Capítulo I:

INTRODUÇÃO: Histórico
Métodos
Aplicações

INTRODUÇÃO

1. OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS

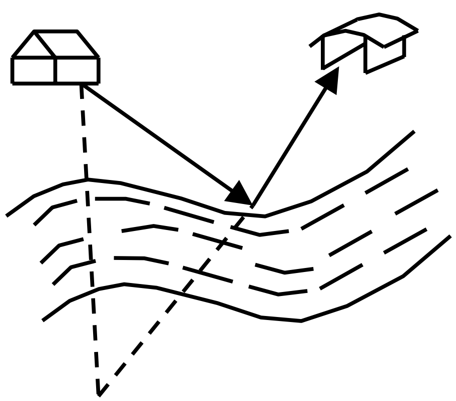
* **Tomada de decisão $\longrightarrow$ problema de otimização**

* **Problemas reais do cotidiano**

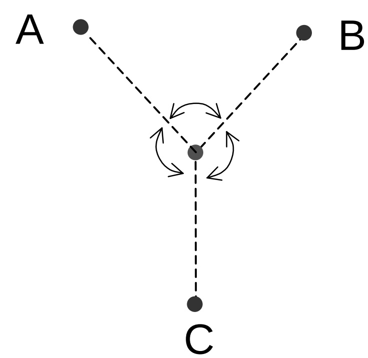
- geometria
- sem método: cada problema, uma solução

* Exemplos:

• HERON



• STEINER



Otimização (Métodos)

* Teoria dos pontos estacionários
  - cálculo diferencial

* Cálculo de variação

Século XX

crescimento populacional
industrialização
complexidade do sistema produtivo

$\Rightarrow$ Complexidade de tomada de decisão

- **II GUERRA**

  - ✓ **Modelos matemáticos para auxiliar tomada de decisões**

    ➡ **"Programar"**

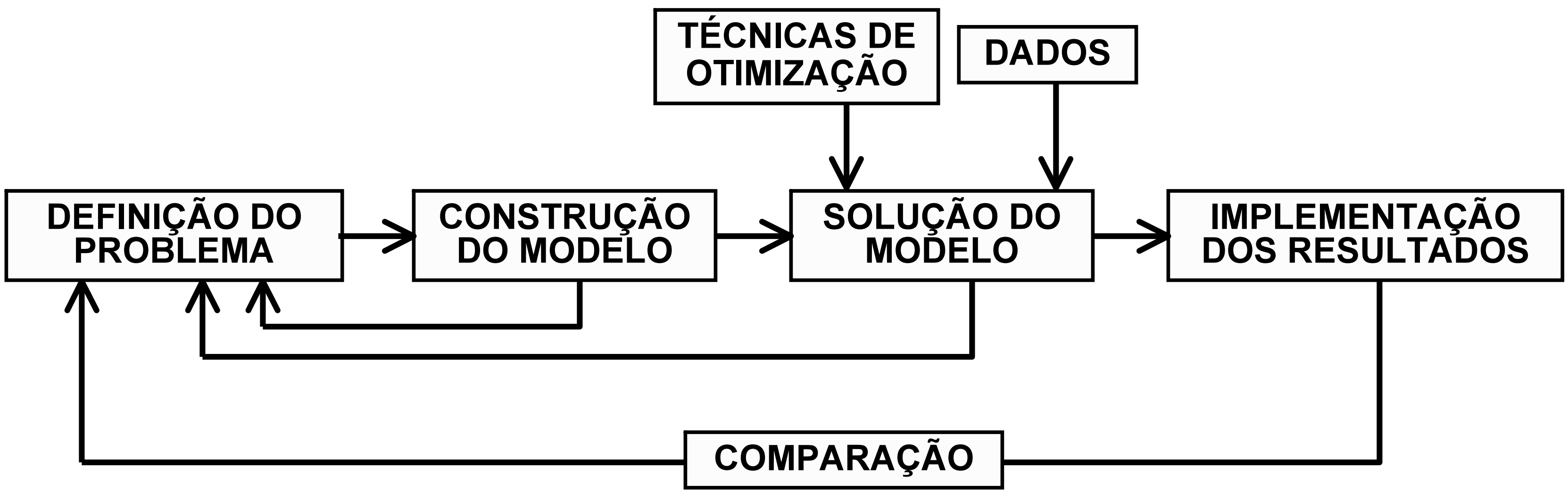
  - ✓ **Inspiração militar**
  - ✓ **Metodologia para análise de decisões** ➡ **Pesquisa Operacional**
  - ✓ **Advento do computador**

