$ na iteração k + 1

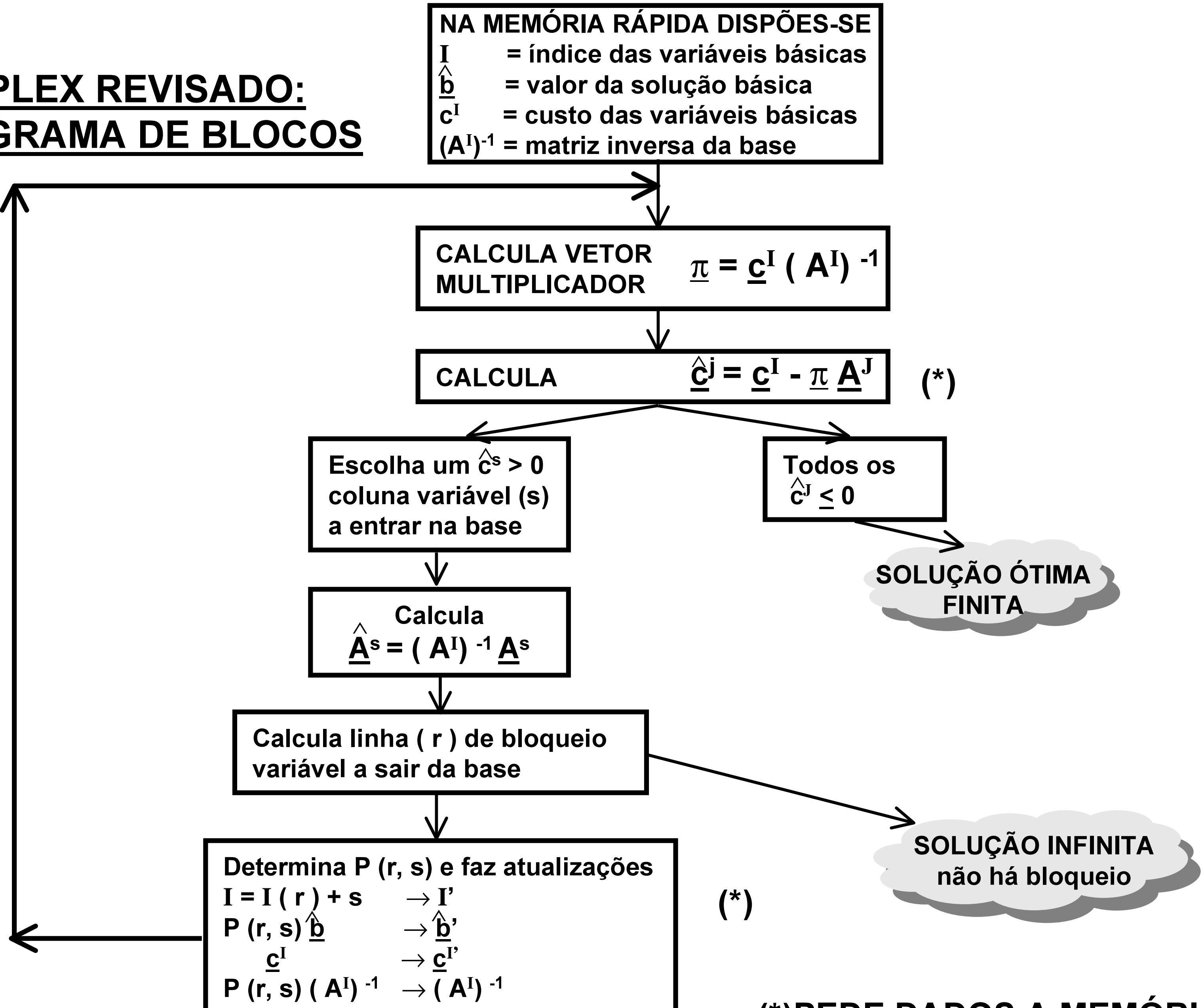
$$\begin{pmatrix} 1 & -\hat{A}_1^6/\hat{A}_2^6 & 0 & . & . & 0 & . & . \\ 0 & 1/\hat{A}_2^6 & 0 & . & . & 1 & . & . \\ 0 & -\hat{A}_3^6/\hat{A}_2^6 & 1 & . & . & 0 & . & . \end{pmatrix}$$

