Capítulo II:

REVISÃO DE ÁLGEBRA LINEAR
E
APLICAÇÕES À PROGRAMAÇÃO LINEAR

UMA REVISÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

**O coração de um problema de Programação Linear (PL)
é o conjunto de equações lineares.**

$$\underset{\substack{\nearrow \\ m \times n}}{A}\ \underline{x} = \underline{b}$$

**É indispensável saber resolver este
sistema de m (equações) lineares a n incógnitas.**

$$A\ \underline{x} = \begin{pmatrix} \leftarrow \underline{A}_1 \rightarrow \\ \leftarrow \underline{A}_2 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \underline{A}_m \rightarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \underline{b}$$

RESOLVER este sistema corresponde a:

⇨ **Determinar se há inconsistência entre a suas equações**

Se existir m números (escalares) $y_1, y_2, \dots Y_m$ t.q.

$$\begin{array}{c} y_1 \longrightarrow \\ y_2 \longrightarrow \\ \vdots \\ y_m \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} \longleftarrow \underline{A}_1 \longrightarrow \\ \longleftarrow \underline{A}_2 \longrightarrow \\ \vdots \\ \longleftarrow \underline{A}_m \longrightarrow \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$y_1 \underline{A}_1 + y_2 \underline{A}_2 + \dots\dots + y_m \underline{A}_m = \underline{0} = (\longleftarrow \quad 0 \longrightarrow \ )$$

$$y_1 b_1 + y_2 b_2 + \dots\dots + y_m b_m \neq 0$$

Em termos matriciais: se existir $\underline{y}$ tal que

$$e \left.\begin{array}{l} \underline{y}\, A = \underline{0} \\ \\ \underline{y}\, \underline{b} \neq 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \text{INCONSISTÊNCIA}$$

⇒ **Determinar se há equações redundantes e apontá-las para eliminação**

$$(y_1 ,\ y_2 , ... , y_m) \neq \underline{0} \ \text{ tal que}$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{y}\,A = \underline{0} \\ \text{e} \\ \underline{y}\,\underline{b} = 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \quad \text{REDUNDÂNCIA}$$

Eliminação: uma das linhas $\underline{A}_i\ \underline{x} = b_i$

tal que $y_i \neq 0$

EXEMPLO

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 8 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 16 & 2 & 2 & -3 \\ 9 & 4 & 6 & 30 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & 4 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ X_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &1.\,\underline{A}_1 + 1.\,\underline{A}_2 + 1.\,\underline{A}_3 + (-1).\,\underline{A}_4 + 0.\,\underline{A}_5 = 0 \\ &1.\,b_1 + 1.\,b_2 + 1.\,b_3 + (-1).\,b_4 + 0.\,b_5 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \textbf{REDUNDÂNCIA}$$

$$\left.\begin{aligned} &2.\,\underline{A}_1 + 1.\,\underline{A}_2 + (-1).\,\underline{A}_3 + 0.\,\underline{A}_4 + (-1).\,\underline{A}_5 = 0 \\ &2.\,b_1 + 1.\,b_2 + (-1).\,b_3 + 0.\,b_4 + (-1).\,b_5 \neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \textbf{INCONSISTÊNCIA}$$

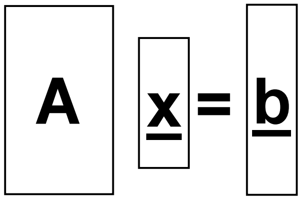
⇨ **Garantida a consistência e eliminadas as redundâncias resta obter SOLUÇÕES do sistema.**

Isto significa determinar valores de $\underline{x} = \underline{x}^*$ tais que:

$$A\,\underline{x}^* = \underline{b}$$

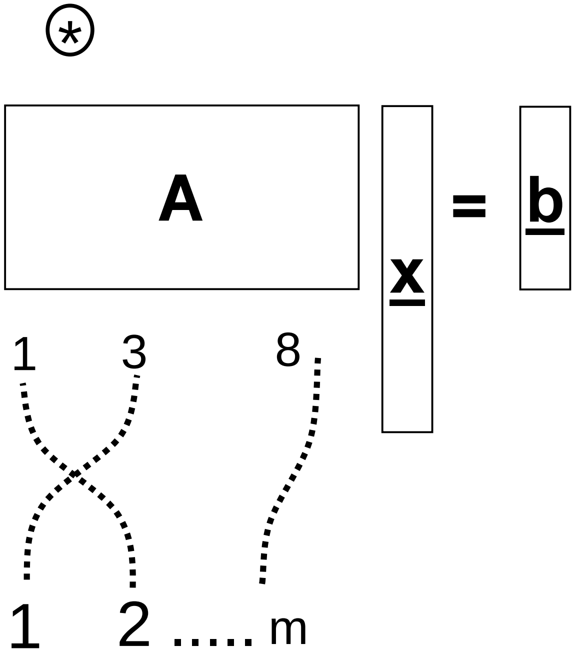
Analisando 3 casos

⊛



<u>Matriz “em pé”</u>

ou contém REDUNDÂNCIAS
ou é INCONSISTENTE
ou as duas coisas

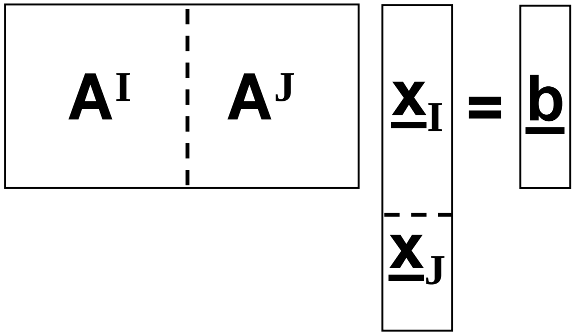


Matriz “deitada”

na ausência de INCONSISTÊNCIAS
e eliminadas as REDUNDÂNCIAS
tem uma infinidade de soluções

$I= \{3, 1, 8\}$

$I \oplus J = \{1, 2, \ldots\ . n\}$



$$A^{\mathbf{I}}\, \underline{x}_I + A^J\, \underline{x}_J = \underline{b}$$

$$\underline{x}_I = (A^{\mathbf{I}})^{-1} \{ \underline{b} - A^J\, \underline{x}_J \}$$

$$\underline{x}_{\mathrm{I}} = (A^{\mathrm{I}})^{-1} \{ \underline{b} - A^{\mathrm{J}} \underline{x}_{\mathrm{J}} \}$$

VARIÁVEIS DEPENDENTES

VARIÁVEIS INDEPENDENTES

Fala-se de infinitas soluções pois:

- **Há C_n^m maneiras de escolher o conjunto I**
- **Para cada conjunto I existem (n-m) variáveis independentes que podem, cada uma delas, ser arbitradas em qualquer valor (de - ∞ a + ∞). Existem assim (n-m) graus de liberdade.**

EXEMPLO:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 8 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 16 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A \, \underline{x} = \underline{b}$$

$$\mathrm{I} = \{ 6, 1, 4 \}$$

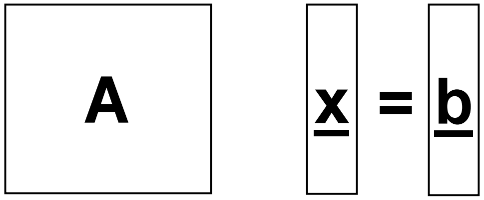
$$\mathrm{J} = \{ 2, 3, 5, 7 \}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_6 \\ x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A^I \underline{x}_I + A^J \underline{x}_J = \underline{b}$$

obs: é importante que A^I seja inversível, isto é: uma base.