  ☞ Grande Indústria

  - ✓ Aplicação industrial da P.O. ➡ **"Management Science"**

2. PESQUISA OPERACIONAL

- **Metodologia**



* Problemas *típicos* da P.O.

- ✓ Filas
- ✓ Estoques
- ✓ Ordenação de Tarefas - PERT/CPM
- ✓ Distribuição - Transporte/Alocação
- ✓ Redes - Grafos
- ✓ Localização, etc...

* Uso da P.O.

- ✓ Operação X Planejamento

* Técnicas Usadas em P.O.

- ✓ Programação Linear
- ✓ Programação não linear
- ✓ Programação Inteira (zero-um, mista)
- ✓ Programação Dinâmica
- ✓ Programação Estocástica
- ✓ Heurística
- ✓ Simulação, etc...

Programação Matemática

3. PROGRAMAÇÃO LINEAR - HISTÓRIA

Modelagem matemática de um sistema com a finalidade de tomada de decisão:

* Modelos empíricos e teóricos de economia

- Quesnay: 1758 "*Tableau Economique*".
- Walras : 1874.
- Leontief: 1936, *Modelos de Input-Output de Interrelação Tecnológica entre Setores da Industria USA.*
- Von Newmann: 1937, *Modelos Dinâmicos de Equilíbrio Econômico*.

* O trabalho de Kantorovich

"Mathematical Methods in the Organization and Planning of Production".

* Programação Linear - Dantzig: 1947

Força Aérea.
Problemas derivados de Leontief.
Método Simplex.

