Capítulo IV:

SIMPLEX:
MÉTODO DAS
DUAS FASES

Departamento de Engenharia de Sistemas - (DENSIS) FEEC/UNICAMP

Obtenção de um solução básica inicial factível.

Variáveis artificiais:

Seja o P.L.:

$$(MAX)\ z = -x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 3 \end{cases} \qquad \underline{x} \geq \underline{0}$$

Na forma padrão:

$$(MAX)\ z = -x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, 5$$

Não havendo solução factível óbvia $\Rightarrow$

VARIÁVEIS ARTIFICIAIS : $\underline{x}_a$

Na forma padrão:

$$(MAX)\ z = -x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a}\quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 1 \\ x_2 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1,\ldots,7$$

I = { 6, 7, 5 } é uma base factível !

$\therefore$ **SOLUÇÃO DE PARTIDA PARA O SIMPLEX**

ATENÇÃO:

$$\left\{ \begin{array}{l} A\underline{x} = \underline{b} \\ \underline{x} \geq \underline{0} \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} A\underline{x} + \underline{x}_a = \underline{b} \\ \underline{x},\ \underline{x}_a \geq \underline{0} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\underline{x}_a = 0}$$

MÉTODO DAS DUAS FASES

FASE I

É um procedimento para zerar as VARIÁVEIS ARTIFICIAIS

$$\begin{array}{ll} \text{(Min)} & \varnothing = 1\,\underline{x}_a \\ \text{s.a} & A\underline{x} + \underline{x}_a = \underline{b} \\ & \underline{x},\ \underline{x}_a \geq \underline{0} \end{array} \longrightarrow \text{Problema Artificial}$$

Resolver o problema artificial pelo SIMPLEX. Se o valor ótimo deste problema for $\varnothing = 0$ (i.e. $\underline{x}_a = \underline{0}$) então a solução ótima correspondente é uma solução básica factível inicial do problema original.

OBSERVAÇÕES:

1. Se o valor ótimo de $\varnothing$ é positivo ($\underline{x}_a \neq \underline{0}$) o problema original não tem solução factível.
2. A solução do problema acima pode ter $\underline{x}_a = \underline{0}$, mas pode ser que alguma variável artificial esteja na base com valor zero (solução degenerada)

FASE II

De posse da solução básica factível achada na FASE I, aplica-se o SIMPLEX no problema original.

Departamento de Engenharia de Sistemas - (DENSIS) FEEC/UNICAMP

EXEMPLO:

$$
\begin{array}{llcccccccl}
\text{(Min)} & \varnothing = & & & & & x_6 & + x_7 & \\
\text{s.a} & & x_1 & + x_2 & - x_3 & & & x_6 & & =2 \\
& & -x_1 & + x_2 & & - x_4 & & & +x_7 & =1 \\
& & & x_2 & & & + x_5 & & & =3
\end{array}
$$

$$x_i \geq 0 \qquad i= 1,7$$

Base óbvia: I = { 6, 7, 5 }

Colocando o P.L. na forma preparada em relação a esta base I:

$$
\begin{array}{lcccccccl}
 & -2x_2 & + x_3 & + x_4 & & & & & = -3 + \varnothing \text{ (min)} \\
x_1 & + x_2 & - x_3 & & & +x_6 & & & = 2 \\
- x_1 & + x_2 & & - x_4 & & & + x_7 & & = 1 \\
 & x_2 & & & + x_5 & & & & = 3
\end{array}
$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,7$$

Obs. Basta zerar os coeficientes das variáveis artificiais na função objetivo.