⊛



<u>Matriz “quadrada”</u>

ou é INCONSISTENTE → nada a fazer

ou é REDUNDANTE → após eliminação cai no caso anterior

Na ausência de inconsistência e redundância, existe uma única solução

Resumindo: RESOLVER $A\ \underline{x} = \underline{b}$ corresponde a:

- **Determinar INCONSISTÊNCIA**
- **Detectar REDUNDÂNCIAS e eliminá-las**
- **Determinar SOLUÇÕES para o sistema**

⇨ **Vejamos mais detalhadamente a solução de um sistema algébrico linear:**

Sejam os vetores:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}6\\8\\16\end{pmatrix}}_{\text{é uma } \underline{\text{base}} \text{ no } R^3} \quad \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$$

São vetores LINEARMENTE INDEPENDENTES, capazes de gerar todo R^3

Neste caso, podemos afirmar que existem x_6, x_1, x_4, tais que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_6 + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} x_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_6 \\ x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_6 \\ x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 16 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Esta inversão é trabalhosa

1º MÉTODO:

cofator, adjunto, determinante

2º MÉTODO:

eliminação de GAUSS – JORDAN
(o popular PIVOTEAMENTO)

É obtido através de operações elementares com as linhas, o que não altera o sistema.

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_6 \\ x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_6 \\ x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ --2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \textcircled{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_6 \\ x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_6 \\ x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Checando:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} . 8 + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} .(-1) + \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} .(-1/2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$2^{\underline{0}}$ MÉTODO:

Decomposição LU

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \# & 1 & 0 \\ \# & \# & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & \# & \# \\ 0 & \# & \# \\ 0 & 0 & \# \end{pmatrix}}_{A = LU} \underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \underline{x}}^{\underline{y}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} y_1 = \ \ 3 \\ y_2 = -\ 2 \\ y_3 = -\ 2 \end{array}$$

Resolvendo agora em $\underline{x}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_6 \\ X_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} X_4 \ = -1/2 \\ X_1 = -\ 1 \\ X_6 = \ \ 8 \end{array}$$

Este 3º método é muito eficiente.
Trabalharemos entretanto com o 2º método por ser

- **mais conhecido**
- **clássico em diversas apresentações de aspectos conceituais da P.L.**

⇒ **Tomemos agora a matriz aumentada $\underline{x}$**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} \textcircled{1} & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 8 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Pivoteando

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Esta operação é equivalente a pré-multiplicar a matriz aumentada por

$$P\,(1,\,6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Continuando os pivoteamentos temos

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc:c} 1 & 0 & 2 & 3 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \textcircled{4} & -2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \quad P\,(2,\,1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e finalmente

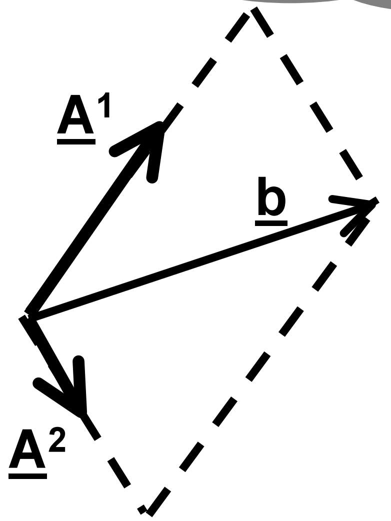
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -2 & -1/2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/4 & -1/2 \end{array}\right) \longrightarrow P\,(3,\,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Resumindo

$$P\,(3,\,4).\ P(2,\,1).\ P(1,\,6)\ \left[\begin{array}{c|c|c} A^{I} & 1 & \underline{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & (A^{I})^{-1} & \underline{\hat{b}} \end{array}\right]$$

VISÃO GEOMÉTRICA: SOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

DUAS DIMENSÕES



$$A\ \underline{x} = \underline{b}$$

$$(\underline{A}^1\ \underline{A}^2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 2\\4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$$

pesos

$$\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}x_2=\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$$

SOLUÇÃO:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\4 & -2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/6 & 1/6\\1/3 & --1/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/2\\2\end{pmatrix}$$

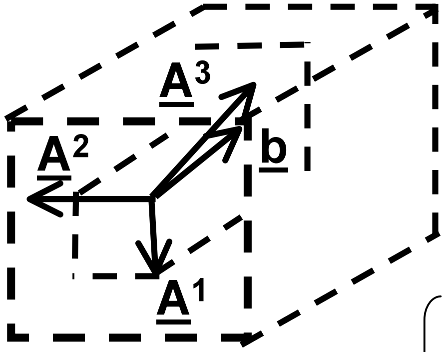
CASOS ESPECIAIS:

$\underline{b}$ colinear com $\underline{A}^1$ $\Rightarrow$ $X_2 = 0$

$\underline{A}^1$ colinear com $\underline{A}^2$ $\Rightarrow$ não consegue gerar o R^2

TRÊS DIMENSÕES

$$A\ \underline{x} = \underline{b} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$



$$\underline{A}^1\, x_1 + \underline{A}^2\, x_2 + \underline{A}^3\, x_3 = \underline{b}$$

pesos

SOLUÇÃO:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

CASOS ESPECIAIS:

$\underline{b}$ no sub-espaço (plano) definido por $\underline{A}^1\ \underline{A}^2$ ⇨ $x^3 = 0$

A^1 no sub-espaço (plano) definido por $\underline{A}^2\ \underline{A}^3$ ⇨ não gera R^3

* Significado geométrico da matriz inversa

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 16 \end{pmatrix}}_{A} \underset{=}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{1}}$$

$$\begin{bmatrix} \longleftarrow \upsilon_1 \longrightarrow \\ \longleftarrow \upsilon_2 \longrightarrow \\ \longleftarrow \upsilon_3 \longrightarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Os vetores υ_i e ω_i são ortonormais (e ordenados)

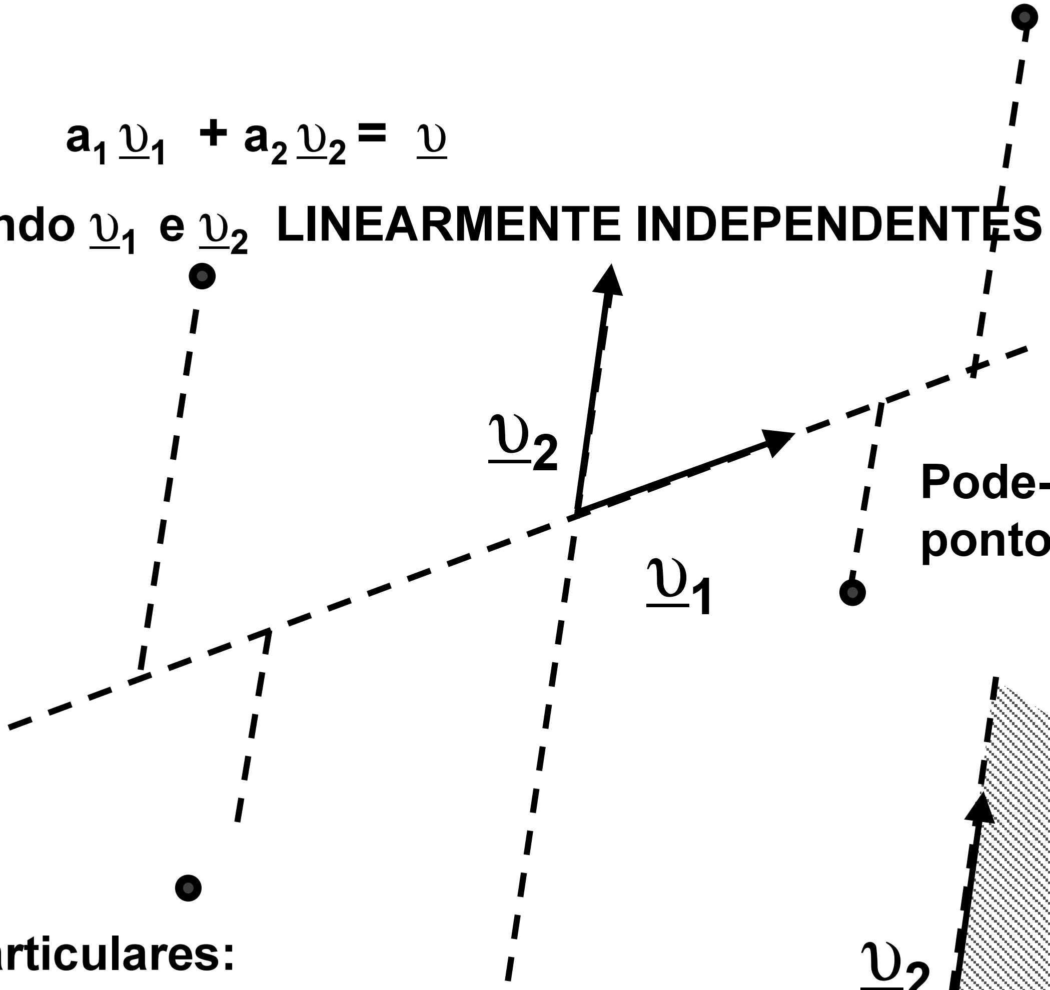
se fossem só ortogonais (e não ortonormais) $\longrightarrow$ $$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e se não fossem ordenados $\longrightarrow$ $$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

