# Capítulo III:

## ALGORITMO SIMPLEX

## PROCEDIMENTO DO MÉTODO SIMPLEX

**Passar de solução BÁSICA FACTÍVEL a uma outra, tentando melhorar a FUNÇÃO OBJETIVO.**

1. **Escolher uma variável não básica que melhore a função objetivo**

$$\underline{c}^J - \underline{\pi} A^J > 0$$

   **e colocá-la na base.**

2. **Escolher uma variável básica para sair da base de modo a manter factibilidade.**

**EXEMPLO:**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = z \text{ (MAX)} \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ x_2 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0$$

**Seja a base $\mathrm{I} = \{ 3, 4, 5 \}$**

**Solução básica factível** $\begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 = 8, \quad x_4 = 7, x_5 = 3 \end{cases}$

**O P. L. já está na FORMA PREPARADA relativa à base $\mathrm{I} = \{ 3, 4, 5 \} \Rightarrow x_1$ e $x_2$ são candidatas a entrar na base, pois seus coeficientes são positivos e aumentam z.**

**Escolho $x_2$ para aumentar ( entrar na base ) e conservo $x_1$ a nível <u>zero</u> ( fora da base)**

**PARA MANTER A FACTIBILIDADE**

$$x_3 = 8 - x_2 \longrightarrow x_2 \leq 8$$

$$x_4 = 7 - 2x_2 \longrightarrow x_2 \leq 7/2$$

$$x_5 = 3 - x_2 \longrightarrow x_2 \leq 3$$

**LINHA BLOQUEIO**



Departamento de Engenharia de Sistemas - (DENSIS) FEEC/UNICAMP

**CONCLUSÃO:** $x_2$ entra na base ( assume valor positivo )
$x_5$ sai da base ( assume valor zero )

$$I = \{ 3, 4, 5 \} \Rightarrow I' = \{ 3, 4, 2 \}$$

**Colocar o P. L. na forma PREPARADA relativa à base $I'$**

$\Rightarrow$ **Basta pivotear em torno de $A_3^2$**

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | z |
| 2 | 1 | 1 | | | 8 |
| 1 | 2 | | 1 | | 7 |
| | 1 | | | 1 | 3 |

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | -1 | z - 3 |
| 2 | | 1 | | -1 | 5 |
| 1 | | | 1 | -2 | 1 |
| | 1 | | | 1 | 3 |

$\left.\begin{matrix}5\\1\\3\end{matrix}\right\}$ **NOVA SOLUÇÃO BÁSICA FACTÍVEL**

Agora só $x_1$ faz crescer z. Portanto faço $x_1$ crescer (entrar na base) e mantenho $x_5$ a nível zero (fora da base).

PARA MANTER FACTIBILIDADE

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_3$ | $= 5 - 2x_1$ | $x_1 \leq 5/2$ | |
| $x_4$ | $= 1 - x_1$ | $x_1 \leq 1 \leftarrow$ | LINHA BLOQUEIO |
| $x_2$ | $= 3$ | $x_1$ irrestrito | |

**CONCLUSÃO:**

$x_1$ entra na base
$x_4$ sai da base

$$I' = \{3, 4, 2\} \Rightarrow I'' = \{3, 1, 2\}$$

Pivotear em torno da $A_2^1$ (quadro anterior)

Fica:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | -1 | 1 | z - 4 |
| | | 1 | -2 | 3 | 3 |
| 1 | | | 1 | -2 | 1 |
| | 1 | | | 1 | 3 |

NOVA SOLUÇÃO BÁSICA FACTÍVEL

$$\left.\begin{array}{l} x_5 \text{ ainda faz } z \text{ crescer} \\ x_3 \text{ bloqueia o crescimento de } x_5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_5 \text{ entra na base} \\ x_3 \text{ sai da base} \end{array}$$

$I'' = \{ 3, 1, 2 \} \Rightarrow I''' = \{ 5, 1, 2 \}$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | -1/3 | -1/3 | | z - 5 |
| | | 1/3 | -2/3 | 1 | 1 |
| 1 | | 2/3 | -1/3 | | 3 |
| | 1 | -1/3 | 2/3 | | 2 |

SOLUÇÃO BÁSICA ÓTIMA

Todos os coeficientes da função objetivo são não positivos
$\Rightarrow$ z não pode mais aumentar

OBSERVAÇÕES:
* solução ilimitada
* solução múltipla

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO SIMPLEX:

Caminha de ponto extremo em ponto extremo adjacente através da aresta que os liga no sentido ce crescer z.