4. BIBLIOGRAFIA CLÁSSICA EM PROGRAMAÇÃO LINEAR

1. BAZAARA, M; JARVIS, J. *"Linear Programming and Network Flows"*, Jojn Willey, 1977.

2. SAKAKOVITCH, M. *"Linear Programming",* Spring Verlag, 1983.

3. TAHA, H. A. *"Operations Resarch.",* 2ª edição, 1976.

4. WAGNER, H.M. *"Principles of Opertions Research",* Prentice Hall, 1969.

5. DANTZIG, G. B. *"Linear Programming and Extensions"* Princeton, 1963.

6. MACULAN, N. ; PEREIRA, M. V. F *"Programação Linear",* Atlas, 1980.

7. BORNSTEIN, C. T. ; BREGALDA, P.F.; OLIVEIRA, A. A. F. *"Introdução à Programação Linear",* Campus, 1981

8. LUENBERGER, D. G. *"Linear and Nonlinear Programming"* 2nd edition, Addison Wesley, 1984

5. EXEMPLOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO

	PRODUTOS		
MATÉRIA PRIMA	SAPATOS	BOTINAS	DISPONIBILIDADE
COURO	2	1	8
BORRACHA	1	2	7
COLA	0	1	3
LUCRO P/ UNIDADE	1	1	–

Modelo Matemático

x_1 - quantidade de sapatos fabricados

x_2 - quantidade de botinas fabricadas

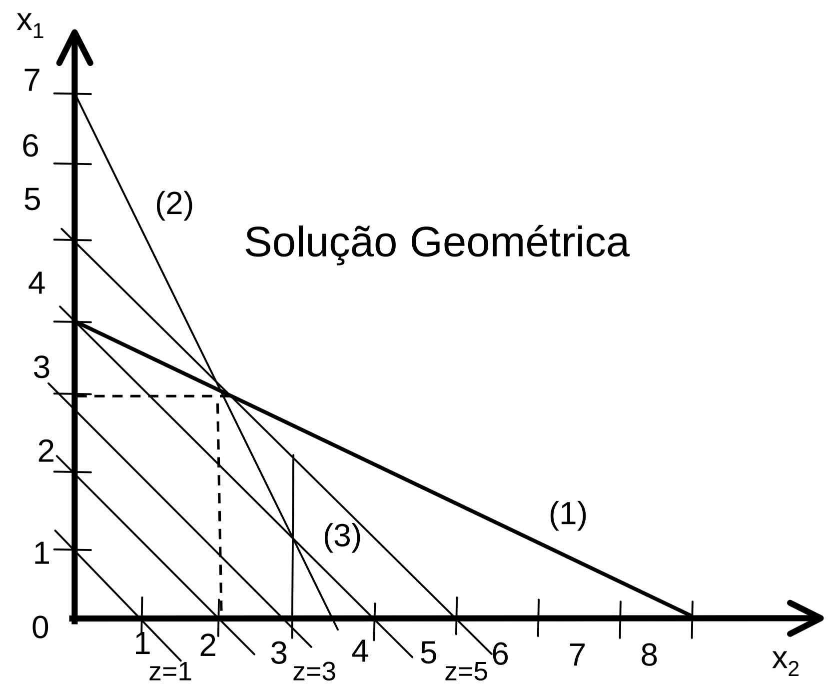
$$2\,x_1 + x_2 \leq 8 \quad (1)$$

$$x_1 + 2\,x_2 \leq 7 \quad (2)$$

$$x_2 \leq 3 \quad (3)$$

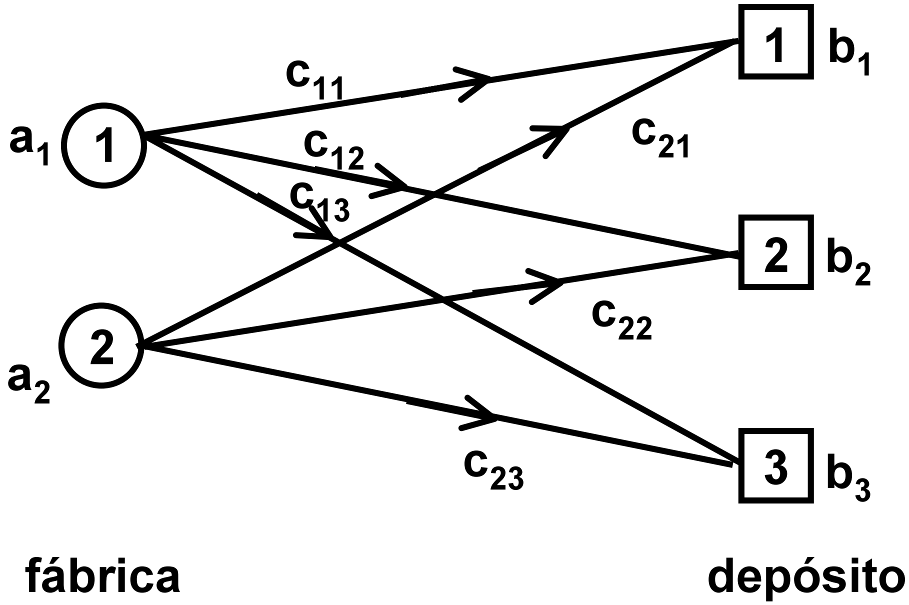
$$(\text{MAX})\ z = x_1 + x_2$$

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0$$



PROBLEMA DE TRANSPORTE

Uma empresa fabrica latas de conserva em 2 fábricas e vende através de 3 depósitos.



a_i – Capacidade de produção da fábrica i

b_j – Demanda de produtos no depósito j

c_{ij} – Custo por produto transportado da fábrica i ao depósito j

A empresa deseja saber como distribuir a produção pela rede de modo a:

1) Respeitar as capacidades produtivas de cada fábrica.

2) Respeitar as demandas de cada depósito.

3) Minimizar o custo total de transporte.