* COMBINAÇÃO LINEAR DE VETORES

$$a_1 \underline{\upsilon}_1 + a_2 \underline{\upsilon}_2 = \underline{\upsilon}$$

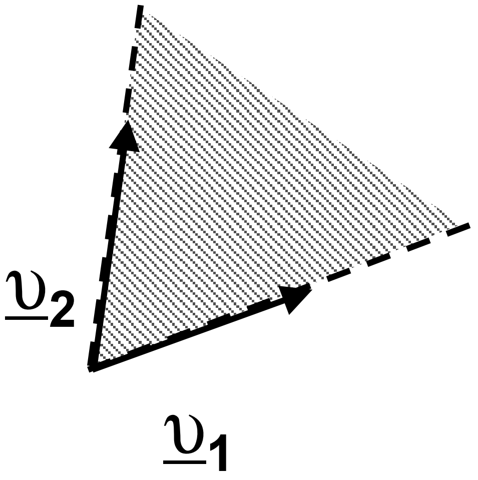
supondo $\underline{\upsilon}_1$ e $\underline{\upsilon}_2$ LINEARMENTE INDEPENDENTES



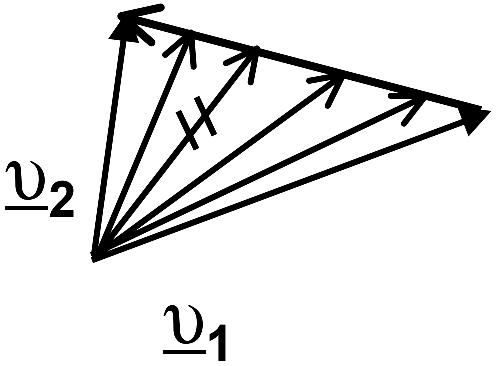
Pode-se alcançar qualquer ponto do plano.

Dois casos particulares:

⇨ Se $a_1 \geq 0$ e $a_2 \geq 0$ geramos um cone situado ente os dois vetores



Se $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$ e além disso $a_1 + a_2 = 1$ geramos um ponto do segmento de reta entre $\underline{\upsilon}_1$ e $\underline{\upsilon}_2$.



$$\underline{\upsilon} = \underline{\upsilon}_1 + k\,(\,\underline{\upsilon}_2 - \underline{\upsilon}_1)$$

$$1 \geq k \geq 0$$

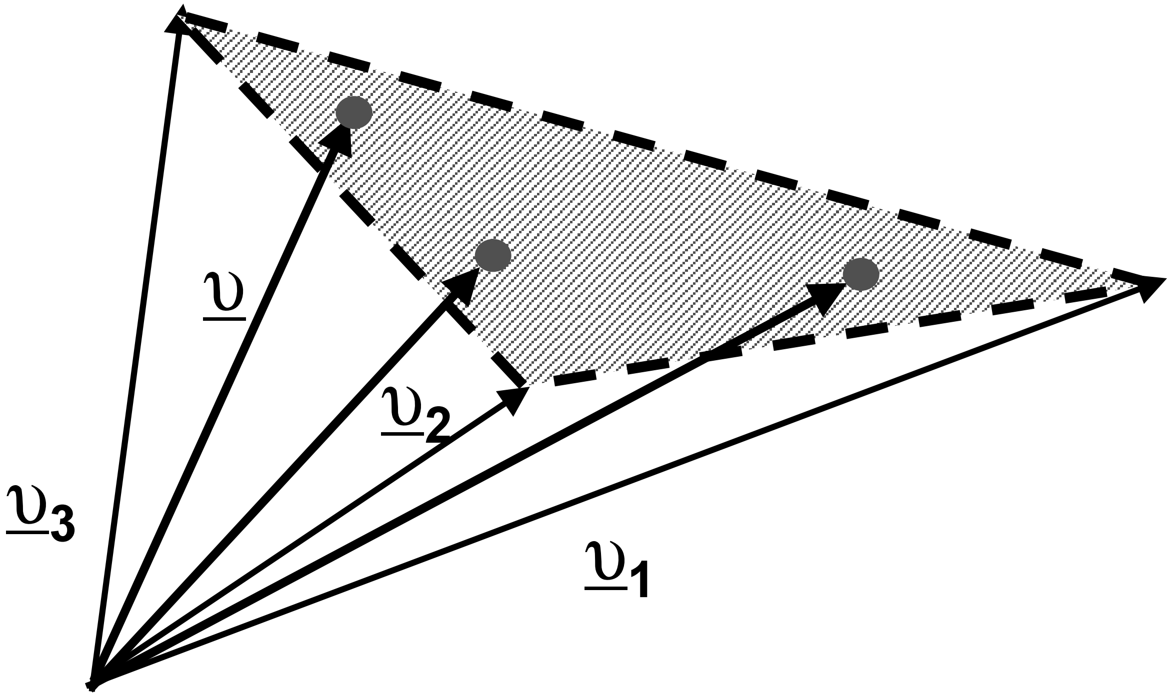
$$\underline{\upsilon} = (\,1 - k\,)\,\underline{\upsilon}_1 + k\;\underline{\upsilon}_2$$

$$\underline{\upsilon} = a_1\,\underline{\upsilon}_1 + a_2\,\underline{\upsilon}_2$$

$$0 \leq a_1, a_2 \leq 1 \qquad a_1 + a_2 = 1$$

É a Chamada COMBINAÇÃO CONVEXA

No caso de 3 vetores L.I. temos:

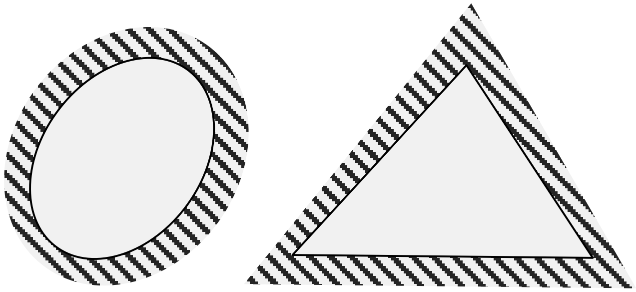


$$\underline{\upsilon} = a_1 \underline{\upsilon}_1 + a_2 \underline{\upsilon}_2 + a_3 \underline{\upsilon}_3$$

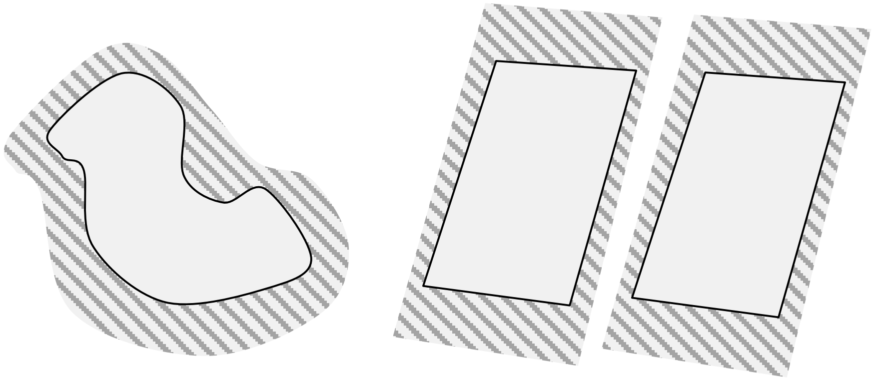
$$0 \leq a_1, a_2, a_3 \leq 1 \quad \text{e} \quad a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