Em forma de quadro, aplicando e SIMPLEX

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	-2	1	1				- 3
1	1	-1			1		2
-1	1		-1			1	1
	1			1			3

I ={ 6, 7, 5 }

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
-2		1	-1			2	- 1
2		-1	1		1	-1	1
-1	1		-1			1	1
1			1	1		-1	2

I ={ 6, 2 ,5 }

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
					1	1	0
1		-1/2	1/2		1/2	-1/2	1/2
	1	-1/2	-1/2		1/2	1/2	3/2
		1/2	1/2	1	-1/2	-1/2	3/2

$I = \{ 1, 2, 5 \}$

Fim da fase 1 $\Rightarrow \varnothing = 0 \Rightarrow x_6 = x_7 = 0$

Fase II: Substituindo no quadro a função objetivo artificial pela função objetivo original e abandonando as variáveis artificiais, tem-se:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-1	2				0
1		-1/2	1/2		1/2
	1	-1/2	-1/2		3/2
		1/2	1/2	1	3/2

Colocando o P.L. na FORMA PREPARADA relativa à base
I ={ 1, 2 ,5 } temos:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		1/2	3/2		-5/2
1		-1/2	1/2		1/2
	1	-1/2	-1/2		3/2
		1/2	1/2	1	3/2

I = { 1, 2 ,5 }

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-3		2			- 4
2		-1	1		1
1	1	-1			2
-1		1		1	1

$I = \{ 4, 2, 5 \}$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-1				-2	- 6
1			1	1	2
	1			1	3
-1		1		1	1