É fácil ver que a operação de atualização de $\hat{A}$ consiste na multiplicação pela matriz P (2, 6)

$$\begin{pmatrix} 1 & -\hat{A}_1^6/\hat{A}_2^6 & 0 \\ 0 & 1/\hat{A}_2^6 & 0 \\ 0 & -\hat{A}_3^6/\hat{A}_2^6 & 1 \end{pmatrix} \underline{\hat{A}}_k = \underline{\hat{A}}_{k+1}$$

P(2, 6) : MATRIZ DE PIVOTEAMENTO

SIMPLEX REVISADO: DIAGRAMA DE BLOCOS



(*)PEDE DADOS A MEMÓRIA LENTA

EXEMPLO: SIMPLEX REVISADO

$$
(P)\quad \begin{cases}
(\text{Max})\ z = & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{s.a.} & 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 8 \\
 & x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 7 \\
 & 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 3 \\
 & x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 4
\end{cases}
$$

$$
\text{FORMA PADRÃO}\quad \begin{cases}
(\text{Max})\ z = & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{s.a.} & 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 8 \\
 & x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_6 = 7 \\
 & 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_7 = 3 \\
 & x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 7
\end{cases}
$$

INICIALIZAÇÃO

$I = \{ 5, 6, 7 \}$

$\underline{c}^I = (0\ 0\ 0)$

$$\hat{\underline{b}} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (A^I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ITERAÇÃO 1

- $\underline{\pi} = c^{I} (A^{I})^{-1} = (0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \quad 0 \quad 0)$

- $\hat{c}^{1} = c^{1} - \underline{\pi} A^{1} = 1 - (0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 > 0$

- **Coluna a entrar na base :** $\boxed{s=1}$

- $\underline{\hat{A}}^{1} = (A^{I})^{-1} \underline{A}^{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- **Linha de bloqueio**

$$\begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} X_1 \Rightarrow \boxed{r = 1} \quad I(1) = 5$$

- $P(r, s) = P(1, 1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- **ATUALIZAÇÕES:**

$I - I(1) + 1 = \{5, 6, 7\} - 5 + 1 \rightarrow I' = \{1, 6, 7\}$

$$P(r, s)\,\hat{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \hat{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\underline{c}^{I'} = (1 \;\; 0 \;\; 0)$

$$P(r, s)\,\hat{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ITERAÇÃO 2

- $\underline{\pi} = \underline{c}^{I} (A^{I})^{-1} = (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1/2 \quad 0 \quad 0)$

- $\hat{c}^{2} = c^{2} - \pi A^{2} = 1 - (1/2 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1/2 > 0$

- Coluna a entrar na base : $\boxed{s=2}$

- $\hat{\underline{A}}^{2} = (A^{I})^{-1} \underline{A}^{2} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Linha de bloqueio

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} X_2 \Rightarrow \boxed{r = 2} \quad I(2) = 6$$

- $P(r, s) = P(2, 2) = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}$

- **ATUALIZAÇÕES:**

$I' - I(2) + 2 = \{1, 6, 7\} - 6 + 2 \rightarrow I'' = \{1, 2, 7\}$

$$P(r, s)\,\hat{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{c}^{I''} = (1 \;\; 1 \;\; 0)$

$$P(r, s)\,(A^{I})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}$$

ITERAÇÃO 3

- $\underline{\pi} = \underline{c}^{I''} (A^{I''})^{-1} = (\ 1 \quad 1 \quad 0\ ) \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\pi} = (1/3 \quad 1/3 \quad 0)$

- $\hat{c}^3 = c^3 - \underline{\pi}\, \underline{A}^3 = 1 - (\ 1/3 \quad 1/3 \quad 0\ ) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = -2$

$\hat{c}^4 = c^4 - \underline{\pi}\, \underline{A}^4 = 1 - (\ 1/3 \quad 1/3 \quad 0\ ) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = -\ 1/3$

$\hat{c}^5 = c^5 - \underline{\pi}\, \underline{A}^5 = 0 - (\ 1/3 \quad 1/3 \quad 0\ ) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\ 1/3$

$\hat{c}^6 = c^6 - \underline{\pi}\, \underline{A}^6 = 0 - (\ 1/3 \quad 1/3 \quad 0\ ) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\ 1/3$