NOÇÕES DE CONVEXIDADE

Conjuntos convexos



Conjuntos não-convexos



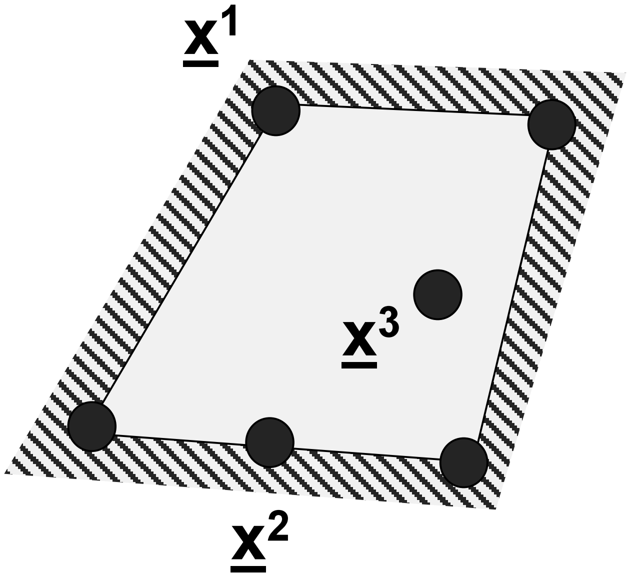
Conjunto convexo (S)

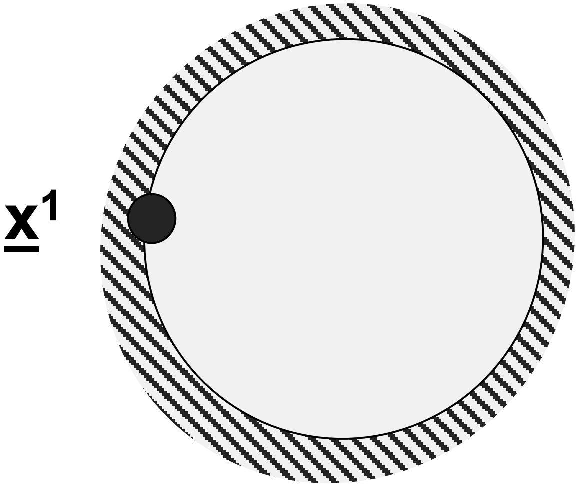
- **Segmento ligando quaisquer dois de seus pontos pertence ao conjunto**
- $\forall\ \underline{x}_1 \in S, \qquad \forall\ \underline{x}_2 \in S, \qquad \underline{x} = \alpha\, \underline{x}_1 + (1-\alpha)\, \underline{x}_2, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1$

$$\Rightarrow \quad \underline{x} \in S$$

PONTO EXTREMO

- **x é ponto extremo de um conjunto convexo S se não puder ser representado como combinação convexa estrita de pontos distintos de S**

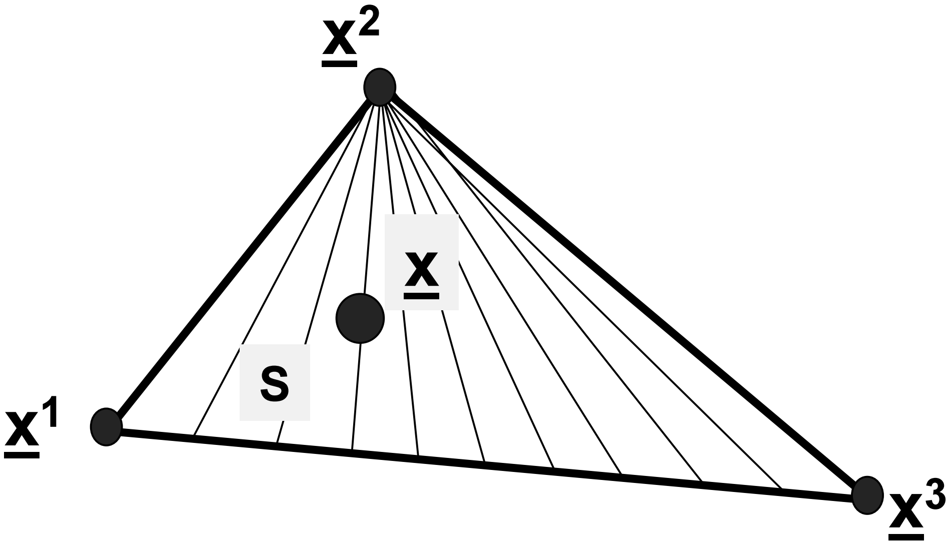




$\underline{x}^1$ ⇨ ponto extremo

$\underline{x}^2$ $\underline{x}^3$ ⇨ não

- **Qualquer ponto do conjunto convexo S pode ser representado como combinação convexa de seus pontos extremos.**



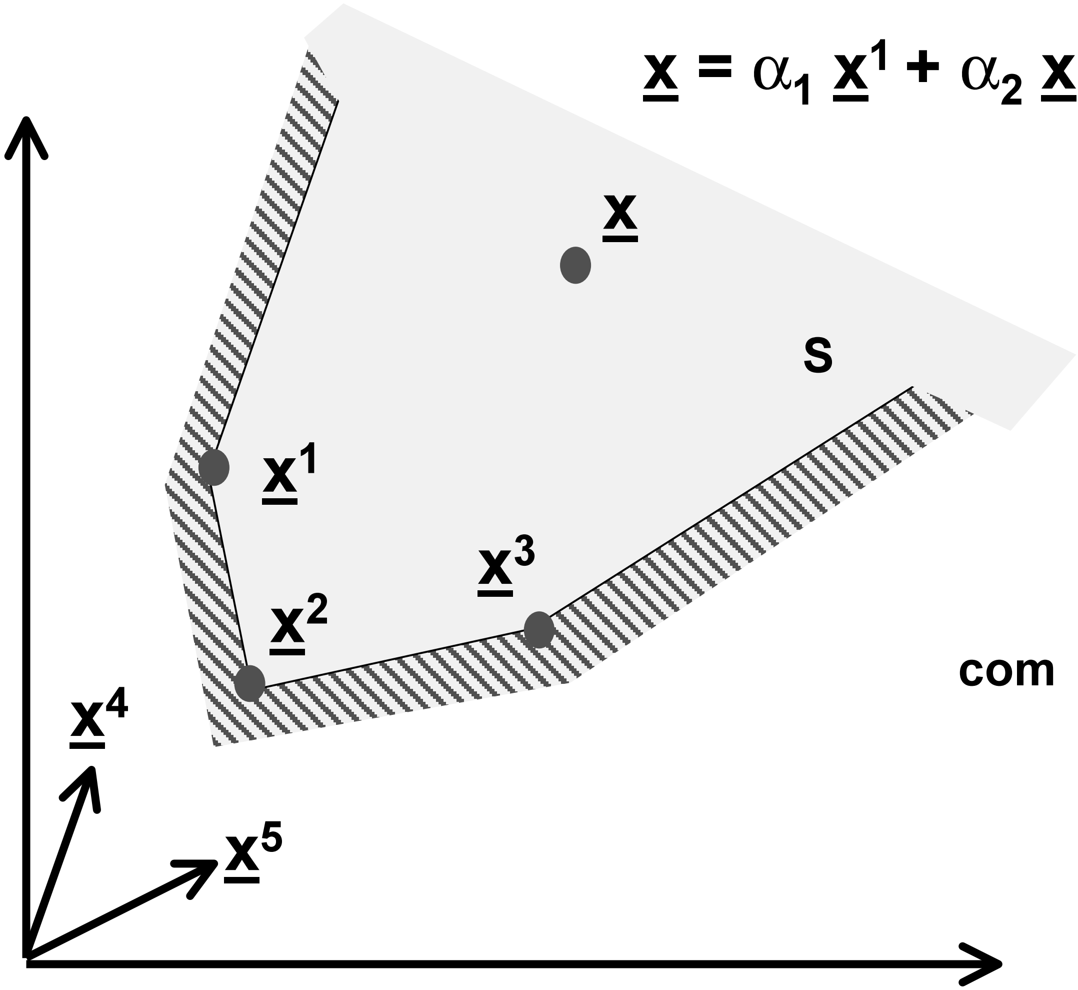
$$\underline{x} = \alpha_1\ \underline{x}_1 + \alpha_2\ \underline{x}_2 + \alpha_3\ \underline{x}_3$$

com

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

- **Se S for ilimitado** ⇨ **precisa o auxilio dos <u>RAIOS EXTREMOS.</u>**



$$\underline{x} = \alpha_1 \, \underline{x}^1 + \alpha_2 \, \underline{x}^2 + \alpha_3 \, \underline{x}^3 + \alpha_4 \, \underline{x}^4 + \alpha_5 \, \underline{x}^5$$

com

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \geq 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

• POLIEDROS CONVEXOS

$\underline{A}_i \; \underline{x} = b_i$ é um hiperplano

$\underline{A}_j \, \underline{x} \leq b_j$ é um semi-espaço

Semi-espaços e hiperplanos são conjuntos convexos.
A interseção de semi-espaços e hiperplanos é um poliedro.