## ALGORITMO SIMPLEX (RESUMIDO)

**Supondo consistência, não-redundância e conhecida uma base factível inicial.**

**1. Verificar se a base factível atual é ótima. Se for, terminou. Senão vá para 2.**

**2. Determinar a variável não básica a entrar na base.**

**3. Determinar a variável básica a sair da base.**

**4. Achar a nova solução básica factível (por pivoteamento) e voltar a 1**

## ALGORITMO SIMPLEX

**Supondo consistência, ausência de redundâncias e conhecida uma base factível inicial $\mathbf{I}$ :**

**0/ coloque o problema na forma canônica relativa à base $\mathbf{I}$**

**1/ determine** $\hat{c}^s = \underset{i \notin \mathbf{I}}{\text{Max}}\ \hat{c}^i$

- **1.1 se $\hat{c}^s \leq 0$, terminou. A solução básica corresponde à base $\mathbf{I}$ é ótima**
- **1.2 se $\hat{c}^s > 0$, vá para 2/**

**2/ examine o vetor $\underline{\hat{A}}^s$**

- **2.1 se $\underline{\hat{A}}^s \leq 0$ (i.e. todos seus componentes são não positivos), terminou. O P.L. tem solução infinita.**

- **2.2 se $\{\ i/\ \hat{A}_i^s > 0\ \} \neq \phi$**

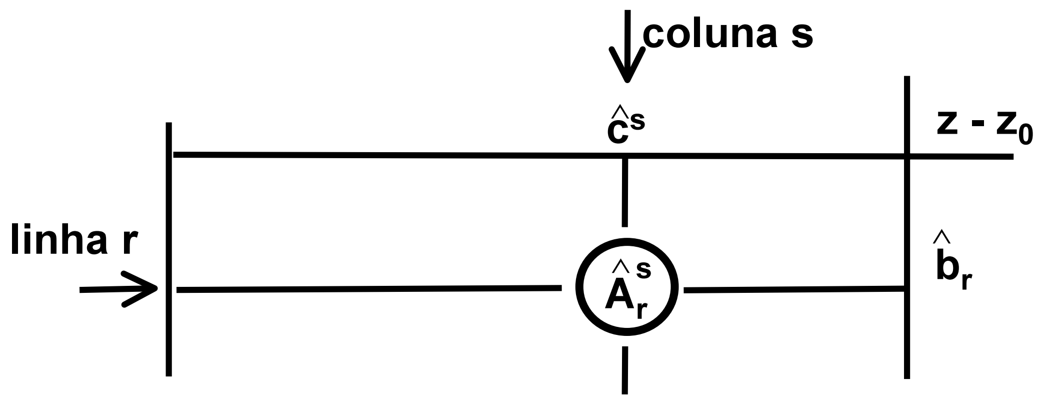
  **a) determine r/** $\dfrac{\hat{b}_r}{\hat{A}_r^s} \quad \underset{\{i/\ \hat{A}_r^s > 0\}}{\text{Mínimo}} \left\{ \dfrac{\hat{b}_i}{\hat{A}_i^s} \right\}$

  **b) identifique $\hat{A}_r^s$ como elemento pivô. Defina a nova base $\mathbf{I}'$ trocando s por r**

  **c) pivoteie em torno de $\hat{A}_r^s$ e volte a 1/**

## CONVERGÊNCIA DO MÉTODO SIMPLEX

**Numa interação do SIMPLEX, quando se passa de uma solução básica factível à outra, a função objetivo cresce de $\Delta z = \hat{c}^s \cdot \hat{b}_r / \hat{A}_r^s$**




**Como por hipótese:**

$\hat{c}^s > 0$ ( se $\hat{c}^s \leq 0 \Rightarrow$ solução ótima)

$\hat{b}_r > 0$ ( não degenerescência)

$\hat{A}_r^s > 0$ (se $\hat{c}^s > 0$ e $\hat{A}_r^s \leq 0 \Rightarrow$ solução ilimitada)

**Conclui-se:**

$$\Delta z > 0$$

**Se a função objetivo cresce estritamente a cada iteração e o número de soluções básicas factÍveis é finito, então o método SIMPLEX converge (para uma solução ótima finita ou para uma solução ótima ilimitada) num número finito de passos.**

## SITUAÇÕES ESPECIAIS NO MÉTODO SIMPLEX

**1/ Problemas de minimização**

**Min f(x) = - (Max - f (x))**

**2/ Empate no critério de entrada da variável na base**

*** desempata-se arbitrariamente**

**3/ Empate no critério de saída da variável na base**

*** desempata-se arbitrariamente (solução degenerada)**

**4/ Ciclagem**

**Se um P.L. tem soluções básicas factíveis degeneradas, o método SIMPLEX pode ficar indefinidamente se movendo sobre elas (ciclando)**

*** é muito raro**

*** há regras que evitam ciclagem**