MODELO MATEMÁTICO

$$
1)\ \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq a_2 \end{cases}
$$

$$
2)\ \begin{cases} x_{11} + x_{21} \geq b_1 \\ x_{12} + x_{22} \geq b_2 \\ x_{13} + x_{23} \geq b_3 \end{cases}
$$

$$
3)\ \begin{cases} c_{11} \quad x_{11} + c_{12} \quad x_{13} + c_{21} \quad x_{21} + c_{22} \quad x_{22} + c_{23} \quad x_{23} = z\ (\text{MIN}) \end{cases}
$$

$x_{ij} \geq 0$ $\quad$ $i= 1,2$ $\quad$ e $\quad$ $j= 1,2,3$

OUTRO ENFOQUE

Surge um transportador com a seguinte proposta:

1) Transporto toda a sua mercadoria, respeitando sua capacidade de produção e as demandas.

2) Compro por π_1, π_2 reais por unidade a sua produção nas fábricas 1 e 2 e lhe vendo depois por η_1, η_2 e η_3 reais por unidade nos depósitos 1, 2 e 3.

3) Os preços eu que estipulo, mas garanto que:

$$\eta_1 - \pi_1 \leq c_{11}$$
$$\eta_2 - \pi_1 \leq c_{12}$$
$$\eta_3 - \pi_1 \leq c_{13}$$
$$\eta_1 - \pi_2 \leq c_{21}$$
$$\eta_2 - \pi_2 \leq c_{22}$$
$$\eta_3 - \pi_2 \leq c_{23}$$

e $\eta_i, \pi_j, \geq 0$

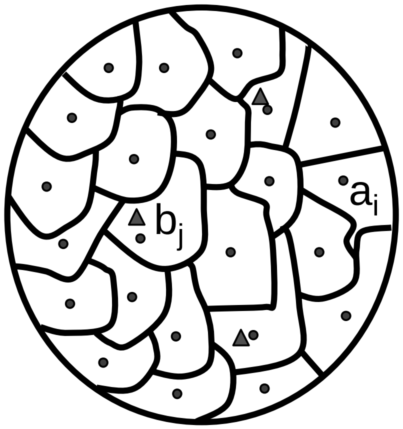
De sua parte o transportador vai procurar estabelecer os preços de modo a maximizar o seu lucro, ou seja:

$$\underbrace{b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + b_3\eta_3}_{\text{RECEITA}} - \underbrace{(a_1\,\pi_1 + a_2\,\pi_2)}_{\text{DESPESAS}} = D\ (MAX)$$

O empresário não tem porque não concordar – uma dúvida entretanto o assola:

- Será que a quantia que dispenderei transportando o produto eu mesmo é a mesma se entregar ao encargo do transportador

PROBLEMA DE TRANSPORTE:
UMA APLICAÇÃO AO PLANEJAMENTO DE REDES DE TELECOMUNICAÇÃO



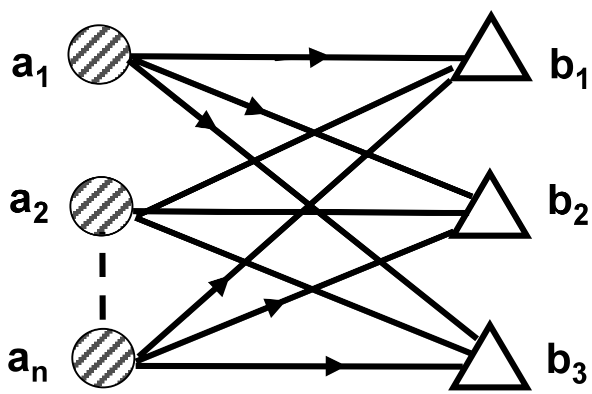
a_i - $n^{\underline{0}}$ de assinaturas da área i

b_j - capacidade da central j

c_{ij} - custo para conectar um assinante da área i à central j.