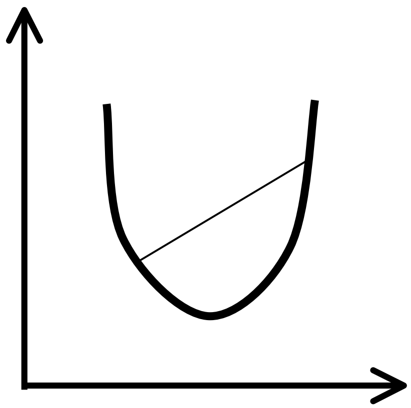
A interseção de conjuntos convexos é convexa.

CONCLUSÃO: O conjunto de soluções factíveis do P.L.

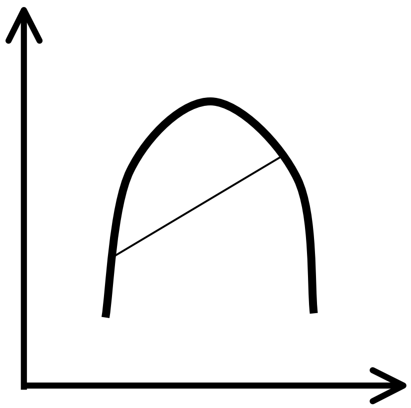
$$\begin{array}{ll} \text{(MAX)} & \underline{z} = \underline{c}\ \underline{x} \\ \text{s.a.} & \underline{A}_i\ \underline{x} = b_i \\ & \underline{A}_j\ \underline{x} \ \underline{\leq}\ b_j \\ & \underline{x}\ \underline{\geq}\ \underline{0} \end{array}$$