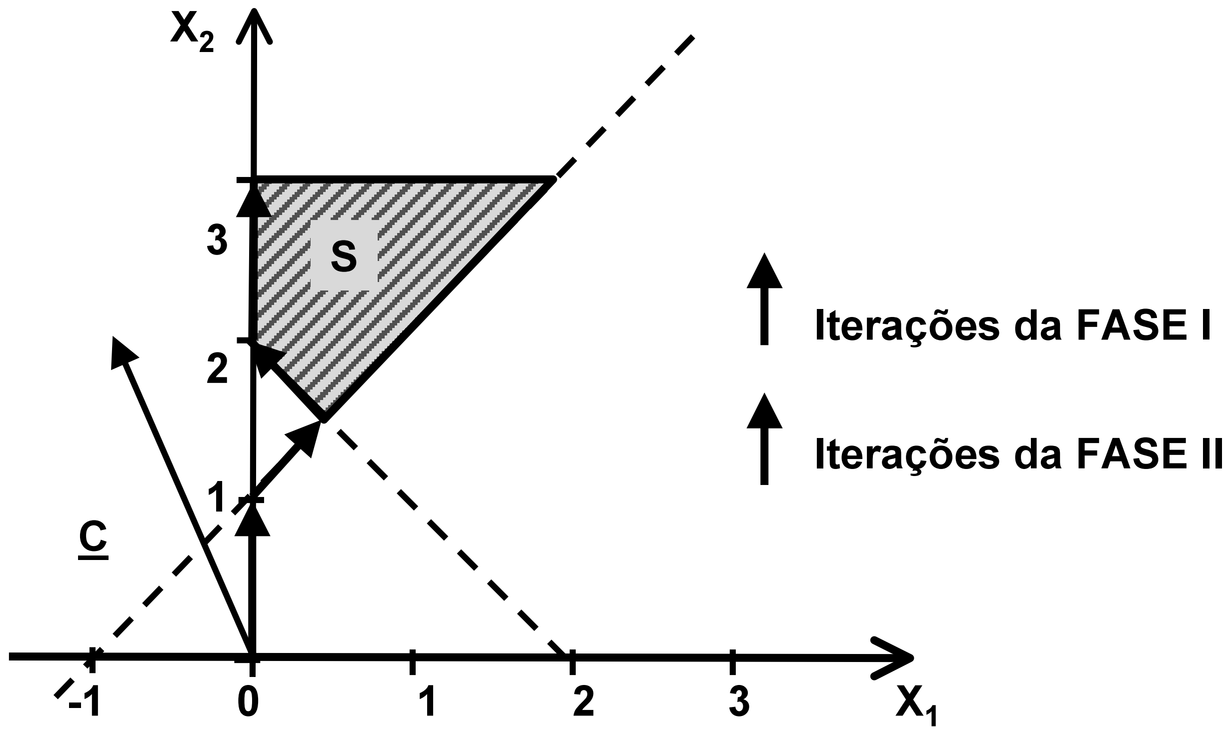
$I = \{ 4, 2, 5 \}$

Solução ótima

$x_1 = x_5 = 0$

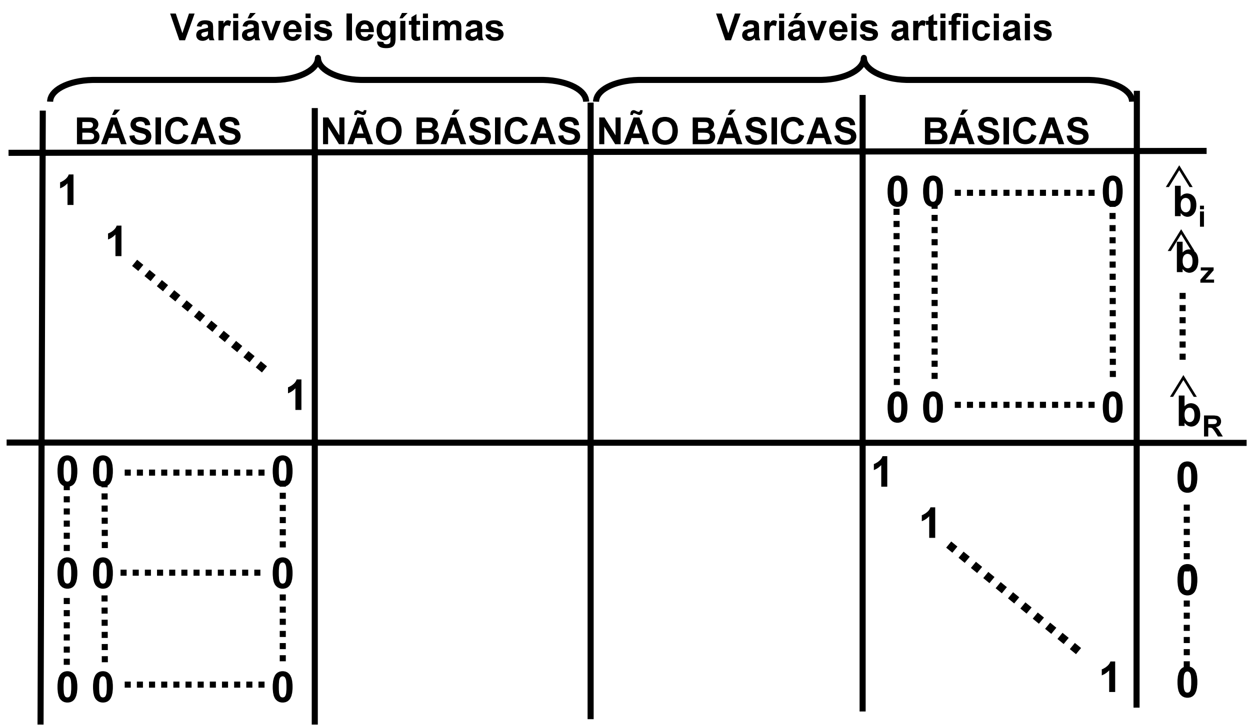
$x_4 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 1$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA



OBSERVAÇÕES

① **Ao fim da FASE I há variáveis artificiais na base a nível zero.**



*** Tentar substituir (por pivoteamento) as variáveis básicas artificiais pelas não básicas legítimas.**

. Se for possível ⇒ BASE LEGÍTIMA FACTÍVEL FASE II)

. Caso contrário ⇒ REDUNDÂNCIA

② **A função objetivo original pode ser acrescentada ao quadro da FASE I e sofrer os pivoteamentos ⇒ automatiza o início da FASE II**

③ **Outros métodos para encontrar uma base factível inicial**

.Método do M-grande

. Método da variável artificial única