Problema: Alocar os assinantes às centrais de modo a minimizar o custo de ligação assinante-central [é um subproblema da localização de centrais]

Definindo x_{ij} o número de assinantes da área i conectado à central j temos:



$$(MIN)\ z = \sum_i \sum_j c_{ij} . x_{ij}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_j x_{ij} \geq a_i \quad , \forall\ i$$

$$\sum_i x_{ij} \leq b_j \quad , \forall\ j$$

$$x_{ij} \geq 0 \ \forall\ i, \forall\ j$$

PROBLEMA DA DIETA

Dispõe-se de 5 tipos de alimentos com diferentes composições de nutrientes (proteínas e sais minerais). Uma vez conhecido o custo de cada alimento deseja-se determinar a dieta que satisfaz os padrões nutritivos e que tenha o mínimo custo.

	ALIMENTOS					NECESSIDADES NUTRIENTES
	1	2	3	4	5	
PROTEINAS	3	4	5	3	6	42
SAIS MINERAIS	2	3	4	3	3	24
CUSTO	25	35	50	25	36	-

x_i quantidade do alimento i presente na dieta

Modelo Matemático

$$\left.\begin{array}{c} 3\,x_1 + 4\,x_2 + 5\,x_3 + 3\,x_4 + 6\,x_5 \geq 42 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 + 3\,x_4 + 3\,x_5 \geq 24 \\ 25\,x_1 + 35\,x_2 + 50\,x_3 + 33\,x_4 + 35x_5 = z\ (\mathrm{MIN}) \\ x_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, 5 \end{array}\right\}\ (\mathrm{PP})$$

NOTAÇÃO

Vamos procurar, aqui, introduzir uma notação mais adequada para estudos futuros

Vetor n-coluna:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Vetor m-linha:

$$c = [\, c^1 \quad c^2 \quad \ldots \; c^m \,]$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_1^2 \; \ldots \; A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 \; \ldots \; A_2^n \\ \vdots & \\ A_m^1 & A_m^2 \; \ldots \; A_m^n \end{pmatrix}$$

Portanto:

$A_i^j \Rightarrow$ **elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna**

$A_i \Rightarrow$ **vetor linha de n elementos :** $A_i = [\, A_i^1 \quad A_i^2 \ldots A_i^n \,]$

$A^j \Rightarrow$ **vetor coluna de m elementos:** $A^j = \begin{pmatrix} A_1^j \\ A_2^j \\ \vdots \\ A_m^j \end{pmatrix}$

Seja I um <u>conjunto ordenado de índices</u> tal que $\mathrm{I} \subset \{1, 2, ..., n\}$. Se I contiver p elementos então $\underline{x}_{\mathrm{I}}$ será o vetor p-coluna cujos componentes são x_i, $i \varepsilon \mathrm{I}$

Ex: $\mathrm{I}.\{2, 3, 5, 7\}$ $\therefore$ $x_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \end{bmatrix}$

Da mesma forma $\underline{c}^{\mathrm{I}}$ será o vetor p-linha cujos componentes são c^i, $i \varepsilon \mathrm{I}$, ou seja: $\underline{c}^{\mathrm{I}} = [\, \underline{c}^2 \ \underline{c}^3 \ \underline{c}^5 \ \underline{c}^7 \,]$

Também para o caso de uma matriz poderemos definir conjuntos de índices, tais como:

seja $\mathrm{I} \subset \{1, 2, ..., n\}$ e $J \subset \{1, 2, ..., m\}$

A^J será a matriz obtida pela união das colunas A^J, $j \varepsilon J$.

A_{I} será a matriz obtida pela união das linhas A_i, $i \varepsilon \mathrm{I}$.

A_{I}^J será a submatriz de A cujos elementos são A_i^j, $i \varepsilon \mathrm{I}$, $j \varepsilon J$.

Seja:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \ \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$c = [1\ 0\ -1\ 2\ ]$, $\quad I = \{\ 2, 3, 4\}$ $\quad J = \{1, 2\ \}$

Então teremos:

$$\underline{x}_I = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad \underline{c}^I = [\ 0\ -1\ 2\ ], \qquad \underline{b}_I = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_J = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{c}^J = \quad [1\ 0\ ], \qquad \underline{b}_J = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A_J = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^I = [\ A^2, A^3, A^4\ ] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^I_J = \begin{bmatrix} A^3_1, A^3_1, A^4_1 \\ A^2_2, A^3_2, A^4_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$