é um POLIEDRO CONVEXO

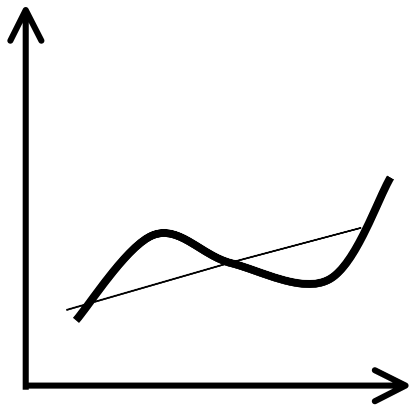
*** FUNÇÕES**



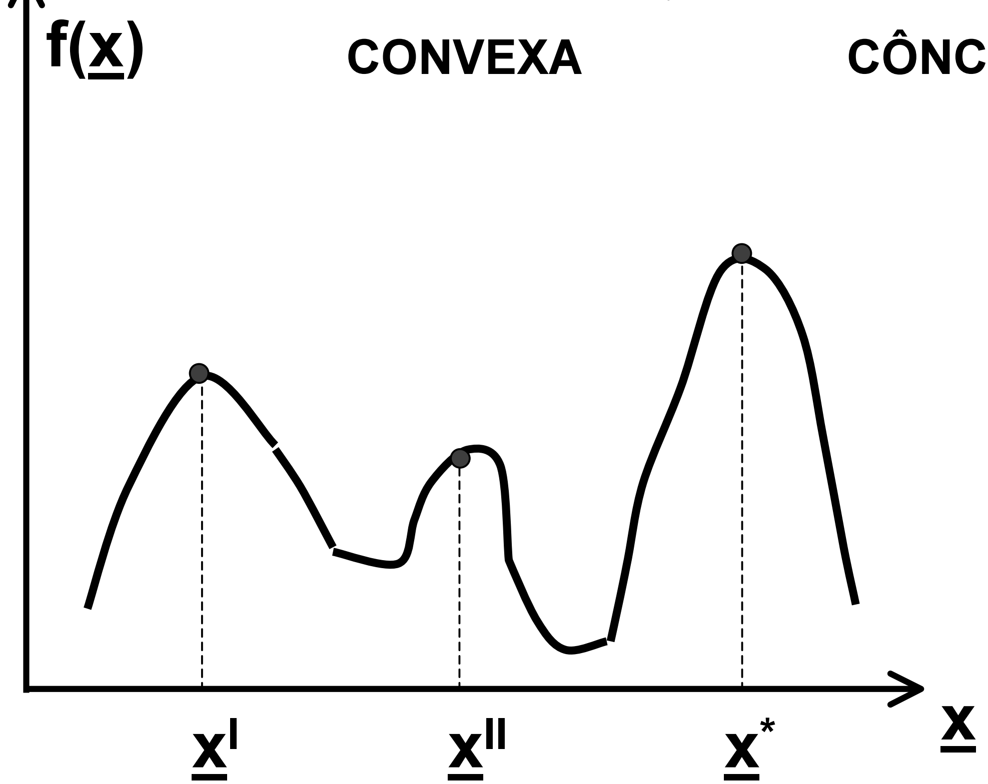
CONVEXA



CÔNCAVA



QUALQUER

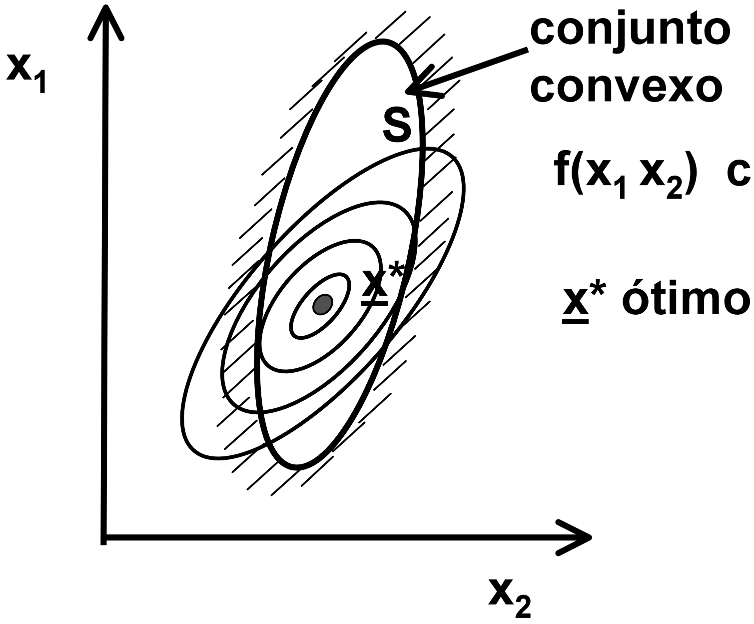


$\underline{x}^{I}, \underline{x}^{II}$ ⇨ **ótimos locais**

$\underline{x}^{*}$ ⇨ **ótimo global**

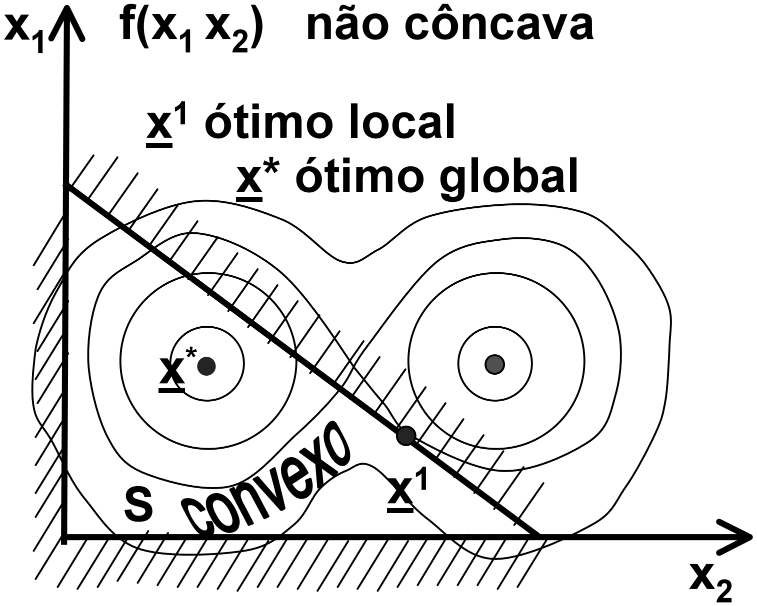
- O problema de achar o máximo (ou mínimo) de uma função côncava (convexa) sobre o conjunto convexo é um <u>**PROGRAMA CONVEXO**</u>.

- Para um programa convexo um máximo local é um máximo global.



$f(x_1\ x_2)$ côncava

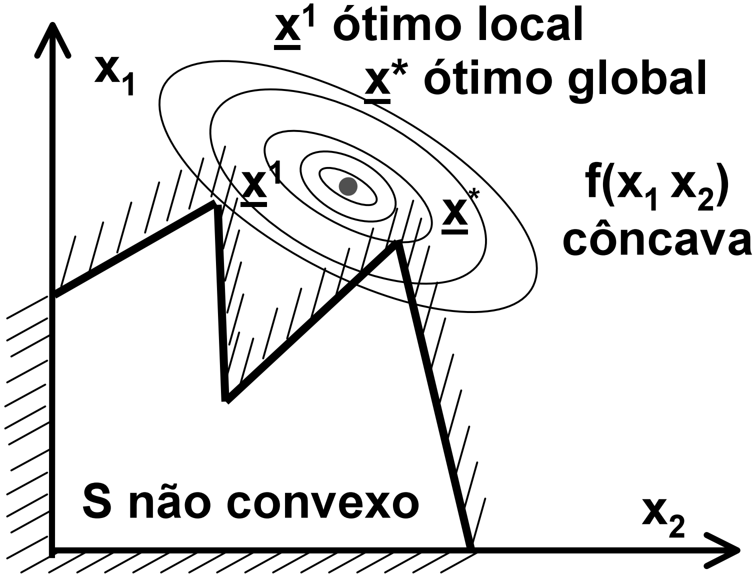
$\underline{x}^*$ ótimo global



$f(x_1\ x_2)$ não côncava

$\underline{x}^1$ ótimo local

$\underline{x}^*$ ótimo global


$\underline{x}^1$ ótimo local
$\underline{x}^*$ ótimo global
x_1
$\underline{x}^1$
$\underline{x}^*$
$f(x_1\ x_2)$
côncava
S não convexo
x_2

<u>APRESENTAÇÃO DE UM PROBLEMA LINEAR</u>

Um P.L. genérico pode ser:

$$
\left\{
\begin{array}{llll}
\text{(MAX)} & Z = & \underline{c}\,\underline{x} & \\
\text{s.a.} & \underline{A}_i & \underline{x} & \leq b_i \\
 & \underline{A}_j & \underline{x} & \geq b_j \\
 & \underline{A}_e & \underline{x} & = b_e \\
 & & \underline{x} & \geq 0
\end{array}
\right.
$$

A <u>forma padrão</u> do P.L. acima é:

$$
\left\{
\begin{array}{lllll}
\text{(MAX)} & Z = & \underline{c}\,\underline{x} & & \\
\text{s.a.} & \underline{A}_i & \underline{x} & +\upsilon_i & = b_i \\
 & \underline{A}_j & \underline{x} & -\upsilon_j & = b_j \\
 & \underline{A}_e & \underline{x} & & = b_e \\
 & \multicolumn{4}{l}{\underline{x} \geq \underline{0},\ \upsilon_i \geq 0,\ \upsilon_j \geq 0}
\end{array}
\right.
$$

υ_i ⇨ **variável de <u>FOLGA</u>**

υ_j ⇨ **variável de <u>EXCESSO</u>**

* Caso existam variáveis irrestritas

$$x_j \text{ Irrestrita em sinal } \Rightarrow \begin{cases} x_j = x_j^{I} - x_j^{II} \\ x_j^{I} \geq 0, \; x_j^{II} \geq 0 \end{cases}$$

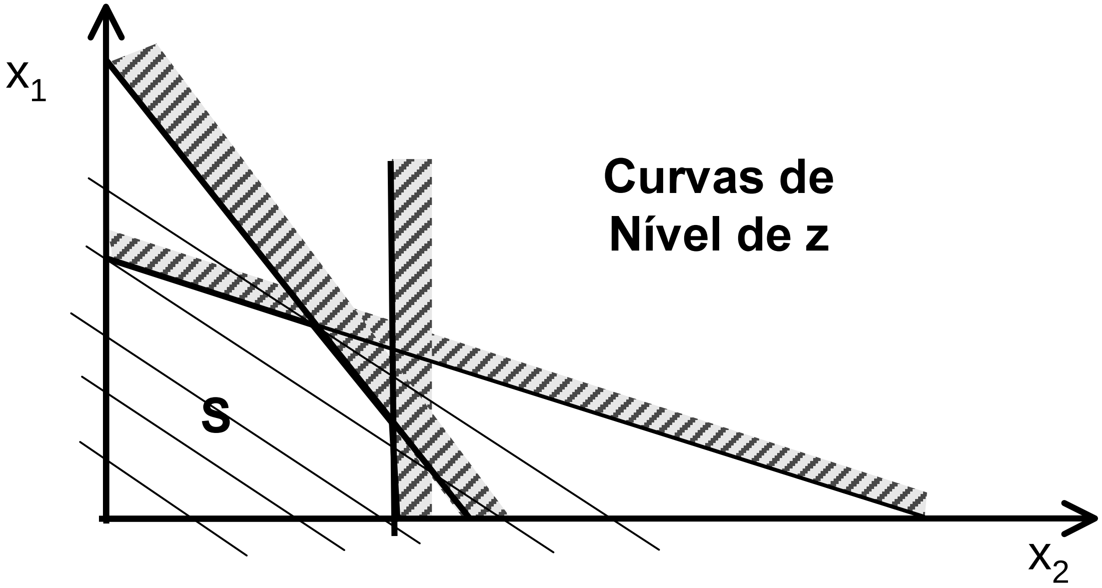
<u>FORMA PADRÃO DE UM PROBLEMA LINEAR</u>

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{(MAX)} & z = & \underline{c}\,\underline{x} \\ \text{s.a.} & A\,\underline{x} = & \underline{b} \\ & \underline{x} \geq & \underline{0} \end{array}}$$

- O método de solução de um P. L. exige que ele esteja na FORMA PADRÃO
- A forma com desigualdade auxilia a visão geométrica
- Analogamente

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{(MAX)} & z = & \underline{c}\,\underline{x} \\ \text{s.a.} & A\,\underline{x} = & \underline{b} \\ & \underline{x} \geq & \underline{0} \end{array}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{lll} \text{(MAX)} & z = & \underline{c}\,\underline{x} \\ \text{s.a.} & A\,\underline{x} \leq & \underline{b} \\ & -A\,\underline{x} \leq & -\underline{b} \\ & \underline{x} \geq & 0 \end{array}}$$