TODOS $\hat{c}^i \leq 0 \Rightarrow$ **SOLUÇÃO ÓTIMA FINITA**

SIMPLEX COMUM

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	1	1	1	0	0	0	0
2	1	4	2	1	0	0	8
1	2	5	2	0	1	0	7
0	1	3	1	0	0	1	3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	1/2	-1	0	-1/2	0	0	- 4
1	1/2	2	1	1/2	0	0	4
0	3/2	3	1	-1/2	1	0	3
0	1	3	1	0	0	1	3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	0	-2	-1/3	-1/3	-1/3	0	- 5
1	0	1	2/3	2/3	-1/3	0	3
0	1	2	2/3	-1/3	2/3	0	2
0	0	1	1/3	1/3	1/3	1	1

SIMPLEX CLÁSSICO × **SIMPLEX REVISADO**

IDÉIA BÁSICA

IDÉIA BÁSICA	**A interação K + 1 se apoia totalmente em dados provenientes da interação K**	**A interação K + 1 se apoia em dados da interação ZERO**

RAZÃO $\longrightarrow$ **ECONOMIA DE MEMÓRIA E ECONOMIA DE CÁLCULO**

ESTRUTURA DE DADOS

É a forma preparada da interação K

$\underline{0}$	$\hat{\underline{c}}^{J}$	
1	$\hat{A}^{J}$	$\hat{\underline{b}}$

A informação deve ser atualizada a cada interação (PIVOTEAMENTO)

Exige o conhecimento atualizado de $(A^{I})^{-1}$, I, $\underline{c}^{I}$, $\hat{\underline{b}}$ e z.
Além disto dentro de cada iteração é necessário o cálculo de π e $\hat{A}^{s}$

EXPLICAÇÃO DO SIMPLEX REVISADO

1) COMO CARACTERIZAR A SOLUÇÃO BÁSICA

$$\underline{x}^{I} = (A^{I})^{-1}\, \underline{b}$$

$$z = \underline{c}^{I}(A^{I})^{-1}\, \underline{b}$$

2) TESTE DE OTIMALIDADE

$$\hat{\underline{c}}^{J} = \underline{c}^{J} - \pi\, A^{J}$$

COM

$$\pi = \underline{c}^{I}\,(A^{I})^{-1}$$

SABEMOS QUE SE

$$\hat{\underline{c}}^{J} \underline{\leq} \underline{0} \qquad \rightarrow \text{ ÓTIMO}$$

Caso contrário escolhe-se uma variável

x_s para entrar na base ($\hat{c}^{s} > 0$)

3) CÁLCULO DO BLOQUEIO **Sendo x_s o maior possível**

$$\underline{x}_I = \hat{\underline{b}} - \hat{A}^s x_s \geq 0$$

COM

$$\hat{\underline{b}} = (A^I)^{-1} \underline{b}$$

$$\hat{A}^s = (A^I)^{-1} A^s$$

4) ATUALIZAR ESTRUTURA DE DADOS

$$(A^I)^{-1}_{NOVO} = P(r, s)\, (A^I)^{-1}_{ANTIGA}$$

$$I_{ANTIGO} = (I(1), \ldots\ldots\ldots, I(r - 1), I(r), \ldots\ldots\ldots, I(m))$$

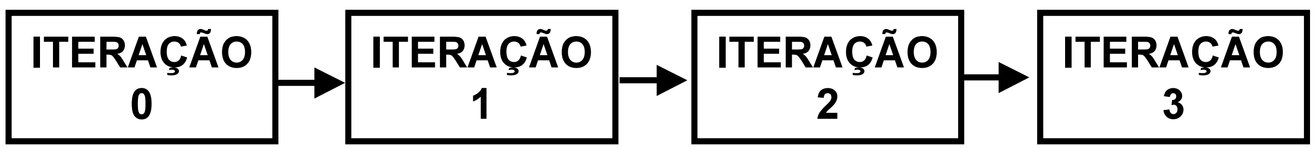
$$I_{NOVO} = (I(1), \ldots\ldots\ldots, I(r - 1), s, \ldots\ldots\ldots, I(m))$$

$$\hat{\underline{b}}_{NOVO} = \hat{\underline{b}}_{ANTIGO} - \hat{A}^s x_s^*$$

$$z_{NOVO} = z_{ANTIGO} - \hat{c}^s x_s^*$$

Como vimos processa-se toda iteração k + 1 sem necessidade de uma estrutura de dados completa da iteração k.

- O MÉTODO SIMPLEX CLÁSSICO



- O MÉTODO SIMPLEX REVISADO