UM PROGRAMA LINEAR P.L. É UM PROGRAMA CONVEXO



SOLUÇÃO ÓTIMA FINITA DO P.L.É UM PONTO EXTREMO

Sejam $\underline{x}_1, \underline{x}_2, ..., \underline{x}_k$ os pontos extremos de S. Portanto qualquer ponto de S pode ser representado como combinação convexa deles

$$\underline{x} = \alpha_1 \underline{x}_1 + \alpha_2 \underline{x}_2 + ... + \alpha_k \underline{x}_k \text{ com } \alpha_i \geq 0 \qquad i = 1,k$$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$$

Achar a solução $\underline{x}^*$ que maximiza z é achar

$$z = \underline{c}\ \underline{x} = \alpha_1 (\underline{c}_1\ \underline{x}_1) + \alpha_2 (\underline{c}_2\ \underline{x}_2) + \ldots + \alpha_k (\underline{c}_k\ \underline{x}_k)$$

$$\underline{c}\ \underline{x}p = \max_{i = 1, 2, \ldots, k} \{\underline{c}_i\ \underline{x}_i\}$$

fazendo $\alpha_p = 1$ e demais $\alpha_i = 1$ ⇨ $\underline{x}^* = \underline{x}_p$ $\left(\text{Ponto extremo de S}\right)$

CONCLUSÃO: Se existir uma solução ótima (finita) dp P.L.

$$\begin{array}{lccc} \text{(MAX)} & z & = & \underline{c}\ \underline{x} \\ & & & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} A\,\underline{x} & = & \underline{b} \\ \underline{x} & \underline{\geq} & \underline{0} \end{array}\right\} S$$

Então existe um ponto extremo do conjunto de soluções factíveis S que é ótimo

CONSEQUÊNCIA IMPORTANTE:

o conjunto das soluções candidatas a ótimo de um P.L. fica restrito a um número finito de pontos (os pontos extremos de S).

Solução Básica de um P. L.

Seja o P. L.

$$\begin{array}{ll} (\text{MAX}) & z = \underline{c}\;\underline{x} \\ \text{s.a.} & \left.\begin{array}{rcl} A\,\underline{x} & = & \underline{b} \\ \underline{x} & \underline{\geq} & \underline{0} \end{array}\right\} S \end{array}$$

com A (m x n) , n > m . Tomando m vetores-coluna linearmente independentes de A (ou seja, uma base)

$$A^{I}\,\underline{x}_{I} + A^{J}\,\underline{x}_{J} = \underline{b}$$

$$\underline{x}_{I} = (A^{I})^{-1}\,\underline{b} - (A^{I})^{-1}\,A^{J}\,\underline{x}_{J}$$

$$\underline{x}_I = (A^I)^{-1}\,\underline{b} - (A^I)^{-1}A^J\,\underline{x}_J$$

Solução Básica

$$\underline{x}_J = 0$$
$$\underline{x}_I = (A^I)^{-1}\,\underline{b}$$

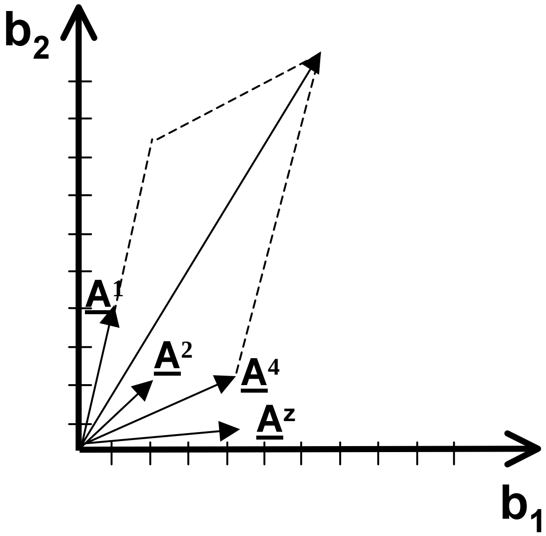
Se além disso, $\underline{x}_I \geq \underline{0}$ temos uma solução básica factível do P.L.

Exemplo: Min $\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4$

s.a.

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 6$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 10$$

$$x_1 \geq 0$$



$$A^I\,\underline{x}_I + A^J\,\underline{x}_J = \underline{b}$$
$$I = \{\,1.\ 4\}$$

Solução básica:

$$\underline{x}_J = 0$$

$$\underline{x}_I = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Importante : A solução básica referente à base I é única.

SOLUÇÃO BÁSICA BÁSICA FACTÍVEL DE UM P. L. É UM PONTO EXTREMO DO CONJUNTO DE SOLUÇÕES FACTÍVEIS (S).

Seja $I = \{ 1, 2, . . ., m \}$ uma base

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}_n \underline{>} = \underline{0} \Rightarrow \text{ solução básica factível}$$

Por absurdo, supor que $\underline{x}$ não é um ponto extremo de S.
Então, existe $\underline{\mu} \, \varepsilon \, S$ e $\underline{\nu} \, \varepsilon \, S$, $\underline{\mu} \neq \underline{\nu}$ tal que $\underline{x}$ possa ser representado como combinação convexa de $\underline{\mu}$ e $\underline{\nu}$.

$\underline{x} = \alpha\, \underline{\mu} + (1- \alpha)\, \underline{\nu}$ $\qquad 0 < \alpha < 1$

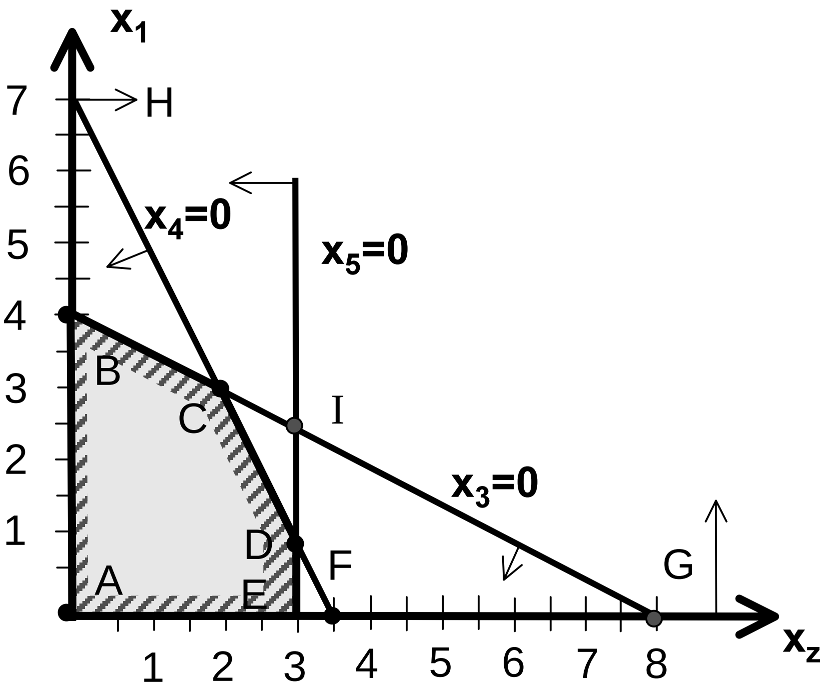
ou

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_n = \alpha \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \\ \mu_{m+1} \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} + (1- \alpha) \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_m \\ \nu_{m+1} \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix}$$

Como $\underline{\mu} \geq \underline{0}$ e $\underline{\nu} \geq \underline{0}$ e $0 < \alpha < 1$ ⇒ $\mu_i = \nu_i = 0 \;\forall\, i \notin I$ e pela unicidade da solução básica

$\underline{x} = \underline{\mu} = \underline{\nu}$ ⇒ $\underline{x}$ é ponto extremo de S

SOLUÇÃO BÁSICA BÁSICA FACTÍVEL É PONTO EXTREMO DE S.



Forma Padrão

(MAX) $z = x_1 + x_2$

$$\text{s a} \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad\quad &= 8 \\ x_1 + x_2 \quad\quad + x_4 \quad &= 7 \\ x_2 \quad\quad + x_5 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

$I_A = \{ 3, 4, 5 \}$

$J_A = \{ 1, 2 \}$

⇒ $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ⇒ $x_3 = 8$, $x_4 = 7$, $x_5 = 3$ ⇒ **Solução Básica Factível**

Ponto extremo A

$I_B = \{ 1, 4, 5 \}$

$J_B = \{ 3, 2 \}$

⇒ $x_3 = 0$, $x_2 = 0$ ⇒ $x_1 = 4$, $x_4 = 3$, $x_5 = 3$ ⇒ **Solução Básica Factível**

Ponto extremo B

$I_C = \{ 1, 2, 5 \}$

$J_C = \{ 3, 4 \}$

⇒ $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ ⇒ $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_5 =$ ⇒ **Solução Básica Factível**

Ponto extremo C

$I_D = \{ 1, 2, 3 \}$

$J_D = \{ 5, 4 \}$

⇒ $x_5 = 0$, $x_4 = 0$ ⇒ $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3$ ⇒ **Solução Básica Factível**

Ponto extremo D

$I_E = \{ 4, 2, 3 \}$

$J_E = \{ 5, 1 \}$

⇒ $x_5 = 0$, $x_1 = 0$ ⇒ $x_4 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$ ⇒ **Solução Básica Factível**

Ponto extremo E

Se $I_F = \{ 5, 2, 3 \}$, $J_F = \{ 4, 1 \}$

$$\begin{matrix} x_4 = 0 \\ x_1 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_5 = 1/2 \\ x_2 = 7/2 \\ x_3 = 9/2 \end{matrix} \Rightarrow$$

Solução Básica
Infactível

Ponto F

OBSERVAÇÃO:

$$A\,\underline{x} = \underline{b} \qquad\qquad A\,(\,m_x n\,)$$

- número de soluções básicas: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\,(\,n - m)!} = \dfrac{5!}{3!\;2!} = 10$

- na figura há 9 soluções básicas $\left\{ \begin{matrix} \text{5 FACTÍVEIS} \\ \text{(Pontos Extremos)} \\ \\ \text{4 INFACTÍVEIS} \end{matrix} \right.$

UM MÉTODO (SIMPLISTA) PARA RESOLVER UM P.L.

1/ Listar todas as soluções básicas factíveis do P. L.
2/ Avaliar a função objetivo sobre elas e escolher a de maior valor.

Desvantagens desse método exaustivo:

1/ C_n^m pode ser muito grande
2/ solução ilimitada
3/ P.L. inconsistente

Método mais inteligente → **SIMPLEX**

FORMA PREPARADA DE UM P.L.

Seja o P.L.

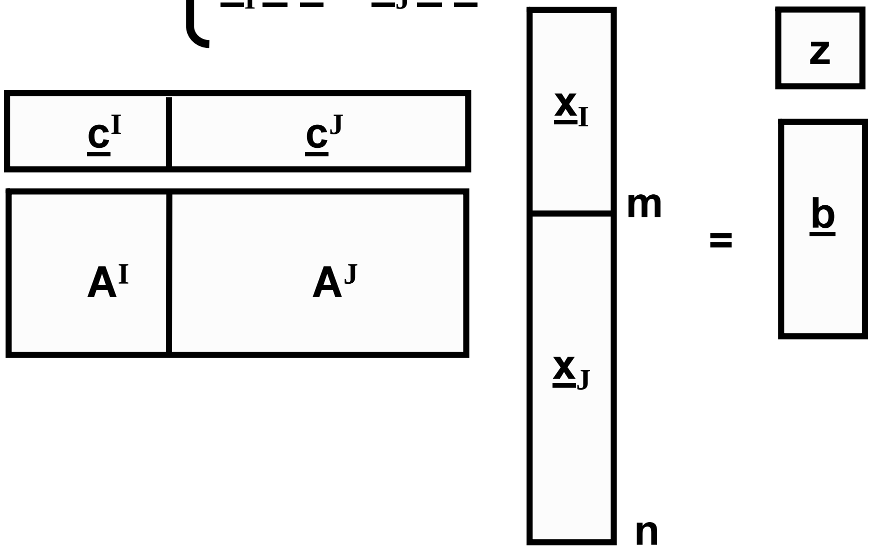
$$\boxed{\begin{array}{rr} \text{(MAX)} & z = \underline{c}\ \underline{x} \\ \text{s.a} & A\underline{x} = \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \end{array}}$$

A (m . n), n $\geq$ m, e por hipótese o sistema A $\underline{x}$ = $\underline{b}$ é não degenerado, não redundante e não inconsistente.

Seja uma base qualquer factível I

FORMA PADRÃO

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{c}^{I}\ \underline{x}_{I} + \underline{c}^{J}\ \underline{x}_{J} = z\ \text{(MAX)} \\ A^{I}\ \underline{x}_{I} + A^{J}\ \underline{x}_{J} = \underline{b} \\ \underline{x}_{I} \geq \underline{0} \quad \underline{x}_{J} \geq \underline{0} \end{array}\right.$$



$(A^{I})^{-1} \, (A^{I} \, \underline{x}_{I} + A^{J} \, \underline{x}_{I} = \underline{b}) \quad \Longrightarrow \quad \underline{x}_{I} = (A^{I})^{-1} \, \underline{b} - (A^{I})^{-1} \, A^{J} \, \underline{x}_{I}$

substituindo na função objetivo

$\underline{c}^{I} = [(A^{I})^{-1} \, \underline{b} - (A^{I})^{-1} \, A^{J} \, \underline{x}_{J}\,] + c^{J} \, \underline{x}_{J} = z \text{ (MAX)}$

$\underline{c}^{I} = (A^{I})^{-1} \, \underline{b} + [\, c^{J} - c^{I} \, (A^{I})^{-1} \, A^{J}] \, \underline{x}_{J} = z \text{ (MAX)}$

Definindo $\pi = \underline{c}^{I} \, (A^{I})^{-1}$ e $z_{0} = \pi \, \underline{b}$ temos

$$
\text{Forma 2} \left\{
\begin{array}{l}
0 \, \underline{x}_{I} + (c^{J} - \pi \, A^{J}) \, \underline{x}_{J} \quad = z \text{ (MAX)} - z_{0} \\[2ex]
1 \, \underline{x}_{I} + \qquad (A^{I})^{-1} \, A^{J} \, \underline{x}_{J} = (A^{I})^{-1} \, \underline{b} \\[2ex]
\underline{x}_{I} \underline{\geq} \, \underline{0} \quad , \quad \underline{x}_{J} \underline{\geq} \, \underline{0}
\end{array}
\right.
$$

$$
\left[\begin{array}{c|c}
0 \; 0 \ldots\ldots 0 & \underline{c}^{J} - \pi \, A^{J} \\
\hline
\begin{matrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ldots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{matrix} & (A^{I})^{-1} \, A^{J}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
\underline{x}_{I} \\
\hline
\underline{x}_{J}
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
z - z_{0} \\
\hline
(A^{I})^{-1} \, \underline{b}
\end{array}\right]
$$

que é a FORMA PREPARADA de um P.L.

$\underline{x}_I \longrightarrow$ Variáveis Básicas

$\underline{x}_J \longrightarrow$ Variáveis não Básicas

$\hat{A}^J = (A^I)^{-1} - A^J$

$\hat{\underline{b}} = (A^I)^{-1} - \underline{b}$

$\hat{\underline{c}} = [\,0, \underline{c}^J - \pi A^J\,]$ $\Big\{$ Vetor de custo relativo a' base I

$\pi = \underline{c}^I (A^I)^{-1}$ $\Big\{$ Vetor multiplicador relativo a' base I

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{\underline{c}}^J \underline{x}_J = z\,(MAX) - z_0 \\ 1\,\underline{x}_I\,\hat{A}^J \underline{x}_I = \hat{\underline{b}} \\ \underline{x}_I \geq \underline{0} \qquad \underline{x}_J \geq \underline{0} \end{array}\right. \Longrightarrow$$

FORMA PREPARADA

$$\text{Fazendo } \underline{x}_J = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \underline{x}_I = (A^I)^{-1}\,\underline{b} \geq \underline{0} \longrightarrow \\ z = z_0 \longrightarrow \end{array}\right.$$

SOLUÇÃO BÁSICA FACTÍVEL

VALOR DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA ESTA SOLUÇÃO BÁSICA